数理解析研究所講究録
127巻 1971年 1-11

Foliationに関する問題

東大 大学院 水谷忠良

Foliationに関する主な問題と、最近の主な結果をのべる。

§1. 定義

[定義] $\Gamma(E)$がtopological space Eのpseudo-group of transformations であるとは、次の条件をみたす時をいう。

0) $\Gamma(E) = \{(\varphi, U) \mid U$ は E の open set, $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U)$ は homeomorphism (or diffeom. etc) $\}$

1) $\Gamma(E) \ni (id, U)$

2) (φ, U) が $\Gamma(E)$ の元ならば、$V \subset U$; open に対して、$(\varphi|_V, V)$ も $\Gamma(E)$の元である。

3) $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U)$ homeo. であって、$(\varphi|U_\alpha, U_\alpha)$ が $\Gamma(E)$の元ならば、(φ, U)も$\Gamma(E)$の元となる。

4) (φ, U) $(\psi, \varphi(U))$が $\Gamma(E)$ に属するならば、

$(\psi\circ\varphi, U)$ も又 $\Gamma(E)$ に属する。

5) $(\varphi, U)\in\Gamma(E)$ ならば、$(\varphi^{-1}, \varphi(U))\in\Gamma$ である。

Γ_n を R^n の local diffeomorphism 全体の作る pseudogroup とする。

$\Gamma_{n,q}$ を $R^n = R^{n-q}\times R^q \ni (x, y)$ の local diffeomorphism で $h(x, y) = (h_1(x,y), h_2(y))$ なる形のもので generate される sub-pseudogroup とする。

［定義］ Differentiable manifold M が codimension q の foliated structure をもつとは、M の coordinate chart $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ が存在して、coordinate transformations が $\Gamma_{n,q}$ 内にとれる時をいう。

[同値な定義]

M が foliated structure をもつとは、local な differentiable submersions (f_i, U_i) ($\{U_i\}$ open covering of M) $f_i: U_i \longrightarrow R^q$ が存在し、$U_i\cap U_j \neq \phi$ ならば、local な diffeomorphism h_{ji} が存在して次の diagram が local に commute する。

$$\begin{tikzcd}
U_i\cap U_j \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & R^q \arrow[d, "h_{ji}"] \\
& R^q
\end{tikzcd}$$

又 Frobenius の定理を考えれば. codimension q の foliation は $(\dim M - q)$-次の integrable な plane field であるといってもよい。いずれにしろ直観的には, 与えられた manifold を "locally trivial" に $(n-q)$-dim の submanifold の族で分割することである。この submanifold の component を leaf という。

良く知られた foliation の例に Reeb の foliation がある。又 Fibre bundle の total space も簡単な例になっている。

§2 Holonomy of a leaf

与えられた foliation の1つの leaf の近くでの様子をあらわすのが holonomy group である。$G_q(0)$ を R^q の 0 を 0 に写す local diffeomorphism の germ のつくる群とする。$\mathrm{Codim} = q$ の foliation と1つの leaf L が与えられた時, $L \ni x_0$ において transversal な disk $D(x_0)$ をとる。(L, x_0) の loop に対して. $D(x_0) \ni y$ の像を y を通る ~~curve で~~ leaf 上の curve で初めの loop を cover するものが $D(x_0)$ と再び交わる点とする。これによって $\pi_1(L, x_0) \xrightarrow{\Phi} G_q(0)$ なる map が定まる。これは leaf L の holonomy という。[詳しくは, Haefliger [2]]。

Holonomy に関して次のような定理がある。

定理（Reeb［7］）

Mをcompact, connectedなmanifoldで. codimension 1のfoliationをもつとする。今, 一つのleaf Lがcompactで. その基本群がfiniteであるとする. この時すべてのleafはcompactで, その基本群はfiniteになる。

系） M simply-connected, compact manifoldで.

$\partial M \neq \phi$, connected, simply-connectedであるとする。この時Mは. ∂Mを1つのleafとするようなfoliationをもちえない。

以上のようにMあるいはleafの基本群が. 重要な役割りを果していることがわかる。

命題。 $S^1 \times M$はcodimension 1のfoliationをもつ.

$\partial M \neq \phi$の時は $S^1 \times \partial M$が. leafの有限個の和になっている。

§3 問題.

まず foliationの存在に関連して次のような問題が上げられる。

1. Mが $(n-q)$-dimension plane field をもてば、codimension q の foliation が作れるか？

特に奇数次元 compact manifold に codimension 1 の foliation が作れるか？ S^{2n+1} についてはどうか？

2. $(n-q)$ dimensional plane field は、いつ foliation 即ち integrable field, に homotopic か？

3. Mが foliation をもつ時 $(n-q)$-dimension plane field は foliation に homotopic か？

1. に関して Lawson は、Milnor の fibration theorem を用いて、次の定理を証明した。

定理〔Lawson[4]〕

S^{2k+3} は codimension 1 の foliation をもつ。$k \geq 1$.

2. と 3. に関して Bott は、curvature form で chern class を表わし、次の結果を得た。

定理 (R. Bott [1])

M oriented manifold. η を $(n-q)$-dim field.

$R^*(\tau_M/\eta)$ を $H^*(M)$ の subring で、τ_M/η

の Pontrjagin class により生成されるものとする。

η が M の foliation に homotopic であると仮定すれば

$R^j(\tau_M/\eta) = 0 \qquad j > 2q.$ である。

特に $\dim M = 3$ の時は、Novikov らにより codimension 1 の foliation の存在は知られている。Wood は次の定理を証明した。

定理（Wood [9]）

M^3 の codim 1 の plane field は foliation に homotopic である。

次に leaf の topology に関連して、

4. S^3 の codim 1 の foliation は compact leaf をもつ。
(Kneser の Conjecture)

5. S^3 の codim 2 の foliation は compact leaf をもつ。
(Seifert conjecture)

6. S^3 に exceptional leaf があるか？

7. M に dense な leaf がある時はいつか？

などの問題が考えられる。

4は Novikov によって、肯定的にとかれた。Novikov の定理は、他の 3-manifold に対しても、Conjecture が正しい

ことを示している。

定理（Novikov [6]）

M^3 : orientable. $S^1\times S^2 \neq M$. Mの universal cover $\tilde{M}$が non-contractible であるとする。この時．Mの codim 1 の foliation は $S^1\times D^2$ の Reeb foliation を含む。

5は未解決の有名な問題である。

6について．最近次のような結果が得~~られ~~られている。

定理（Rosenberg - Roussaire [8]）

M^3 を C^∞-, orientable, closed manifold とする。

M^3 は exceptional leaf をもつ codim 1 の foliation をもつ。

Open manifold 上の foliation の研究については．submersion theory（Gromov - Phillips）が有効である。

定理（Gromov-Phillips）

X を open manifold，$\mathcal{F}$ を M 上の foliation とする。$Tr(X,\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ に transversal な differentiable map 全体とする。この時

$Tr(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi\circ d} Epi(TX, \nu\mathcal{F})$ は weak homotopy equivalence である。（但し．$\nu\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ の

"normal bundle" d は differential, π は $TM \longrightarrow \nu\mathcal{F}$ の projection とする。)

[定義] Γ_q-structure on X とは次のものである。

(0) X は topological space。

X に対して、3対 $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ が存在して次の性質をもつ。

(1) U_i は X の open covering である。

(2) $f_i : U_i \longrightarrow R^q$ は local projection といわれる continuous map である。

(3) γ_{ij} は R^q の C^∞-local diffeomorphism で、$x \in U_i \cap U_j$ の時、次の diagram が commute する。

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & R^q \\ & \searrow^{f_j} & \downarrow \gamma^x_{ji} \\ & & R^q \end{array}$$

x の近傍で commute.

(4) $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ の時、

$\gamma_{ki} = \gamma_{kj} \circ \gamma_{ji}$　　$f_i(x)$ の近傍で。

A. Haefliger は、E. H. Brown の定理を用いて、Γ_q-structure に対して classifying space が存在することを示した。(これを $B\Gamma_q$ とかく。)

さらに Gromov - Phillips の定理を応用して open manifold M 上の foliation の I-homotopy class を次のような形で分類した。

定理（Haefliger [3]）

diagram
$$\begin{tikzcd} & & B\Gamma_q \times BO_{n-q} \arrow[d, "\nu \times id"] \\ M \arrow[urr, "\omega"] \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[drr, "\tau"'] & & BO_q \times BO_{n-q} \arrow[d, "\oplus"] \\ & & BO_n \end{tikzcd}$$
を考える。

M が open manifold の時 codim q の foliation の I-homotopy class は τ の lifting ω の homotopy class に 1:1 に対応する。

従って当然 $B\Gamma_q$ の homotopy type が重要になってくる。

8\. $B\Gamma_q$ の homotopy type を調べよ.

これについての定理としては

定理（Haefliger [3]）

$B\Gamma_q \xrightarrow{\nu} BO_q$ は $q+1$ - connected.

定理（Mather [5]）

$$\pi_2(B\Gamma_1^r) \cong \frac{G^r}{[G^r, G^r]}$$

但し G^r は R^1 の C^r - diffeomorphism で support が

compact のものである。
特に $x=0$ の時 $\pi_2(B\Gamma_1^{\,0})=0$ である。

参考文献

1. R. Bott, On a topological obstruction to integrability, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 16 Amer. Math. Soc. '70.

2. A. Haefliger, Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962), 367–397.

3. ————, Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology 9 (1970), 183 — 194.

4. B. Lawson, Codimension-one Foliations of Spheres, (preprint)

5、J. Mather, Bull. of Amer. Math. Soc. (to appear)

6. S. P. Novikov, The Topology of foliations, Trans. Moscow Math. Soc. 1965, 268–304.

7. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuillétée, Act. Sc. Ind. (1952).

8. Rosenberg.-Roussaire. Les feuilles exceptionelles ne sont pas exceptionelles, Comm. Math. Helv. (1971) 517–523.

9 J. Wood : Foliations on 3-manifolds. Ann. of Math. 89 (1969) 336-358.