

半線型 Schrödinger 方程式について
(定常問題)

大阪市立大 工 亀 高 惟 倫

半線型 Schrödinger 方程式の定常解に関する簡単な注意を
少し述べた事とする。一番簡単な形で方程式を書くと

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + g|u|^2 u \quad (g = \pm 1)$$

ただし $u = u(x, t)$ は $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ に対して定義され
た n 個の複素数値を取る函数である。 $g = -1$ の場合は矢島氏
等に扱われている様に非線型光学 ($n = 1, 2$) とか分散媒質
中の非線型波動伝播における self-trapping ($n = 1$) とか
self-focusing ($n = 2$) と関連した現象を記述する簡単なモ
デルであるとされている。特に $n = 1$ の場合には solitary wave
の解があり、矢島氏のお話しにある通り = 中心に扱う方
か = の「ソリトン研究会」の主旨と合うのであるが、 = = =
はあえて相補的關係にある $g = 1$ の場合を扱う事とする。さ
 $g = 1$ に相当する場合は典型的に述べられる様に超流動現象を記

述べる一番簡単なモデルとして登場する。すなわち超流動状態を記述する波動関数 $u(x, t)$ の時空変化は次の初期値境界値問題に帰する。

$$(1) \quad \begin{cases} i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta u + V|u|^2 u & (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

ここで \hbar, M, V は正の実数、 Ω は n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n (物理的に意味があるのは $n=1, 2, 3$ の場合であり、以下は数学的取扱いであり、 n は任意の自然数とする) の中の有界領域であり、十分なおおきな境界 $\partial\Omega$ を持つものとする。ここで (1) の定常解 $u(x, t) = w(x) \exp\{-i\frac{E}{\hbar}t\}$ ($E > 0$) の形のものを探してみよう。 $w(x)$ に対する非線形楕円型境界値問題 (BVP と略記) が導かれる。

$$(2) \quad \begin{cases} D \Delta w + Ew - V|w|^2 w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$D = \frac{\hbar^2}{2M}$ とおいた。 $w(x)$ が実数値を取る (≡ 1) ものとすると (2) は次の様になる。

$$(3) \begin{cases} D\Delta w + Ew - Vw^3 = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{V}{E}} w$ があるとき w を考え直すことにする

$$(4) \begin{cases} D\Delta w + E(1-w^2)w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

よって $e^2 = \frac{D}{E}$ とおくと (4) は

$$(5) \begin{cases} e^2 \Delta w + (1-w^2)w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の形になる。 $f(w) = (1-w^2)w$ は次の性質を持つ。

$$(6) \begin{cases} (i) f(w) \text{ は区間 } [0, 1] \text{ で定義された十分なおおきな} \\ \text{関数。} \\ (ii) f(0) = f(1) = 0 \\ (iii) f''(w) < 0 \quad w \in [0, 1] \end{cases}$$

以下の議論には $f(w)$ に満足する (6) の性質しか使わない。
したがって、 $f(w)$ の具体的な形は忘れて (6) の性質を持つ任意の関数があると考える。結局考察の対象は性質 (6) を持つ $f(w) \in C^1$ の関数

$$(7) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \Delta w + f(w) = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

という事になる。BVP (7) は常に自明な解 $w(x) \equiv 0$ を持つ
 ($f(0) = 0$ による) 又 $\Omega = \mathbb{R}^2$ であり、2 境界条件なしになる
 ならば 1 つ非自明解 $w(x) \equiv 1$ を持つ ($f(1) = 0$ による)。
 我々は $0 \leq w(x) \leq 1$ in Ω なる制限の下で
 BVP (7) の非自明解を求めようとする。この枠が自然である
 事を説明しよう。 $w(x)$ の符号が Ω 内で交代し nodal
 line を持つ様な非自明解もあり得るのであるが、これは
 “エネルギー” の一番低いモード ((4) の ground state に相当
 する) を求める事にして、 $w(x) \geq 0$ in Ω とする。 $f(w)$
 は区間 $[0, 1]$ 上で w しか変数と見做す事にしよう。 $f(w) < 0$ for
 $w > 1$ なる様になるか否かを振舞いを考える事が出来る。この
 様に修正した $f(w)$ に対して BVP (7) の $w(x) \geq 0$ in Ω
 なる様な非自明解があるか否かと $w|_{\partial\Omega} = 0$ による
 Ω 内の点 x_0 があり、 $w(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} w(x) > 0$ と
 なるか $\Delta w(x_0) \leq 0$ であるか $f(w(x_0)) \geq 0$ となる
 $0 \leq w(x) \leq w(x_0) \leq 1$ in Ω が従うから $w(x)$ は
 修正前の $f(w)$ に対応する BVP (7) の $0 \leq w(x) \leq 1$
 in Ω に対する非自明解がある事になる。 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 区

是之れを定数と考へて、 $\varepsilon = 1$ とし一般性を失はぬ。
 したが、 ε BVP (7) を置之直して

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta w + f(\alpha r) = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考へる事に可。 BVP (8) の非自明解の存在の規準とし
 て、 ε の線型化、可成り固有値問題

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考へる。最小固有値 $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega) (> 0)$ 対応する固有函
 数 $\varphi_0(x) = \varphi_0(x; \Omega) \in C^1 \cup \max_{\bar{\Omega}} \varphi_0(x) = 1$ と
 規格化可。したが、 $\varphi_0(x) > 0$ for $x \in \Omega$ である。

A. Pazy and P. H. Rabinowitz [] に於て次の事がい
 える。

[定理 1]

(i) $\lambda_0 \geq f(0)$ (subcritical or critical case) ならば
 $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ の制限を対する BVP (8) の解は自
 明な解 $w(x) \equiv 0$ 以外にない。

(ii) $\lambda_0 < f(0)$ (supercritical case) ならば

$0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ の制限を対する BVP (8) の解は自

$$(12) \quad \begin{cases} [-\Delta + c] w = F(w) & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

楕円型偏微分作用素 $-\Delta + c$ の領域 Ω 内部 Dirichlet 問題に対する Green 函数 $G(x, y) = G(x, y; \Omega)$ 次の性質を持つものが存在する事が知られている。

[補題. 1]

(i) $G(x, y)$ は x, y なる $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ の点 (x, y) に対し定義域 $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ 上の連続な函数。

$$(ii) \quad G(x, y) = G(y, x) \geq 0 \quad \text{for } (x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$$

$$(iii) \quad \sup_{\bar{\Omega}} \int_{\bar{\Omega}} G(x, y) dy < \infty.$$

$$(iv) \quad \text{任意の } y \in \bar{\Omega} \text{ に対し } [-\Delta_x + c] G(x, y) = 0$$

$$\text{for } x \in \bar{\Omega} - \{y\}, \quad G(x, y) = 0 \quad \text{for } x \in \partial\Omega - \{y\}.$$

上の Green 函数 $G(x, y)$ を使えば BVP (8) は $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ 上の同値な問題に置き代える事が出来る。

$$(13) \quad w(x) = F[w](x)$$

$$F[w](x) = F[w; \Omega](x) = \int_{\Omega} G(x, y; \Omega) F(w(y)) dy$$

$F'(0) > \lambda_0 + c$ の時積分方程式 (I E) (13) が $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ なる非自明解 $w(x; \Omega)$ を持つ事を示す。Green 函数の性質より次の事が容易にわかる。

[命題. 1]

(i) $w(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ ならば $F[w](x) \in C^0(\bar{\Omega})$

$$0 \leq F[w](x) \leq 1 \quad \text{in } \bar{\Omega} \quad \text{および} \quad F[w] \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

(ii) $w(x), w'(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \leq w(x) \leq w'(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$

$$\text{ならば} \quad 0 \leq F[w](x) \leq F[w'](x) \leq 1 \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

(iii) $0 \leq F[1](x) < 1$ in $\bar{\Omega}$.

(iv) $w(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \leq w(x) \leq 1$, $w(x) \neq 0$ in $\bar{\Omega}$

ならば $0 < \delta \leq 1$ ならば $\delta \in \text{適当な値}$ ならば

$$F[w](x) \geq \delta \varphi_0(x) \quad \text{in } \bar{\Omega} \quad \text{とできる。}$$

(v) $0 < \delta_0 < 1$, $F[\delta_0] = (\lambda_0 + c) \delta_0$ ならば δ_0 が唯一の

定数ならば $0 < \delta \leq \delta_0$ ならば任意の δ に対し

$$F[\delta \varphi_0](x) \geq \delta \varphi_0(x) \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

⇒ の関数列 $\{\bar{w}_j(x) = \bar{w}_j(x; \Omega)\}_{j=0,1,2,\dots}$ 及び

$\{w_j(x) = w_j(x; \Omega)\}_{j=0,1,2,\dots}$ 二次の様になる。

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{w}_j(x) = F[\bar{w}_{j-1}](x) & \text{in } \Omega, j=1,2,3,\dots \\ \bar{w}_0(x) \equiv 1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} w_j(x) = F[w_{j-1}](x) & \text{in } \Omega, j=1,2,3,\dots \\ w_0(x) = \delta \varphi_0(x) & \text{in } \Omega, 0 < \delta = \delta(\Omega) \leq \delta_0 = \delta_0(\Omega) \end{cases}$$

命題. 1 より次の事がわかる。

[命題. 2]

- (i) $\{\bar{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は連続関数の単調減少列で下に有界。
 (ii) $\{\underline{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は \bar{w} で一様にある連続関数 $\bar{w}(x)$ に収束する。
 (iii) $\bar{w}(x)$ は BVP (8) の解である。

[命題. 3]

- (i) $\{\bar{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は連続関数の単調増大列で上に有界。
 (ii) $\{\underline{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は \bar{w} で一様にある連続関数 $\bar{w}(x)$ に収束する。
 (iii) $\underline{w}(x)$ は BVP (8) の解である。

[命題. 4]

- (i) $\bar{w}(x) \geq \underline{w}(x)$ 在 $\bar{\Omega}$
 (ii) BVP (8) の任意の非自明解 $w(x)$ ($0 \leq w(x) \leq 1$, $w(x) \neq 0$ 在 $\bar{\Omega}$) に対し $\bar{w}(x) \geq w(x) \geq \underline{w}(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 。
 (iii) $\bar{w}(x) \equiv \underline{w}(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ とならざる BVP (8) の非自明解は唯一つである。

命題. 4 (iii) の γ 証明してある。 $\bar{w}(x)$, $\underline{w}(x)$ 共に BVP (8) の解であるから次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta \bar{w} + f(\bar{w}), \underline{w}) - (\Delta \underline{w} + f(\underline{w}), \bar{w}) \\ &= \left(\frac{f(\bar{w})}{\bar{w}} - \frac{f(\underline{w})}{\underline{w}}, \bar{w} \underline{w} \right) \end{aligned}$$

$\bar{w}(x)w(x) > 0$ in Ω 又命題. 4 (i) より $f''(w) < 0$
 for $w \in [0, 1]$ なるから $\frac{f(\bar{w})}{\bar{w}} - \frac{f(w)}{w} \leq 0$ in Ω
 であるから上の等式より $\frac{f(\bar{w})}{\bar{w}} - \frac{f(w)}{w} \equiv 0$ in Ω となるから
 $\bar{w}(x) \equiv w(x)$ in Ω となるから、命題. 4 (iii) が証明
 された事となる。以上で定理. 1 の証明を終了。

次の BVP (8) に対し Ω を $\varepsilon < L$ となるように
 取りかき、BVP (7) に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ とする。このとき
 取りかき、命題. 4 (iii) を示す。先ず BVP (8) に対し Ω
 $\rightarrow \mathbb{R}^n$ とし、このとき $\Omega \supset V_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$
 $R \rightarrow \infty$ を意味するものとする。 $\Omega \supset \Omega'$
 $\lambda_0(\Omega) < f(0)$ とする。 $\lambda_0(\Omega) \leq \lambda_0(\Omega') < f(0)$ なるから
 Ω, Ω' 共に supercritical であるから BVP (8) の非自明
 解 $w(x; \Omega)$ 及び $w(x; \Omega')$ がそれぞれ唯一存在するから
 $G(x, y; \Omega) \geq G(x, y; \Omega')$ for $(x, y) \in \bar{\Omega}' \times \bar{\Omega}'$ となる。この
 から $w(x; \Omega) \geq w(x; \Omega')$ for $x \in \bar{\Omega}'$ となる。この
 から、 $w(x; \Omega) \geq \int_{\Omega'} \varphi_0(x; \Omega')$
 for $x \in \bar{\Omega}'$ である。 $\Omega' = V_r(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - \gamma| < r\}$
 とすれば $\int_{\Omega'} \varphi_0(x; \Omega')$ は γ と無関係であるから $\int_{\Omega'} \varphi_0(x; \Omega')$
 $= \int_{\Omega'} \varphi_0(x; V_r(\gamma))$ と書く事から $w(x; \Omega) \geq \int_{\Omega'} \varphi_0(x; V_r(\gamma))$
 for $x \in \bar{V}_r(\gamma)$, $\text{dis}(x, \partial\Omega) \geq r$ であるから $\partial\Omega$ までの距離
 を表わす $\varphi_0(x; V_r(\gamma)) = 1$ となる。

$\text{dis}(x, \partial\Omega) \geq r$ なる任意の $x \in \Omega$ に対し
 $w(x; \Omega) \geq \underline{\delta}_0(r)$ なる評価を得る。話を、よりよ
 くなるために $\underline{\delta}_0(r)$ を下からとるためのわかりやすい量で評価し
 よう。 $0 < \delta < 1$ なる δ を任意に固定しよう。

$\lambda_0(r) = \lambda_0(V_r(\varphi)) = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2$ (ただし z_0 は Bessel 函
 数 $J_{\frac{n-2}{2}}(z) = 0$ の正の最小根) であるから $r \geq r$ 分大き
 く取ると $\lambda_0(r) < \frac{f(\delta)}{\delta} < f'(0)$ となり $V_r(\varphi)$ は

supercritical となり、 (ξ, η) 平面上で直線 $\eta = \lambda_0(r)$ と
 直線 $\eta = -\frac{f(\delta)}{1-\delta}(\xi - 1)$ の交点の ξ -座標を $\underline{\delta}_0(r)$ と
 すると $\delta_0(r) \geq \underline{\delta}_0(r)$ である。結局次の評価を得る。

$$\text{dis}(x, \partial\Omega) \geq r \quad \text{ならば} \quad w(x; \Omega) \geq \underline{\delta}_0(r) = \frac{\frac{f(\delta)}{1-\delta}}{\frac{f(\delta)}{1-\delta} + \lambda_0(r)}$$

$\Omega \supset V_R$ とし $0 < \alpha \leq 1$ なる定数 α 、各 $u: R_0 \geq 1$
 なる任意の R_0 を固定しよう。 $v = v(R) = R^\alpha - R_0$ とおくと

$v(R) \rightarrow \infty$ かつ $R \rightarrow \infty$ したがって、 $\underline{\delta}_0(v(R)) \rightarrow 1$
 かつ $R \rightarrow \infty$ かつ $1 - \underline{\delta}_0(v(R)) \rightarrow 0$ かつ $R \rightarrow \infty$ 、

$$R - v(R) = R - R^\alpha + R_0 \geq R_0 \quad \text{for } R \geq 1$$

($0 < \alpha < 1$ の場合とは $R - v(R) \rightarrow \infty$ かつ $R \rightarrow \infty$)

$x \in V_{R-v(R)}$ ならば $\text{dis}(x, \partial V_R) \geq v(R)$ したがって、

$\text{dis}(x, \partial\Omega) \geq v(R)$ ならば $w(x; \Omega) \geq \underline{\delta}_0(v(R))$

結局次の評価を得る。

[定理. 2]

(i) $x \in V_{R-r(R)}$ なる Ω ($\Omega \supset V_R$, $r(R) = R^\alpha - R$)

$$0 < 1 - w(x; \Omega) < 1 - \underline{\delta}_0(r(R)) = \frac{\lambda_0(r(R))}{\frac{f(\underline{\delta})}{1-\underline{\delta}} + \lambda_0(r(R))}$$

(ii) $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ の時 \mathbb{R}^m での Ω に対して $w(x; \Omega) \rightarrow 1$.

$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ の BVP (7) に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ とした場合に ε が

$f(w) \approx \frac{1}{\varepsilon^2} f(w)$ の置き換えと同様の議論をくり返せば

よい。 $\lambda_0(r) < \frac{f(\underline{\delta})}{\varepsilon^2 \underline{\delta}} < \frac{1}{\varepsilon^2} f(\underline{\delta})$ と可なり $V_{r(\varepsilon)}$ は *super-critical* となり $\text{div}(x, \partial\Omega) \geq r$ なる $x \in \Omega$ に対し

$$0 < 1 - w(x; \Omega) < 1 - \underline{\delta}_0(r) = \frac{\lambda_0(r) \varepsilon^2}{\frac{f(\underline{\delta})}{1-\underline{\delta}} + \lambda_0(r) \varepsilon^2}$$

$r = r(\varepsilon)$ として $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ なる $\varepsilon \rightarrow 0$ に対し $\lambda_0(r) \varepsilon^2 \rightarrow 0$

なる $\varepsilon \rightarrow 0$ なる様を取ればよい。 左とえぬ $r(\varepsilon) = r_0 \varepsilon^\alpha$

$0 < \alpha < 1$ と可なり。 結局次の結論を得る。

[定理. 3]

(i) 上の様な $r(\varepsilon)$ に対し $\text{div}(x, \partial\Omega) \geq r(\varepsilon)$ なる Ω

$$0 < 1 - w(x; \Omega) < 1 - \underline{\delta}_0(r(\varepsilon)) = \frac{\lambda_0(r(\varepsilon)) \varepsilon^2}{\frac{f(\underline{\delta})}{1-\underline{\delta}} + \lambda_0(r(\varepsilon)) \varepsilon^2}$$

(ii) $\varepsilon \rightarrow 0$ と可なり。 BVP (7) の非自明解 $w(x; \Omega)$ は $O(\varepsilon)$

の境界層をのぞいて Ω 内部で一様に 1 に収束する。

この結果は次の意味で最良である。すなわち $n=1$ として
 $\Omega = (0, 1)$ の場合 BVP (5) は

$$(16) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 w'' + w - w^3 = 0 & \text{in } (0, 1) \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

となり非自明解は Jacobi の楕円函数 $\operatorname{sn}(z; k)$ を使

$$2. \quad w(x; \varepsilon) = \sqrt{\frac{2k(\varepsilon)^2}{1+k(\varepsilon)^2}} \operatorname{sn}\left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1+k(\varepsilon)^2}} x; k(\varepsilon)\right)$$

を用いて $\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1+k(\varepsilon)^2}} = z = k(k(\varepsilon))$ $k(k)$ は一種の

楕円積分 $k(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$ と表わす。 $z = z''$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とするに上関係より $k(\varepsilon) \rightarrow 1$ ($k(k(\varepsilon)) \rightarrow \infty$)

である。 $\operatorname{sn}(z; k) \rightarrow \tanh z$ として $k \rightarrow 1$ である。

$$w(x_0 \varepsilon; \varepsilon) = \sqrt{\frac{2k(\varepsilon)^2}{1+k(\varepsilon)^2}} \operatorname{sn}\left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1+k(\varepsilon)^2}} x_0 \varepsilon; k(\varepsilon)\right)$$

$$\rightarrow \tanh \frac{x_0}{\sqrt{2}} < 1$$

これは境界からの距離が丁度 $O(\varepsilon)$ のときにあつた $w(x; \varepsilon)$
 の値は $\varepsilon \rightarrow 0$ とし z も 1 と近づかない事を示してゐる

(三注、1) $f(x)$ がたまたま実数値函数とすると

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta w + f(|w|^2) w = 0 & \text{in } V_R \\ w|_{\partial V_R} = 0 \end{cases}$$

の解 $w = |z|$ のみの函数と仮するものは本質的には原数値函数と思ふ。実際 $w'(r) = \frac{f}{fr} w(r)$ とし (17) は

$$(18) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{r} w' + f(|w|^2) w = 0 & \text{in } (0, R) \\ w(R) = 0 \end{cases}$$

となすか $v(r) = \operatorname{Im} [e^{-i \arg w'(R)} w(r)]$ とおくと

$$(19) \quad \begin{cases} v'' + \frac{n-1}{r} v' + f(|w|^2) v = 0 & \text{in } (0, R) \\ v(R) = v'(R) = 0 \end{cases}$$

が得られ常微分方程式の初期値問題に対する解の一意的存在定理より $v(r) \equiv 0$ in $(0, R)$ となすか $e^{-i \arg w'(R)} w(r)$ は原数値函数である。

References

- [1] Pazy, A. and Rabinowitz, P. H., A nonlinear integral equation with applications to neutron transport theory, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 32 (1968) 226-246.
- [2] Pitaevskii, L. P., Vortex lines in an imperfect Bose gas, Soviet Physics JETP, Vol. 13(1961) 451-454.
- [3] Gross, E. P., Hydrodynamics of a superfluid condensate, J. Math. Phys., Vol. 4 (1963) 195-207.