

Semi-free circle action の 指数について

阪大 理 内田伏一

§1. 序

この報告において, *semi-free circle action* について考察し, 次の結果を得る。

定理1. 向きづけられた n 次元可微分閉多様体 M 上の *semi-free circle action* について, 各 k 次元 *stationary point set* F^k は標準的な方法で向きづけられ, M の指数は各 F^k の指数の和に等しい。

定理2. 指数零でない向きづけられた $4k$ 次元可微分閉多様体上の *semi-free circle action* の *stationary point set* は $2k$ 次元以上の連結成分をもつ。

§ 2. 可微分作用

n 次元可微分閉多様体 M 上のコンパクトリー群 G の可微分作用 $\varphi: G \times M \longrightarrow M$ について考える。各点 $x \in M$ に対し

$$G_x = \{ g \in G : \varphi(g, x) = x \}$$

は G の部分群になるが、これを $x \in M$ の *isotropy* 部分群という。 $G_x = G$ なるとき $x \in M$ を *stationary point* という。

$$F = \{ x \in M : G_x = G \}.$$

各点 $x \in M - F$ の *isotropy* 部分群が単位群なるとき G -action φ は *semi-free* であるという。

今、 M 上に G -不変な Riemannian metric (常に存在する) を一つ固定する。このとき、stationary point $x \in M$ において接空間 M_x を表現空間とする G の直交表現

$$\rho_x: G \longrightarrow \text{Aut}(M_x)$$

が誘導される。ここで次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} M_x & \xrightarrow{\rho_x(g)} & M_x \\ \downarrow \exp & \circlearrowright & \downarrow \exp \\ M & \xrightarrow{\varphi_g} & M \end{array}$$

但し、 $g \in G$, $\varphi_g(y) = \varphi(g, y)$ 。

$$V_x = \{v \in M_x : \rho_x(g)v = v \quad \forall g \in G\}$$

と置けば, exponential 写像 $\exp: M_x \rightarrow M$ によって

V_x から F への local diffeomorphism が与えられる。

従って stationary point set F の各連結成分は M の閉

部分多様体になる。また M_x における V_x の直交補空間

N_x は G -不変であり, 特に $\varphi: G \times M \rightarrow M$ が semi-free

であれば, N_x 上に G が表現 ρ_x によって fixed point

free に作用する。

§ 3. semi-free circle action

以後コンパクトリー群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の semi-free

な可微分作用 $\varphi: S^1 \times M \rightarrow M$ について考える。

stationary point $x \in M$ の接空間 M_x を表現空間とする

誘導表現

$$\rho_x: S^1 \longrightarrow \text{Aut}(M_x)$$

及び M_x の不変部分空間 V_x, N_x ($M_x = V_x \oplus N_x$) について

前節で考察したが, ここでは線型写像

$$J = \rho_x(\sqrt{-1}): N_x \longrightarrow N_x$$

について考えよう。 $J^4 = \text{identity}$ だから, 一般に

$$N_x = N_x^+ \oplus N_x^- \quad (\text{直和})$$

但し, $N_x^+ = \{v \in N_x : J^2(v) = v\}$, $N_x^- = \{v \in N_x : J^2(v) = -v\}$

と分解されるが、 $N_x - \{0\}$ 上に S^1 が表現 ρ_x によって *fixed point free* に作用するので $N_x^+ = \{0\}$, 即ち

$$\forall v \in N_x : J^2(v) = -v.$$

これは線型写像 $J: N_x \rightarrow N_x$ が N_x に複素構造を与えることを示している。 即ち

$$(a + \sqrt{-1}b) \cdot v = av + bJv, \quad v \in N_x, a, b \in \mathbb{R}.$$

さて、 S^1 は可換群だから

$$\forall z \in S^1 : J \circ \rho_x(z) = \rho_x(z) \circ J \quad \text{on } N_x.$$

即ち

$$\rho_x: S^1 \rightarrow \text{Aut}(N_x)$$

は複素表現である。

S^1 の複素既約表現は表現空間 \mathbb{C} 上の ρ^k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\rho^k(z) \cdot v = z^k \cdot v, \quad z \in S^1, v \in \mathbb{C}$$

のいずれかと同型であり、この中で原点以外で *fixed point free* になるのは $k = \pm 1$ の場合だけである。この事実と $J = \rho_x(\sqrt{-1})$ によって N_x の複素構造が定義されていることによつて

$$\rho_x(a + \sqrt{-1}b) \cdot v = av + bJv, \quad a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1, v \in N_x$$

が示される。以上をまとめて

補題. *semi-free circle action* $\varphi: S^1 \times M \rightarrow M$ の

stationary point set の各連結成分は M の閉部分多様体であり、 M における normal bundle は induced circle action がスカラー積になるような複素構造をもつ。

系. semi-free circle action の stationary point set の空でない連結成分の余次元は偶数である。

§4. 有向多様体上の semi-free circle action

向きづけられた n 次元可微分閉多様体 M 上の semi-free circle action $\varphi: S^1 \times M \rightarrow M$ について考える。前節より、stationary point set は

$$F = \bigcup_k F^{n-2k} \quad (\text{disjoint union})$$

と表わせる、ここに F^{n-2k} は M の $n-2k$ 次元閉部分多様体である。更に embedding $F^{n-2k} \subset M$ の normal bundle には複素構造を定義出来たが、この complex normal bundle を ν^k と書こう。このとき ν^k には自然に bundle としての向きが定まり、bundle isomorphism

$$\tau(F^{n-2k}) \oplus \nu^k \longrightarrow \tau(M)|_{F^{n-2k}}$$

が向きを保つように F^{n-2k} の向きを定め得る。

ところで、有向閉多様体 X 上の complex vector bundle ξ に associate した sphere bundle 及び complex projective

space bundle の total spaces を夫々 $S(\xi)$, $CP(\xi)$ と表わすとき, $S(\xi)$, $CP(\xi)$ は X 及び ξ の向きによって自然に向きづけられた多様体となる。上述の記号の下で。

補題. oriented cobordism ring Ω_* において,

$$(a) \quad \sum_{k \geq 1} [CP(V^k)] = 0$$

$$(b) \quad [M] = \sum_{k \geq 0} [CP(V^k \oplus \theta)]$$

ここに θ は trivial complex line bundle を表わす。

証明. (a) を示すには $F^n = \emptyset$ と仮定して良い。今 N_k を S^1 -不変な F^{n-2k} の tubular neighborhood とし, $k \geq 1$ に対し互いに交わらないものとする。このとき

$$B^n = M - \bigcup_k \text{Int } N_k$$

は M の S^1 -不変なコンパクト部分多様体であり, B^n 上の circle action は fixed point free であり, その orbit 多様体 B^n/S^1 は有向多様体であり; 境界は $CP(V^k)$, $k \geq 1$ の disjoint union である。即ち等式 (a) が成り立つ。

次に (b) を示すため, $D^2 \times M$ 上の circle action を 2 つ定義する。

$$\tau_1(\lambda, (z, x)) = (\lambda z, x), \quad \tau_2(\lambda, (z, x)) = (\lambda z, \varphi(\lambda, x))$$

ここで $\lambda \in S^1$, $z \in D^2$ は複素数であり, $x \in M$.

$$f: S^1 \times M \longrightarrow S^1 \times M$$

を $f(\lambda, x) = (\lambda, \varphi(\lambda, x))$ によって定義される f は $(\tau_1, S^1 \times M)$ から $(\tau_2, S^1 \times M)$ への equivariant diffeomorphism を与える。従って, $(\tau_1, D^2 \times M)$ と $(\tau_2, -D^2 \times M)$ の境界を f によって張り合わせることによって, 向きづけられた $n+2$ 次元可微分多様体 M^{n+2} と, その上の circle action を得る。 $(\tau_1, D^2 \times M)$ において, $0 \times M$ 以外では fixed point free であり $0 \times M$ の各点は stationary point であり, $(\tau_2, D^2 \times M)$ において, やはり $0 \times M$ 以外では fixed point free であり $(0, x)$ における isotropy 部分群は $x \in M$ における φ の isotropy 部分群に等しい。従って, M^{n+2} 上に τ_1 と τ_2 によって定義された circle action は semi-free であり, この semi-free circle action について等式 (a) は等式 (b) を導く。

有向多様体 X 上の complex k -plane bundle ξ^k について, $CP(\xi^k)$ の実係数コホモロジー環に Leray-Hirsch の定理を適用し, 多様体の指数の定義にあてはめると, 等式

$$I(CP(\xi^k)) = \frac{1 + (-1)^{k+1}}{2} \cdot I(X)$$

を得る。これを補題の等式 (a), (b) にあてはめることによ
って、定理 1 が証明出来る。

§ 5. stationary point set の次元について

向きづけられた n 次元可微閉多様体上の fixed point free
circle actions のコホモロジー群を $F_n(S^1)$ で、同じく
semi-free circle actions のコホモロジー群を $SF_n(S^1)$ で
表わそう。

$\varphi: S^1 \times M \longrightarrow M$ は fixed point free circle action,
 $\tau: S^1 \times S^{2N+1} \longrightarrow S^{2N+1}$ は $\tau(\lambda, (z_0, \dots, z_N)) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_N)$ で
与えられる標準的な circle action とする。equivariant
可微分写像

$$f: M \longrightarrow S^{2N+1}$$

が S^{2N+1} 上で transversal regular なるとき $(\varphi|_V, V)$, 但
し $V = f^{-1}(S^{2N+1})$, は $F_{n-2}(S^1)$ の元を表わす。この対応
によって, Smith 準同型写像

$$\Delta: F_n(S^1) \longrightarrow F_{n-2}(S^1)$$

を得る。(well-defined 準同型写像に存在)

また, n 次元有向閉多様体上の complex k -plane bundle
を k に対して, $S(\mathbb{C}^k)$ 上のスカラー積による circle action
を考えることによって, 準同型写像 (well-defined)

$$\partial: \Omega_n(BU(k)) \longrightarrow F_{n+2k-1}(S^1)$$

を得る。

今, $f: S(\frac{1}{2}k) \longrightarrow S^{2N-1}$ を circle actions に關して equivariant 可微分写像とすれば

$$S(\frac{1}{2}k \oplus \theta) = S(\frac{1}{2}k) * S^1 \xrightarrow{f*1} S^{2N-1} * S^1 = S^{2N+1}$$

は equivariant 可微分写像であり, S^{2N+1} 上 transverse regular 且つ $(f*1)^{-1}(S^{2N-1}) = S(\frac{1}{2}k)$ である。従って, 次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n(BU(k)) & \xrightarrow{\partial} & F_{n+2k-1}(S^1) \\ \downarrow i_* & \circlearrowright & \uparrow \Delta \\ \Omega_n(BU(k+1)) & \xrightarrow{\partial} & F_{n+2k+1}(S^1) \end{array}$$

更々, $i_*: \Omega_n(BU(k)) \cong \Omega_n(BU(k+1))$ for $n \leq 2k$ である。

他方, semi-free circle action に対し, stationary point set と complex normal bundle とを考えると, 次の exact sequence を得る。

$$0 \longrightarrow SF_n(S^1) \xrightarrow{\beta} \sum_{k \geq 0} \Omega_{n-2k}(BU(k)) \xrightarrow{\partial} F_{n-1}(S^1) \longrightarrow 0$$

これだけの準備の下に定理を証明しよう。

今, $I(M^{4n}) \neq 0$ なる有向閉多様体 M^{4n} 上の或る semi-free circle action について, stationary point set が

$$F = \cup F^{4n-2k} \quad (k > n)$$

と表わせたとする。このとき F^{4n-2k} の complex normal bundle ν^k は $\nu^k \cong \xi^{k-1} \oplus \theta$ と表わせる。ここで ξ^{k-1} は F^{4n-2k} 上の或る complex $(k-1)$ -plane bundle である。

前頁の可換図式より

$$\partial \left(\sum_{k>n} [\xi^{k-1}] \right) = 0$$

であるから, exact sequence により, 或る $4n-2$ 次元南多様体上の semi-free circle action $\psi: S^1 \times V \rightarrow V$ が存在し,

$$\beta([\psi, V]) = \sum_{k>n} [\xi^{k-1}].$$

即ち, この semi-free circle action の stationary point set は $F = \cup F^{4n-2k}$ に一致する。従って, 定理1によると,

$$I(M^{4n}) = \sum I(F^{4n-2k}) = I(V^{4n-2}) = 0.$$

これは仮定 $I(M^{4n}) \neq 0$ に矛盾する。従って, $I(M^{4n}) \neq 0$ なる有向南多様体 M^{4n} 上の任意の semi-free circle action の stationary point set は必ず $2n$ 次元以上の連結成分をもつ。

付記. 本稿は [6] の解説であり, §4 の末尾の $I(\mathbb{C}P^{2k})$ の等式の証明を省略した以外は [6] より詳しい. §4 の補題 (b) については [8] 頁 42 において, これより精密な結果が得られている.

Atiyah-Singer の指数定理によって, 任意の circle action について, 定理 1 が成り立つことが, Atiyah-Hirzebruch [1] によって注意されている. また, コホモロジー論の立場から, この結果を導くことが, 服部-谷口 [4] によって為されている. 更に, rational cohomology manifolds のコホモロジー論を考へることによつても同様の結果を導びき得ることが, 川久保-Raymond [5] によって示された.

参考文献

- [1] Atiyah-Hirzebruch: Spin-manifold and group actions, (de Rham 記念).
- [2] Chern-Hirzebruch-Serre: On the index of a fibered manifold, Proc. AMS, 8 (1957), 587-596.
- [3] Conner-Floyd: Differentiable Periodic Maps.
- [4] 服部-谷口: S^1 -action and bordism, コホモロジー論理論研究会報告集.

- [5] 川久保 - Raymond: The index of manifolds with toral actions and geometric interpretations of the $\sigma(\infty, (S^1, M^n))$ invariant of Atiyah and Singer (pre-print).
- [6] Kawakubo - Uchida: On the index of a semi-free S^1 -action, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), to appear.
- [7] Spanier: Algebraic Topology
- [8] Uchida: Cobordism groups of semi-free S^1 - and S^3 -actions, Osaka J. Math. 7 (1970), 345-351.