数理解析研究所講究録
127巻 1971年 12-22

特異点のあるfoliationとMorse不等式

名大 理　大和一夫

Introduction.

多様体M^n上で定義された完全積分可能な1次微分形式ωについて、その特異点はMの位相的構造と深い関係があると予想される。例えば特異点のないωをもつMはかなり限られているであろうとReebは考えた。

ここでは、ある単純な条件のもとでωの特異点とMとの間にMorse不等式が成立することをしめす。（§3. Theorem A.）

その結果、次の基本的な問題が得られる：

多様体M^nに対してつねに、指数が0である特異点をもたない完全積分可能な1-form ωが存在するか？

これについて我々は何も知らない。

さて、§1と2で、ωの特異点の近傍の様子を教えるLemma 1.2を証明し、それによって§3で、我々のmain theoremを証明する。

§1. Local theory.

$\mathbb{R}^n$の原点 0 を含む open set で def された 1-form $\omega = \sum a_i(x)dx^i$ が class C^r, $r \geqq 2$, で $\omega \wedge d\omega = 0$, そして原点を nondegenerate singular point としてもつ, i.e., $a_i(0) = 0$, $i = 1, \cdots n$, $\det(a_{ij}) \neq 0$, 但し $a_{ij} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right)_{x=0}$, と仮定する。このとき Reeb によって

<u>Lemma 1.1.</u> $n \geqq 3$ のとき matrix (a_{ij}) は symmetric.

が知られている。そこで (a_{ij}) の負の固有値の個数を λ とすると

<u>Lemma 1.2.</u> $n \geqq 3$, $\lambda \neq 2$, $n-\lambda \neq 2$ のとき、原点 0 の nbd $U, V \subset \mathbb{R}^n$ と homeomorphism $h: V \to U$ が存在して次の条件をみたす:

(i). $h(0) = 0$ で, (V, df) の integral manifold を $(U, \omega|U)$ の integral manifold にうつす. ここで $f = -(x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + \cdots + (x^n)^2$.

(ii). h は V の open dense subset V_0 で class C^r の diffeomorphism.

(iii). h は向きを保つ, i.e., $\omega(h_* \operatorname{grad} f) > 0$ on V_0.

Remark 1. $\lambda = 2$ のときも次の条件をみたしていれば上の主張成立:

(a_{ij}) の負の固有値に属する固有空間 $E^2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して ω を E^2 に制限したもの (ω の domain $\cap E^2$, $\omega|_{\omega \text{ の domain} \cap E^2}$) の原点の nbd の leaf がすべて compact.

Remark 2. $n-\lambda=2$ のとき．上の主張で(i)を次のように変えると成立：

(i′). h は，(V, df) の integral manif. でそこでの f の値が ≤ 0 なるものを $(U, \omega|_U)$ の integral manif. にうつす．

$\lambda=0$ or $\lambda=n$ のときこの Lemma はすでに Reeb によってしられている．あらためてかきなおすと

Reebの定理． $\lambda=0$ or n のとき，原点の nbd $U, V \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 3)$ と homeom. $h: V \to U$，$h(0)=0$，が存在して

(i). h は 0 以外で C^r-diffeom. で，$\forall x \in V$ に対し $\exists a > 0$ s.t. $h(x) = ax$.

(ii). 中心 O の半径 ρ の球面 $S^{n-1}(\rho) \subset V$ は h によって U の leaf にうつる．

§2. Lemma 1.2 の証明．

Lemma 1.2 の proof を簡単のため $\lambda \neq 1$，$n-\lambda \neq 1$ として行う．まずそのまえにひとつ準備する．

2.1. $\mathbb{R}^2$ の原点の nbd で def. された 1-form α が

$$\alpha = b(y,z)\,dy + c(y,z)\,dz,$$

$$b(0,0) = c(0,0) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とする．但し (y, z) は標準的な座標系．

このαに対して vector field A を
$$A = -c(y,z)\frac{\partial}{\partial y} + b(y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$
と def. すると、その linear part は $A' = -z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$. そして
$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqq 0,\ z \geqq 0 \right\},$$
$$\Delta(\rho) = \left\{ (y,0) \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq \rho \right\} \cup \left\{ (0,z) \,\middle|\, 0 \leqq z \leqq \rho \right\},\ \rho > 0,$$
とおく. $\rho > 0$ が

$b(y,0) < 0$ for $0 < {}^\forall y \leqq \rho$, $c(0,z) < 0$ for $0 < {}^\forall z \leqq \rho$,

をみたすとする. $\Lambda > 0$ を十分小とする.

そこで, 写像 $\pi[\alpha] : \Delta(\rho) \times [0,\Lambda] \to \mathbb{R}^2_+$ を次のように def. する:

$(w,\lambda) \in \Delta(\rho) \times [0,\Lambda]$ に対して

$w \neq (0,0)$ のとき, $\pi[\alpha](w,\lambda) = w$ をとうる integral curve of $-A$ 上の点で w からの arc length が λ .

$w = (0,0)$ のとき, $\pi[\alpha](w,\lambda) =$ 原点をとうる stable manif. of A 上の点 $\in P^2_+$ で原点からの arc length が λ .

<u>2.2.</u> Proof of Lemma 1.2 ($\lambda \neq 1,\ n-\lambda \neq 1$ として).

$\lambda = n$ or $\lambda = 1$ のとき Reeb の定理に一致. よって $3 \leqq \lambda \leqq n-3$ とする. また(必要なら座標変換して)
$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}$$
とする.

ω を $R^\lambda \times 0$ に制限すると index λ . よって Reeb の定理より

原点のnbd $U^-, V^- \subset \mathbb{R}^\lambda$, homeom. $h^- : V^- \to U^-$, $h^-(0) = 0$ を次のようなものとする：

(i). h は 0 以外で C^r-diffeom. で，$\forall x^- \in V^-$ に対し $\exists a > 0$ s.t. $h^-(x^-) = a x^-$.

(ii). $(V^- \times 0, df^-|_{V^- \times 0})$ の各 leaf を $(U^- \times 0, \omega|_{U^- \times 0})$ の leaf にうつす．但し $f^- = -(x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2$.

ここで $\omega|_{U^- \times 0}$ は 0 以外に singular point をもたないことに注意する．同様に $U^+, V^+ \subset \mathbb{R}^\lambda$, $h^+ : V^+ \to U^+$, $f^+ = (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$ がとれる．

さて，$x = (x^-, x^+) \in V^- \times V^+ \subset \mathbb{R}^n$ に対して $h(x) \in \mathbb{R}^n$ を次のように def. する：

a). $x^+ = 0$ のとき，$h(x) = h^-(x^-) \times 0 \in U^- \times 0 \subset \mathbb{R}^n$.

b). $x^- = 0$ のとき，$h(x) = 0 \times h^+(x^+) \in 0 \times U^+ \subset \mathbb{R}^n$.

c). $x^- \neq 0$, $x^+ \neq 0$ のとき，$h(x) = T \circ \pi[T^* \omega](T^{-1} \circ h^- \circ T(w), \lambda)$,

但し

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ は linear map defined by $T(1,0) = x^-/\|x^-\|$, $T(0,1) = x^+/\|x^+\|$.

$(w, \lambda) \in \Delta(p) \times [0, \Lambda]$ は 関係： $x = T \circ \pi[T^* d(f^- + f^+)](w, \lambda)$. で def. される．また $\pi[\ ]$ は 2.1 において def. された写像．

このようにして def. した h が求めるものであることが確かめられる．

§3. 定理 A とその証明

M^n を closed connected C^∞ manifold, $n \geqq 3$, とする. ω を M^n 上の 1-form で class C^r, $r \geqq 2$, $\omega \wedge d\omega = 0$, その singular points はすべて nondegenerate とする. c_λ で ω の index λ の singular pts の個数, b_λ で M^n の λth Betti 数をあらわす.

3.1.

Theorem A. $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$, $c_{n-2} = 0$ ならば Morse 不等式:

$$b_\lambda - b_{\lambda-1} + \cdots \pm b_0 \leqq c_\lambda - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0 \quad \text{for } \lambda = 0, \cdots, n,$$

が成立する.

Remark. ω が closed あるいは M, ω が real analytic なら $c_{n-2} = 0$ の仮定はいらない.

証明のためのいくつかの定義を与える.

3.2. Leaflet と leaf.

Def. connected $(n-1)$-submanifold $L^{n-1} \subset M^n$ が leaflet とは, L が ω の integral manifold で (包含関係で) 極大なものであるときとする. leaflet L が incomplete とは, curve $c : [0,1] \longrightarrow M^n$, $c([0,1)) \subset L$, $c(1) =$ singular pt, が存在するときとする. この singular pt を L の limit pt とよぶ.

Def. leaflets $L_1, \cdots, L_\ell$ と singular pts $p_1, \cdots, p_m$ が次の条件をみたすとき, M の subset $\tilde{L} = L_1 \cup \cdots \cup L_\ell \cup p_1 \cup \cdots \cup p_m$ を leaf とよぶ. $m \geqq 1$ のとき singular leaf とくにいう:

(i). $L_i \cap L_j = \phi$ for $i \neq j$, $p_i \neq p_j$ for $i \neq j$.

(ii). incomplete な L_i に対して その limit pt は $p_1, \cdots, p_m$ のどれかと一致. 又, どの p_j に対しても p_j を limit pt としてもつ leaflet は $L_1, \cdots, L_\ell$ のどれかと一致.

(iii). どの L_i と p_j に対しても, L_i の limit pt p_{i_1} がとれてそれを limit pt とする L_{i_2} がとれて ⋯ このような process で p_j が得られる.

以下, $x \in M$ に対して $L(x)$ で x をとうる leaf をあらわす.

3.3. Translation.

M の Riemann metric をひとつ fix して, $Y = \omega^* = \omega$ の dual vector field, $\{\psi_t\}$ を M の one param. tr. gr. gen. by $\dot{\psi}_t = Y$, とする.

Def. P_0, P_1 を M の subsets で夫々ある leaflet L_1, L_2 に含まれているとする. P_0 が P_1 に translate できるとは 写像

$$T : P_0 \times [0,1] \longrightarrow M$$

s.t. (i). $T|_{P_0 \times 0} = id$, $T|_{P_0 \times 1} : P_0 \longrightarrow P_1$ homeomorphism,

(ii). $\forall t \in [0,1]$ に対して $T(P_0 \times t)$ は あるleaflet に含まれ,

(iii). $\forall p \in P_0$ に対して, curve $T|_{p \times t}$ $t \in [0,1]$ の tangent vector は $Y(T(p,t))$ の正数倍.

Remark. 上の def. で, P_0 に対して次のような条件がみたされているとき T は 1-1 :

$\exists N^n \subset M^n$ compact submanifold s.t. $P_0 \subset \partial N$, ∂N の連結成分は夫々一つの leaf になっていて, そして $Y|_{\partial N}$ は外向き.

Remark. $L \subset M^n$ を nonsingular compact leaf とする. もし L がそれ自身に translate できるなら, すべての leaf は L に diffeom.

<u>3.4.</u> 次の仮定のもとで次の2つの Lemmas が成立する:

$L \subset M^n$ を compact nonsingular leaf, $q \in L$ とする. そして $\forall t > 0$ に対して L が leaf $L(\psi_t(q))$ に translate できるとする.

<u>Lemma</u>. M^n のすべての leaf は L に diffeomorphic かそれとも $\lim_{t\to\infty} \psi_t(q)$ が存在して ω の singular pt かのどちらか.

Proof. $\lim_{t\to\infty} \psi_t(q)$ が存在せぬなら, $0 < {}^\exists t_1 < {}^\exists t_2$ s.t. $L(\psi_{t_1}(q)) = L(\psi_{t_2}(q))$. よって 3.3 の Remark よりすべての leaf は L に diffeom.

<u>Lemma</u>. $\lim_{t\to\infty} \psi_t(q) = p$ が存在するとき, p を含む singular leaf を

$$\tilde{L} = L_1 \cup \cdots \cup L_\ell \cup p_1 \cup \cdots \cup p_m \ , \quad p_1 = p \, ,$$

とし, $\lambda_i = p_i$ の index, $q'_j \in L_j$, $i = 1, \cdots m$, $j = 1, \cdots, \ell$, とおく.

(i). もし $\lambda_i \neq 1 \ \forall i = 1, \cdots, m$ ならば $\tilde{L}$ は compact.

(ii). もし $\lambda_i \neq 1$ かつ $\lambda_i \neq n-2 \ \forall i = 1, \cdots m$ で $\pi_1(L) = 0$ ならば このとき ${}^\exists \delta_j > 0$ s.t. $L(\psi_t(q'_j))$, $0 < t \leqq \delta_i$, は nonsingular compact で $\pi_1 = 0$. そして manifold $L(\psi_{\delta_1}(q')) \cup \cdots \cup L(\psi_{\delta_2}(q'))$ は L に各次数が $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ の m 回の spherical modifications をほどこしたものである.

Proof of (i). L_1 は p_1 を limit pt としてもつとする.

Assertion 1. $\forall x \in L_1$ に対して $\exists s>0$, $\exists x_0 \in L$ s.t. $x=\psi_s(x_0)$.

これを証明するのに, x が p に十分近くて Lemma 1.2 の nbd U に含まれているとしてよい. このとき $\exists \zeta>0$ s.t. $\psi_{-\zeta}(x) \in U$. すると $\exists \varepsilon>0$ s.t. $\psi_{-\zeta}(x) \in h(f^{-1}(-\varepsilon))$. ところが $\lim_{t\to\infty} \psi_t(q)=p$ だから, $\exists t>0$ s.t. $\psi_t(q) \in h(f^{-1}(-\varepsilon))$. 一方明らかに $f^{-1}(-\varepsilon) \approx S^{\lambda-1} \times \mathring{D}^{n-\lambda}$ (λ は p_1 の index). $\lambda \neq 1$ なのだから connected. よって $\psi_{-\zeta}(x)$ と $\psi_t(q)$ とを結ぶ curve で leaf に含まれるものがとれる. ところが $L(\psi_t(q))$ に L は translate できる. よって $x_0 \in L$ がとれてある $s>0$ に対して $x=\psi_s(x_0)$. Assertion 1 がしめされた. 次に, L_1 が limit pt p_2 をもつとする. 同様にして

Assertion 2. $\exists w_0 \in L$ s.t. $p_2 = \lim_{t\to\infty} \psi_t(w_0)$.

これら二つの Assertions から,

Assertion 3. $\tilde{L}$ の任意の点に $L(\psi_t(q))$ が限りなく近づく.

M^n は compact だから,

Assertion 4. $\tilde{L}$ が noncompact なら, $\forall \varepsilon>0$ に対して $\exists j \in \{1,\cdots,\ell\}$, $\exists z \in L_j$, $\exists \tau>0$ s.t. $\psi_{-\tau}(z) \in L_j$ かつ $\mathrm{dis}(z, \psi_{-\tau}(z)) < \varepsilon$.

もはや Lemma (i) の証明を終えることは容易.

Proof of Lemma.(ii).

簡単のために、$\lambda_i \neq n-1$ for $\forall i=1,\cdots m$. として証明する.

そうすると, $\tilde{L} = L_1 \cup p_1 \cup \cdots \cup p_m$, $2 \leqslant \lambda_i \leqslant n-3$. となる.

各 p_j , $j=1,\cdots m$, に対して, p_j の nbd U_j , homeom. $h_j : \mathring{D}^n(\rho) \longrightarrow U_j$, f_j が Lemma 1.2 の条件をみたすようにとれる. ($\lambda_j=2$ のときはその Remark による.) そして, $q_i \notin U_1 \cup \cdots \cup U_m$. $U_j \cap \tilde{L} = h_j(f_j^{-1}(0))$ ($\tilde{L}$: compact!) とする. そこで, $W_j = h_j(\mathring{D}^n(\varepsilon)) \subset U_j$, $\varepsilon > 0$ 十分小, とおくと

$$\tilde{L}_0 = \tilde{L} - W_1 \cup \cdots \cup W_m$$

は次の条件をみたす:

$\exists$ imbedding $k : S^{\lambda_1 -1} \times \mathring{D}^{n-\lambda_1} \cup \cdots \cup S^{\lambda_m -1} \times \mathring{D}^{n-\lambda_m} \longrightarrow L(\psi_\tau(q))$

s.t. $L(\psi_\tau(q)) - \mathrm{Im}\, k$ は $\tilde{L}_0$ に translate できる. ($\tau > 0$ 十分大)

明らかに

$\pi_1(\tilde{L}_0) = \pi_1(L(\psi_\tau(q)) - \mathrm{Im}\, k) = 0$. ($2 \leqslant \lambda_i \leqslant n-3$!)

従って $\tilde{L}_0$ は少しなら translate できる. すなわち,

$\delta > 0$ と leaflet $L(\psi_\delta(q_i))$ の submanifold $\tilde{\tilde{L}}_0$ が存在して

次の条件をみたす:

(i). $\tilde{L}_0$ は $\tilde{\tilde{L}}_0$ に translate できる

(ii). $\partial \tilde{\tilde{L}}_0 = J_1 \cup \cdots \cup J_m$, $J_i \subset U_i$ $i=1,\cdots m$ とかける.

このとき, $J_i \approx S^{\lambda_i -1} \times S^{n-\lambda_i -1}$ だから J_i は connected.

($2 \leqslant \lambda_i \leqslant n-3$!) よって $\zeta_i > 0$ が存在して $J_i \subset h_i(f_i^{-1}(\zeta_i))$.

$h(f_i^{-1}(\zeta_i)) \subset M$ がひとつの integral manifold であるから集合

$$\tilde{\tilde{L}}_0 \cup h_1(f_1^{-1}(\zeta_1)) \cup \cdots \cup h_m(f_m^{-1}(\zeta_m))$$

も integral manifold，しかも boundary がなくて compact，connected．よって $L(\psi_s(q'))$ も compact nonsingular leaf．Lemma の残りの証明は容易．

3.5. Lemma. $L \subset M^n$ を compact nonsingular leaf，$q \in L$ とする．そして $t_0 > 0$ が次の条件をみたすとする：

(i). L は leaf $L(\psi_{t_0}(q))$ に translate できない．

(ii). $0 < {}^\forall t < t_0$ に対して L は leaf $L(\psi_t(q))$ に translate できる．

このとき ${}^\exists q' \in L$ s.t. ${}^\forall t > 0$ に対して L は $L(\psi_t(q))$ に translate 可能で $\lim_{t\to\infty} \psi_t(q')$ が存在して singular pt．

Proof. むつかしくない．

3.6. Theorem A の証明．

Theorem A は 3.4 及び 3.5 の Lemmas の直接の結果である．