

## 制限付線形系の二次評価に対する最適制御の数値解法

九大理学部 伊藤久美子

線形系の最適制御の数値解法には、関数空間で論じたもの (4), (6) 離散系で論じたもの (5), (7) など種々あるが、ここでは制御 (操作量) に制限があり、評価が二次の場合に最大原理を用いて数値解を求める方法について考察する。まず §1 では、最大原理における随伴系の初期値の決定に最急降下法を用いた Lee Markus (1) の方法を適用した。すなわち Lee Markus (1) においては連続系の終端フリー、制御制限なしの場合についての数値解法が示されており、この解法を連続系の制御制限付固定端点問題に適用してニュートン法を用いて改良した。さらに、§2 では §1 の連続系を離散系で表わしてダビドン法を用いて計算時間の短縮を計った。つぎに、§3 では、連続系最小時間問題の場合 Mohler and Moon (4) によりすでに用いられているところの「Bang-Bang 制御の切り換え時間を未知数として方程式を立て解く」方法を拡張して解を求めた。すなわち §2 で求めた近似解により、制御の形を推定でき、従って切換時間に関する方程式がえられるから、この方程式よりニュートン法を用いて高精度の解をうることができた。

## §1 連続系

制御に  $|u_i| \leq 1$ ,  $i=1, \dots, m$  なる制限がある線形制御系が次式で表わされるとする。

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

系について、つぎのような端点条件

$$(2) \quad x(0) = x_*$$

$$(3) \quad x(T) = 0$$

を満足し評価関数

$$(4) \quad C(u) = \int_0^T \|u\|^2 + \|x\|^2 ds$$

を最小化する制御  $u(t)$  を求める問題について考察する。ここで  $x(t)$  は  $n$ 次元状態ベクトル,  $u$  は  $m$ 次元制御(操作)ベクトルであり,  $u_i$  はその成分, また  $A(t)$  は  $C^1$ クラスの  $(n \times n)$ 行列関数,  $B(t)$  は  $C^0$ クラスの行列関数である。

ポントリャーギンの最大原理(参照(2))によれば, 最適制御  $u^*(t)$  は, ハミルトン関数

$$H(t, x, u) = \eta_0 (\|u\|^2 + \|x(t)\|^2) + \eta(t) (A(t)x(t) + B(t)u)$$

を最大にする  $u^*(t)$  が与えられ,

$$(5) \quad u^*(t) = \begin{pmatrix} \text{sat} - \frac{b_1(t)\eta'(t)}{2\eta_0} \\ \vdots \\ \text{sat} - \frac{b_m(t)\eta'(t)}{2\eta_0} \end{pmatrix}$$

となる。ただし  $(\eta_0, \eta(t))$  は後に述べる随伴微分方程式をみたす解で横ベクトル関数  $\eta$  は転置を表わす。(また  $\eta_0 = -1$  とできる。参照(1))。  $b_1(t), \dots, b_m(t)$  は  $B(t)$  の横ベクトルであり、また  $\text{sat}$  とは saturation 関数のことで、実数  $\lambda$  に対し

$$\text{sat } \lambda = \begin{cases} \text{sgn } \lambda & |\lambda| > 1 \\ \lambda & |\lambda| \leq 1 \end{cases}$$

で定義される。この  $\text{sat}$  関数の微分を  $\text{deat}$  で表わすと

$$\text{deat } \lambda = \begin{cases} 0 & |\lambda| > 1 \\ 1 & |\lambda| \leq 1 \end{cases}$$

となる。

つぎに随伴微分方程式について考察しよう。随伴微分方程式

$$(6) \quad \dot{\eta}(t) = -Z^T X(t) - \eta(t) A(t)$$

と(1)式より  $X(t)$  を消去して、(5)式の  $u^*(t)$  を代入すると

$$(7) \quad \dot{\eta}' = A(t)\eta' - \dot{A}(t)\eta' - \dot{A}'(t)\eta' + A(t)A'(t)\eta' + Z^T B(t) \frac{\text{sat}}{2} \frac{B'(t)\eta'(t)}{2}$$

が導かれる。ただし

$$\overline{\text{sat}} \frac{B'(t)\eta'(t)}{2}$$

は (5) 式の右辺を表わす。いま  $\eta(t)$  の  $t=0$  における値  $\eta_*$  を与えたとすれば、方程式 (7) の初期値は、この  $\eta_*$  および

$$\dot{\eta}(0) = 2x'_* - \eta_* A(0)$$

で与えられる。従つて状態変数の初期値  $x_*$  は既知であるから、最適の  $\eta_*$  を求めれば (7) 式より  $\eta(t)$  が求まり最適制御は (5) 式で与えられる。そして最適の  $\eta_*$  の満足する条件は (3) 式により定まる。すなわち、(1) 式の解を考慮すれば (3) 式は

$$(8) \quad 0 = x(T) = \Phi(T)x_* + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) B(s) \overline{\text{sat}} \frac{B'(s)\eta'(s)}{2} ds$$

であるから、この式を満足する  $\eta_*$  を決定することになる。ただし  $\Phi(t)$  は

$$\Phi(0) = E$$

となる

$$(9) \quad \dot{x} = A(t)x$$

の基本行列である。(8) 式を満足する  $\eta_*$  を求める方法として (8) 式に逆行列  $\Phi^{-1}(T)$  をかけると

$$(10) \quad y^2 = \left( x_* + \int_0^T \overline{\Xi^{-1}(s) B(s)} \frac{B'(s) \eta'(s)}{2} ds \right)^2$$

を最小にする  $\eta_*$  を最急降下法やダビットソン法により解く方法、  
または

$$(11) \quad x_* + \int_0^T \overline{\Xi^{-1}(s) B(s)} \frac{B'(s) \eta'(s)}{2} ds = 0$$

をニュートン法で解く方法などがあつた。 いづれの方法にしても (10) 式の  $y$  の  $\eta_*$  に対する偏微分  $\partial y / \partial \eta_*$  を求める必要がある。 これを計算すればつぎのようになる。

$$(12) \quad \frac{\partial y}{\partial \eta_*} = \int_0^T \overline{\Xi^{-1}(s) B(s)} ds \operatorname{at} \left( \frac{B'(s) \eta'(s)}{2} \right) B'(s) \frac{\partial \eta'(s)}{\partial \eta_*} ds$$

ただし

$$\overline{\operatorname{at} \frac{B'(s) \eta'(s)}{2}} = \begin{pmatrix} \operatorname{at} \frac{b_1 \eta'(s)}{2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \operatorname{at} \frac{b_m \eta'(s)}{2} \end{pmatrix}$$

が定義されたものである。 (12) 式の行列  $\frac{\partial \eta'(s)}{\partial \eta_*}$  は、(7) 式のホー  
ー変分方程式

$$(13) \quad \dot{\Sigma} = (A(t) - A'(t)) \Sigma + (A(t) A'(t) - \dot{A}(t)) \Sigma \\ + B(t) \overline{\operatorname{at} \left( \frac{B'(t) \eta'(t)}{2} \right)} B'(t) \Sigma$$

の初期値が  $\Sigma(0) = E_n$ ,  $\dot{\Sigma}(0) = -A(0)$  である解である。 この  
(12) 式の  $\frac{\partial y}{\partial \eta_*}$  を用いて 前述のような方法で  $y=0$  とする  $\eta_*$

を決定する。

しかしながらこの方法においては、(12)式を計算するために(10)式を積分したり、(7)、(13)式の微分方程式を解かねばならないので計算時間の点で問題があると思われる。しかし§3の後半で述べられるような特別の場合には、制御の形がわかっているのですの切り換え時間をニュートン法で解いて、積分を解析的に求めることができる。ただし始めに与えられる $\eta_x$ の初期値が制御の形をくずさないぐらい真の値に近くなければならず、また、計算途中でもその形をくずさない様にしなければならぬ。つぎに述べる離散系による近似法は、このような特別の場合だけでなく一般の場合に適用できる方法である。

## §2. 離散系による近似法

この方法はよく知られているように制御区間を $N$ 等分した小区間上で制御値が一定であると仮定して、 $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ を階段関数で表わして、微分方程式を代数方程式(遷移方程式)におきかえて論じる方法である。

制御系 評価関数は各々(1)、(4)式で表わされ、制御の値が上述の様に区間 $[0, T]$ を $N$ 等分した各小区間 $[\frac{T}{N}k, \frac{T}{N}(k+1)]$   $k=0, \dots, N-1$ 上で一定であると仮定し、その値 $u(k)$ を

$$\bar{u}(k) = u\left(\frac{kT}{N}\right), \quad k=0, \dots, N-1$$

とすれば, つぎのようにして離散系をうることができる。

$$(14) \quad \bar{x}(k) = x\left(\frac{kT}{N}\right),$$

$$(15) \quad \bar{A}(k) = \Phi_R\left(\frac{T}{N}\right),$$

$$(16) \quad \bar{B}(k) = \Phi_R\left(\frac{T}{N}\right) \int_0^{\frac{T}{N}} \Phi_R^T(s) B\left(\frac{kT}{N} + s\right) ds$$

$k=0, \dots, N-1$

とおく。ただし  $\Phi_R(t)$  は

$$(17) \quad \Phi_R(0) = E,$$

$$(18) \quad \dot{\Phi}_R(t) = A\left(t + \frac{kT}{N}\right) \Phi_R(t) \quad k=0, \dots, N-1$$

となる区間  $[0, \frac{T}{N}]$  上の基本行列であり, 従って  $\bar{A}(k)$  は正則であることがわかる。  $u(t)$  に対する仮定とこの (14)~(16) 式により, (1) 式の微分方程式系は

$$(19) \quad \bar{x}(k+1) = \bar{A}(k) \bar{x}(k) + \bar{B}(k) \bar{u}(k)$$

が表わされることがわかる。 また評価は

$$(20) \quad C(\bar{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} (\|\bar{x}(k+1)\|^2 + \|\bar{u}(k)\|^2) \times \frac{T}{N}$$

で近似することにする。

さて, この離散系の場合にも最大原理が成立する(参照(3))。

すなわち随伴方程式

$$(21) \quad q(k) = q(k+1)\bar{A}(k) + 2 \times \frac{I}{N} \times q_0 \bar{x}'(k)$$

$$k = 0, \dots, N-1$$

の,  $q_0 \leq 0$  とはりおよびある  $k$ ,  $0 \leq k \leq N-1$  に対し  $q(k) \neq 0$  となる解  $(q_0, q(k))$  が存在して, つぎの方程式,

$$(22) \quad \frac{I}{N} \times q_0 \|\bar{u}^*(k)\|^2 + q(k+1)\bar{B}(k)\bar{u}^*(k)$$

$$= \max \frac{I}{N} \times q_0 \|\bar{u}(k)\|^2 + q(k+1)\bar{B}(k)\bar{u}(k)$$

$$|\bar{u}^i(k)| \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad k = 0, \dots, N-1$$

をみたす。これより  $\bar{u}^*(k)$  は

$$(23) \quad \bar{u}^*(k) = \text{sat} - \frac{\bar{B}'(k)q(k+1)}{2 \times \frac{I}{N} \times q_0} \quad k = 0, \dots, N-1$$

となる。従って,  $q(0) = q^*$  を未知数として,  $\bar{x}(N) = 0$  と  
なる  $q^*$  を求めればよい。すなわち随伴系

$$(24) \quad q(k+1) = q(k)\bar{A}'(k) - 2 \times \frac{I}{N} \times q_0 \bar{x}'(k)\bar{A}'(k)$$

および系の遷移方程式



$$(25) \quad \bar{x}(k+1) = \bar{A}(k)\bar{x}(k) + \bar{B}(k) \text{sat} - \frac{\bar{B}(k)q'(k-1)}{2 \times \frac{T}{N} \times q_0}$$

$$k = 0, \dots, N-1$$

において、最後の出力  $\bar{x}(N)$  が 0 となる  $q_*$  を求めればよい。  
 これをダビットン法やニュートン法で解く場合  $\bar{x}(N)$  の  $q_*$  に関する偏微分行列が必要であるが、これも (24), (25) を  $q_*$  について偏微分して逐次的に一つづつ与えられる。

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial q_*}(0) = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial q_*}(0) = E$$

なる初期値をとり、逐次式

$$(26) \quad \frac{\partial q}{\partial q_*}(k+1) = \frac{\partial q}{\partial q_*}(k) \bar{A}^{-1}(k) - 2 \times \frac{T}{N} \times q_0 \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_*}(k) \bar{A}^{-1}(k),$$

$$(27) \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_*}(k+1) = \bar{A}(k) \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_*}(k) + \bar{B}(k) \left( \text{sat} - \frac{\bar{B}(k)q'(k+1)}{2 \times \frac{T}{N} \times q_0} \right) - \frac{\bar{B}(k)}{2 \times \frac{T}{N} \times q_0} \\ \times \frac{\partial q'}{\partial q_*}(k+1)$$

を交互に計算し、出力  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial q_*}(N)$  が  $\bar{x}(N)$  の  $q_*$  に関する偏微分である。 1.1.1

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - \frac{B'(k)q'(k+1)}{2q_0} = \begin{pmatrix} d\bar{x} - \frac{b_1(k)q'(k+1)}{2q_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d\bar{x} - \frac{b_m(k)q'(k+1)}{2q_0} \end{pmatrix}$$

で定義し,  $b_1(k), \dots, b_m(k)$  は  $B'(k)$  の横ベクトルである。この (26), (27) 式より与えられた  $\frac{\partial \bar{x}(N)}{\partial q_*}$  を用いて, 例えばニュートン法の場合には

$$q_*^{i+1} = q_*^i - \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_*}(N) \right)_{q_* = q_*^i}^{-1} \bar{x}(N)_{q_* = q_*^i}$$

とすればよい。

### § 3. 切り変え時間法

この方法は制御系 (1) の行列  $A(t)$ ,  $B(t)$  が定数行列であり, 評価関数 (4) の  $\|x\|^2$  の項がないと  $\bar{x}$  のみ積分が解析的に計算されるため, 数値解をより容易にうることができる。まず一般の場合を説明し, つぎに定数係数行列の場合の非線形連立方程式を導く。

つぎのことはベクトル制御  $u(t)$  についても成立するが簡単のためスカラー制御  $u(t)$  であると仮定する。制御系 (1) は,  $n$  次元ベクトル  $b(t)$  に対して

$$B(t) = b(t)$$

とおまかえれば,

$$(28) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u(t)$$

と書き換えられる。§1において詳述したように最適制御は(5)式の形である。したがって、その具体的な形をつぎのように仮定することができる。

$$(29) \quad u(t) = 1 \quad 0 = t_1 \leq t \leq t_2, \quad t_{4k+1} \leq t \leq t_{4k+2}$$

$$(30) \quad u(t) = \frac{b'(t)\eta'(t)}{2} \quad t_2 \leq t \leq t_3, \quad t_{4k} \leq t \leq t_{4k+1}$$

$$(31) \quad u(t) = -1 \quad t_{4k-1} \leq t \leq t_{4k}$$

$$k = 1, \dots, p.$$

すなわち(29)式の $t$ に対しては,

$$\frac{b'(t)\eta'(t)}{2} \geq 1$$

(30)式の $t$ に対しては,

$$\left| \frac{b'(t)\eta'(t)}{2} \right| \leq 1$$

(31)式の $t$ に対しては,

$$\frac{b'(t)\eta'(t)}{2} \leq -1$$

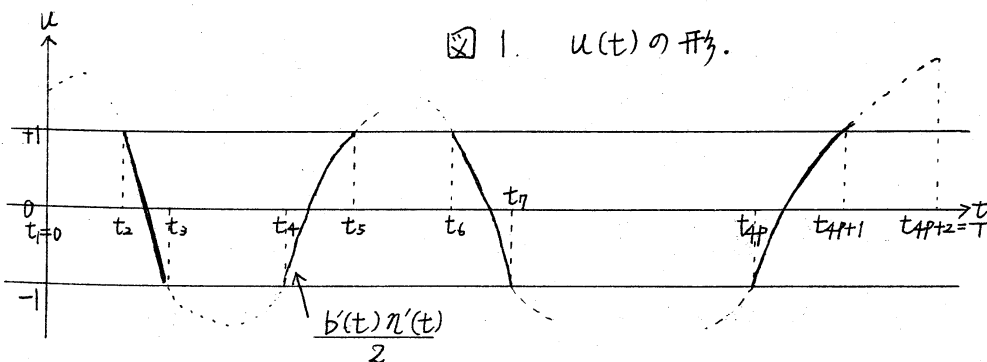
をみたしている場合に相当する(図1参照)。このような時

間  $t_l$ ,  $l=1, \dots, 4p+2$  と  $\eta_*$  に対しては §1 の (8) 式より,  $\rightarrow$   
 ズの方程式が導かれる.

$$(32) \quad \frac{b' \eta'(t_l)}{2} = 1 \quad \begin{array}{l} l=2, 4k+1, 4k+2, 4p+1 \\ k=1, \dots, p-1 \end{array}$$

$$\frac{b' \eta'(t_l)}{2} = -1 \quad \begin{array}{l} l=4k-1, 4k \\ k=1, \dots, p \end{array}$$

$$(33) \quad \begin{aligned} & x_* + \int_0^{t_2} \Phi^{-1}(s) b(s) ds + \int_{t_2}^{t_3} \frac{1}{2} \Phi^{-1}(s) b(s) b'(s) \eta'(s) ds \\ & + \sum_{k=1}^p \int_{t_{4k-1}}^{t_{4k}} \Phi^{-1}(s) b(s) (-1) ds \\ & + \sum_{k=1}^p \int_{t_{4k}}^{t_{4k+1}} \frac{1}{2} \Phi^{-1}(s) b(s) b'(s) \eta'(s) ds \\ & + \sum_{k=1}^p \int_{t_{4k+1}}^{t_{4k+2}} \Phi^{-1}(s) b(s) ds \\ & = 0 \end{aligned}$$



したがって方程式 (7), (32) 式, (33) 式をみたす  $t_2, \dots, t_{4p+2}$ ,  $\eta_*$  を求めればよいことになる。ニュートン法で解く場合 (32) 式, (33) 式の  $t_2, \dots, t_{4p+2}$ ,  $\eta_*$  に関する偏微分の式が必要である。これは §1 の方程式 (7), (13) の解を用いたつぎのように表わされる。

$$(34) \quad \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} 4p \\ \vdots \\ n \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{4p} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_n \end{array}$$

$$A_1 = \text{diag} \left( \frac{b' \eta'(t_{i+1})}{2} \right),$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} |b_1' \\ |b_2' \\ \vdots \\ |b_{4p}' \end{pmatrix}, \quad |b_i' = b'(t_{i+1}) \frac{\partial \eta'}{\partial \eta_*}(t_{i+1})$$

$$C_1 = (C_1, \dots, C_{4p}), \quad C_i = \Phi^T(t_{i+1}) b(t_{i+1}) - \Phi^T(t_{i+1}) b(t_{i+1}) \frac{b(t_{i+1}) \eta'(t_{i+1})}{2}$$

$$D_1 = \left( \int_{t_2}^{t_3} + \sum_{k=1}^2 \int_{t_{4k}}^{t_{4k+1}} \right) \left( \frac{1}{2} \Phi^T(s) b(s) b'(s) \frac{\partial \eta'(s)}{\partial \eta_*} \right) ds$$

$|b_i'$  :  $n$ -横ベクトル

$C_i$  :  $n$ -たてベクトル  $i = 1, \dots, 4p$ .

しかしながら方程式(7), (13) 式(33), (34) からわかるようにこの計算には数値積分および微分方程式の数値解が必要であり計算時間の点で問題があるので、その点を考慮した簡単な場合をつぎに考察しよう。いま制御系が

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

評価関数が

$$C(u) = \int_0^T \|u\|^2 ds$$

であらわされるとする。この場合には随伴方程式が

$$\dot{\eta} = -\eta A$$

と簡単になり、最適制御

$$(35) \quad u(t) = \text{sat} \frac{b'e^{-A't}\eta_*}{z}$$

が  $\eta_*$  の陽の関数として求まる。したがって(32)式, (33)式, (34)式に(35)式を代入するとつぎのようになる。

$$(36) \quad \frac{b'e^{-A't}\eta_*}{z} = 1, \quad \begin{array}{l} l=2, 4k+1, 4k+2, 4p+1 \\ k=1, \dots, p-1 \end{array}$$

$$\frac{b'e^{-A't}\eta_*}{z} = -1, \quad \begin{array}{l} l=4k-1, 4k \\ k=1, \dots, p \end{array}$$

$$(37) \quad \lambda_* + \int_0^{t_2} e^{-A_0 s} b ds + \int_{t_2}^{t_3} \frac{1}{z} e^{-A_0 s} b e^{-A_0 s} \eta_* ds$$

$$+ \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-As} b(-i) ds$$

$$+ \sum_{k=1}^p \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{2} e^{-As} b b' e^{-A's} \eta'_* ds$$

$$+ \sum_{k=1}^p \int_{t_{2k+1}}^{t_{4k+2}} e^{-As} b ds = 0$$

$$(38) \quad \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{4p} \\ \underbrace{\hspace{10em}}^n \end{array} \right\} \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \end{array},$$

$$A_2 = \text{diag} \left( -\frac{b'A'e^{-A't_{i+1}}\eta'_*}{2} \right),$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} |b'_1 \\ |b'_2 \\ \vdots \\ |b'_{4p} \end{pmatrix}, \quad |b'_i = \frac{b'e^{-A't_{i+1}}}{2}$$

$$C_2 = (C_1 \dots C_{4p}),$$

$$C_i = e^{-At_{i+1}} b - e^{-At_{i+1}} b \frac{b'e^{-A't_{i+1}}\eta'_*}{2},$$

$$D_2 = \left( \int_{t_0}^{t_1} + \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \right) \left( \frac{1}{2} e^{-A's} b b' e^{-A's} ds \right)$$

つぎに式(37), (38)内の積分を解析的に求めよう。行列  $J$  を行列  $(-A)$  のジョルダン形とし, その変換正則行列を  $P$  とする。そうすれば行列  $e^{tJ}$ , 行列  $e^{tJ} C e^{tJ}$  はつぎのようになる。

$$(39) \quad e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & & & \\ & e^{tJ_1} & & \\ & & 0 & \\ & & & e^{tJ_3} \\ & 0 & & & \end{bmatrix},$$

右辺の対角線上の小行列のうち, 小行列  $e^{tJ_0}$  は

$$(40) \quad e^{tJ_0} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & 0 & & & e^{t\lambda_r} \end{bmatrix}$$

残りの小行列は

$$(41) \quad e^{tJ_r} = e^{t\lambda_r + i} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$



である。ここで  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{r+s}$  は  $(-A)$  の固有値である。つまりに行列  $e^{tJ} C e^{tJ'}$  は

$$(42) \quad e^{tJ} C e^{tJ'} = \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{00} & \dots & C_{0s} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s0} & \dots & C_{ss} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{tJ_0} C_{00} e^{tJ_0'} & \dots & e^{tJ_0} C_{0s} e^{tJ_s'} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{tJ_s} C_{s0} e^{tJ_0'} & \dots & e^{tJ_s} C_{ss} e^{tJ_s'} \end{bmatrix}$$

となる。に  $k \leq J_0$  を含む各小行列は

$$(43) \quad e^{tJ_0} C_{0j} e^{tJ_j'} = e^{\lambda_j t} \begin{bmatrix} e^{\lambda_j t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_j t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1r_j} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r_j 1} & \dots & C_{r_j r_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & \\ \frac{t^{r_j-1}}{(r_j-1)!} & & 1 \end{bmatrix}$$

$J_0$  を含まない小行列は

$$(44) \quad e^{tJ_0} C_{ij} e^{tJ_j} = e^{(\lambda_i + i + \lambda_j + j)t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_j-2}}{(r_j-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r_1} & \cdots & C_{r_j} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{t^{r_j-1}}{(r_j-1)!} & \frac{t^{r_j-2}}{(r_j-2)!} & & 1 \end{pmatrix}$$

である。行列 (43) と、行列 (44) の成分を計算すると各々

$$(45) \quad \bar{C}(m, n) = \sum_{l=1}^{r_j} e^{(\lambda_m + \lambda_j + j)t} C_{ml} \frac{t^{l-1}}{l!},$$

$$(46) \quad \bar{C}(m, n) = \sum_{l=1}^{r_j} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{C_{kl} Q(m, k) Q(n, l) t^{k-m+l-n}}{(k-m)! (l-n)!} e^{(\lambda_i + i + \lambda_j + j)t}$$

となる。ここで  $Q(i, j)$  は

$$Q(i, j) = \begin{cases} 0 & i > j \\ 1 & i \leq j \end{cases} \quad i, j : \text{自然数}$$

である。式 (41), (45), (46) よりわかるように行列 (39), (42) の成分の積分は  $\int_a^b s^m e^{cs} ds$  なる形を繰り返すので

の式から解析的に求められる:

$$(47) \quad \int_a^b s^m e^{cs} ds = \sum_{i=1}^m \frac{s^{m-i}}{c^{i+1}} \frac{m!}{(m-i)!} (e^{cb} - e^{ca}),$$

$c$ : 定数,  $m$ : 非負整数.

したがって, ジョルダン形を用いた (39) 式, (40) 式の行列積分に定数行列をかけたもとの行列になおす。すなわち (37) 式の 2 項, 4 項の被積分行列の,

$$(48) \quad e^{-As} = p e^{J\lambda p^{-1}}$$

また (37) 式の 3 項, 5 項, (38) 式の被積分行列の

$$(49) \quad e^{-As} b b' e^{-As} = p e^{J\lambda p^{-1}} b b' p^{-1} e^{J\lambda p}$$

なる関係を用いれば解析的に (37) 式, (38) 式の積分が求まる。

#### § 4. 計算結果

例 1. 二次元連続系

$$(50) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + u(t) \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u(t), \end{aligned}$$

に対し, 端点条件

$$(51) \quad \begin{aligned} x_1(0) &= -4.0611647 \\ x_2(0) &= -1.5047253 \\ x_1(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_2(1) = 0$$

をみだし評価

$$(52) \quad C(u) = \int_0^1 u^2(t) dt$$

を最小にする区分的に連続な一次元制御  $u(t)$  を求めよう。

ここではすでに真値がわかったものを計算してみた。すなわち

$$t_1 = 0.3$$

$$t_2 = 0.6$$

$$\eta_{1*} = 3.5997366$$

$$\eta_{2*} = -5.9567593$$

が真の答えであるが、真値にどのくらい近づいたかは表1が示され、その誤差は  $x(t)$  の0にどのくらい近づいたか、すなわち  $\|x(t)\|^2$  が示される(表2)。ただし  $t_1, t_2$  は  $\text{sat}$  関数の切り替え時間である。

(a) 連続系の場合

§1の方法にそって考察すれば、最適制御は、

$$(53) \quad u^*(t) = \text{sat} \frac{e^{3t}\eta_{1*} + e^{2t}\eta_{2*}}{2}$$

であるから、(50)式に代入し、(51)式の端点条件を考慮すればつぎの二つの式

$$(54) \quad x_1^* + \int_0^1 e^{3\lambda s} ds \frac{e^{3\lambda} \eta_{1*} + e^{2\lambda} \eta_{2*}}{2} = 0$$

$$x_2^* + \int_0^1 e^{2\lambda s} ds \frac{e^{3\lambda} \eta_{1*} + e^{2\lambda} \eta_{2*}}{2} = 0$$

をうる。したがって、この2つの式を同時に満足する  $\eta_{1*}$ ,  $\eta_{2*}$  を求める問題に帰着する。そこで (54) 式の左辺を成分とするベクトルを  $y$  とおけば  $\eta_{1*}$ ,  $\eta_{2*}$  に対する偏微分行列  $\frac{\partial y}{\partial \eta_*}$  は

$$(55) \quad \frac{\partial y}{\partial \eta_*} = \begin{pmatrix} \int_0^1 e^{2\lambda s} ds \frac{e^{3\lambda} \eta_{1*} + e^{2\lambda} \eta_{2*}}{2}, \int_0^1 e^{(2\lambda)s} ds \frac{e^{3\lambda} \eta_{1*} + e^{2\lambda} \eta_{2*}}{2} \\ \int_0^1 e^{(2\lambda)s} ds \frac{e^{3\lambda} \eta_{1*} + e^{2\lambda} \eta_{2*}}{2}, \int_0^1 e^{2\lambda s} ds \frac{e^{3\lambda} \eta_{1*} + e^{2\lambda} \eta_{2*}}{2} \end{pmatrix}$$

となる。また最適制御の形は

$$u(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{e^{3t} \eta_{1*} + e^{2t} \eta_{2*}}{2} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ +1 & t_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

なる形をしていることが経験的にわかっている (図2参照)。したがって

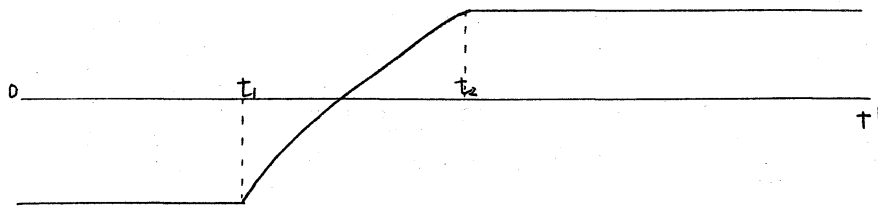
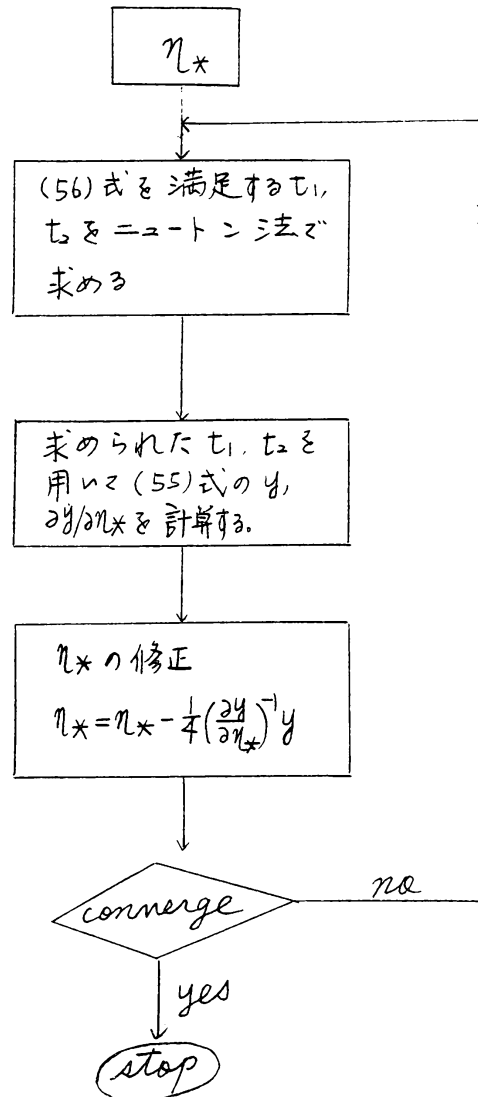


図 2. 最適制御の形

$$(56) \quad \frac{e^{3t_1} \eta_{1*} + e^{2t_1} \eta_{1*}}{z} = -1,$$

$$\frac{e^{3t_2} \eta_{1*} + e^{2t_2} \eta_{2*}}{z} = 1$$

を満足する  $t_1, t_2$  を求めれば, (55) 式の  $\partial y / \partial \eta_*$  の各値が計算できる。したがってマフマのような手順で計算される。



ただし、上で述べた  $t_1, t_2$  を計算する部分は本質的なものでなく、(55)式の計算を再帰よく処理するためのものである。計算結果は表およびグラフに示す。また真値は始めに示した通りである。

### (b) 離散系による解

§2において述べたように離散化した場合には、系は時間

区間  $[0, 1]$  を 100 等分するとすれば

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-0.03} & 0 \\ 0 & e^{-0.02} \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-0.03}}{-3} \\ \frac{1-e^{-0.02}}{-2} \end{bmatrix} \bar{u}(k)$$

であり、評価は

$$\sum_{k=0}^{99} u(k)^2 \times 0.01$$

として解を計算する。結果は表、グラフに示す。

### (c) 切り換え時間法

§3 においてのべたように、この場合制御の形が知られているから、 $t_1, t_2$  または  $e^{t_1} = X, e^{t_2} = Y$  を未知数として直接  $t_1, t_2$  または  $X, Y$  を計算する方法である。すなわち

(56) 式、(54) 式を計算すれば、

$$X^3 \eta_{1*} + X^2 \eta_{1*} = -2$$

$$Y^3 \eta_{1*} + Y^2 \eta_{2*} = 2$$

$$4.0611647 + (X^3 - 1)/3 + 0.5 \{ (Y^6 - X^6) \eta_{1*}/6 + (Y^5 - X^5) \eta_{2*}/5 \} + (Y^3 - e^3)/3 = 0$$

$$1.5047253 + (X^2 - 1)/2 + 0.5 \{ (Y^5 - X^5) \eta_{1*}/5 + (Y^4 - X^4) \eta_{2*}/4 \} + (Y^2 - e^2)/2 = 0$$

となるから、この連立方程式をニュートン法により計算する



結果は表，グラフに示す。

表1.  $\eta_1^*$ ,  $\eta_2^*$  を比べる

真値は

$$\eta_1^* = 0.25997366 \times 10$$

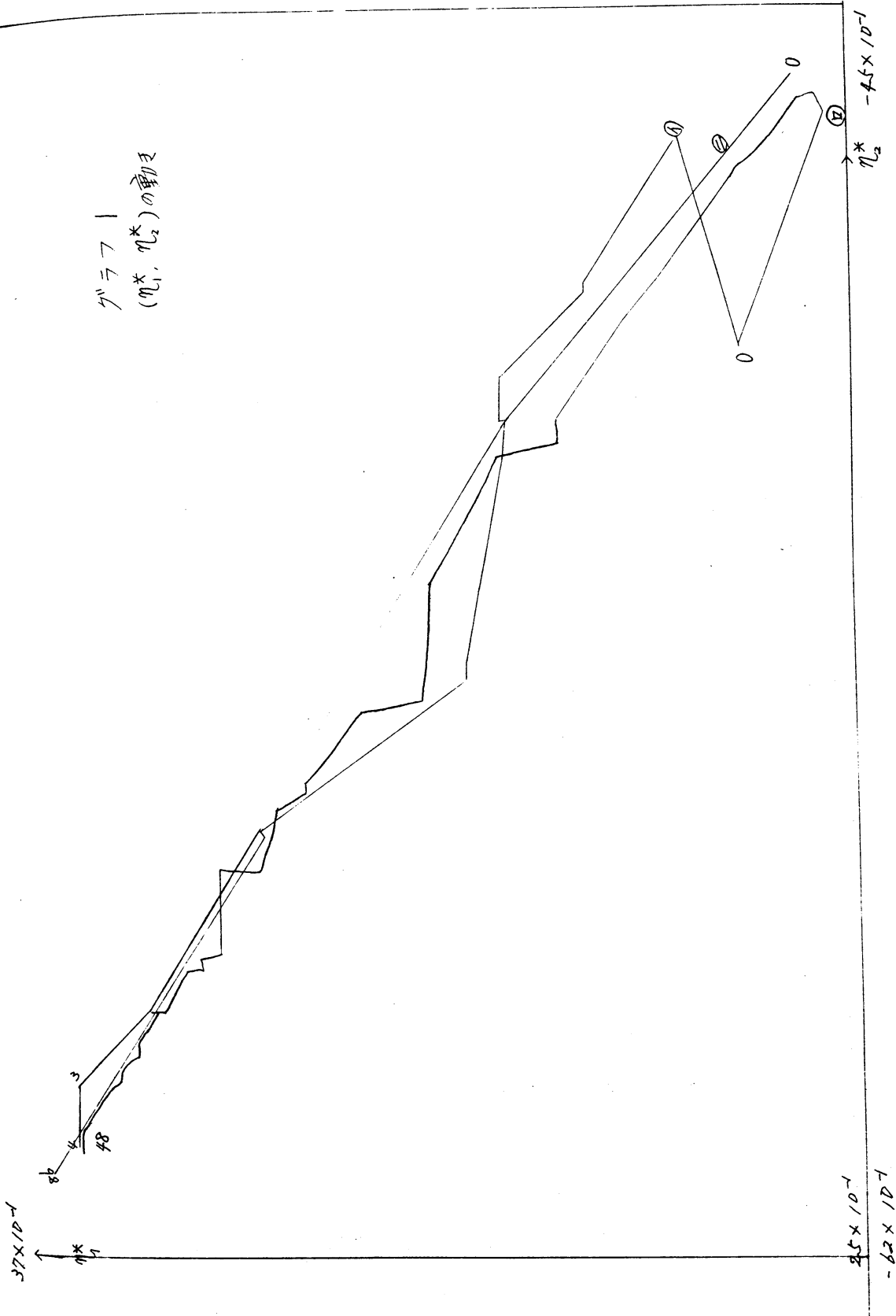
$$\eta_2^* = -0.59567393 \times 10$$

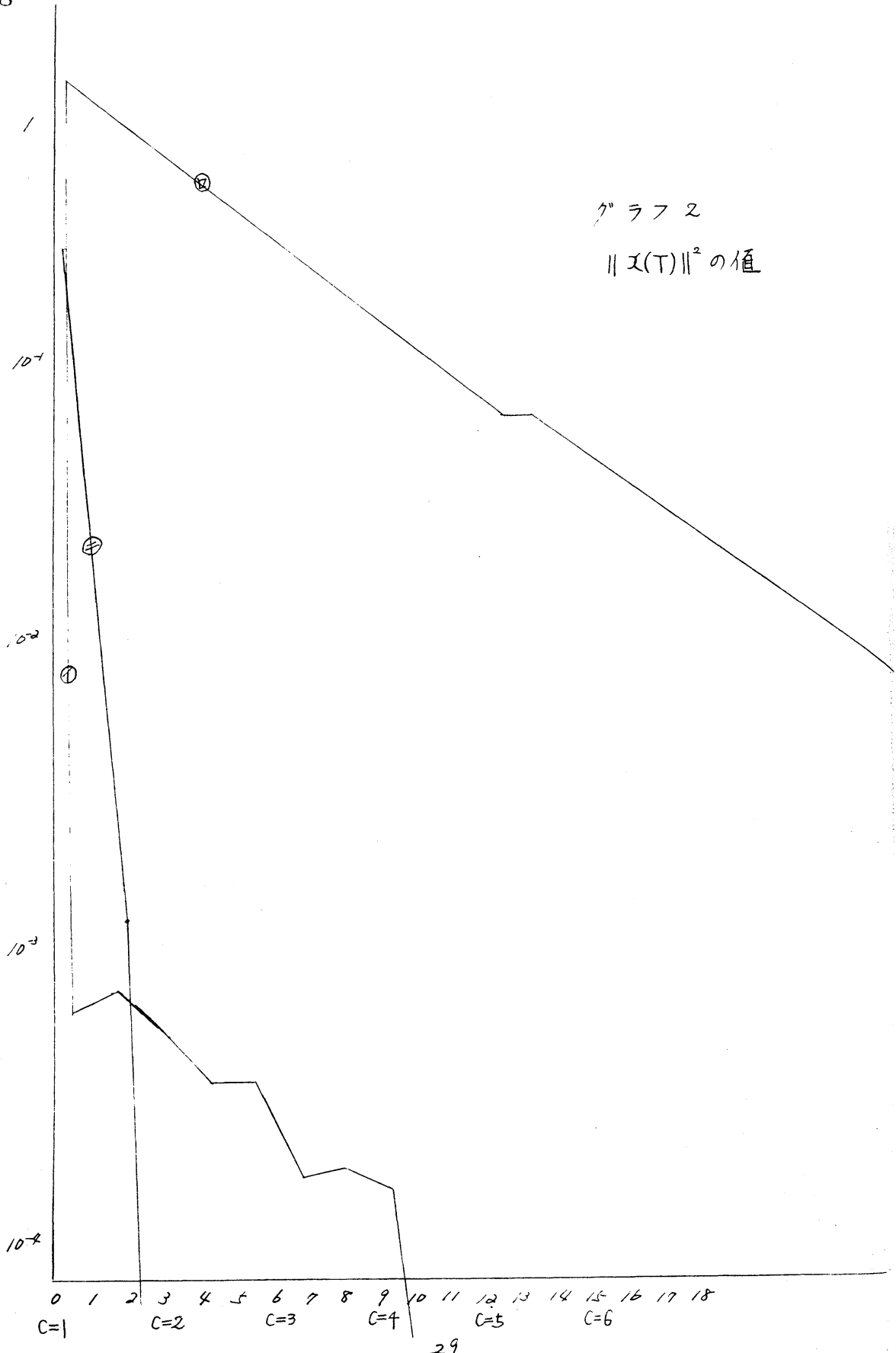
㊸ 1 連続系			㊸ 2 離散系			㊸ 3 切り変え時間法			
回	$\eta_1^*$	$\eta_2^*$	C	I	$\eta_1^*$	$\eta_2^*$	回	$\eta_1^*$	$\eta_2^*$
0	0.2667508 × 10	-0.4876987 × 10	1	0	0.266675 × 10	-0.4876983 × 10	0	0.257 × 10	-0.449 × 10
1	0.255 × 10	-0.462 × 10		1	0.2739430 × 10	-0.4577720 × 10	1	0.301 × 10	-0.506 × 10
2	0.253 × 10	-0.453 × 10		2	0.2739352 × 10	-0.4578228 × 10	2	0.350 × 10	-0.582 × 10
3	0.254 × 10	-0.451 × 10	2	3	0.2818908 × 10	-0.4782656 × 10	3	0.359 × 10	-0.594 × 10
4	0.256 × 10	-0.453 × 10		1	0.2874782 × 10	-0.4791515 × 10	4	0.25997366 × 10	-0.59567393 × 10
8	0.276 × 10	-0.476 × 10		2	0.2925143 × 10	-0.4962212 × 10	5	0.25997668 × 10	-0.59568570 × 10
10	0.297 × 10	-0.505 × 10	3	3	0.2984994 × 10	-0.4963918 × 10	6	"	"
16	0.317 × 10	-0.532 × 10		1	0.299 × 10	-0.497 × 10	7	"	"
20	0.331 × 10	-0.553 × 10		2	0.321 × 10	-0.532 × 10	8	"	"
24	0.342 × 10	-0.569 × 10	4	3	0.321 × 10	-0.533 × 10	9	"	"
28	0.349 × 10	-0.579 × 10		1	0.333 × 10	-0.533 × 10	10	0.25997657 × 10	-0.59568088 × 10
32	0.353 × 10	-0.586 × 10		2	0.334 × 10	-0.533 × 10	11	"	"
36	0.359 × 10	-0.589 × 10	5	3	0.333 × 10	-0.533 × 10	12	"	"
40	0.358 × 10	-0.590 × 10		1	0.333 × 10	-0.533 × 10	13	"	"
44	0.358 × 10	-0.594 × 10		2	0.334 × 10	-0.533 × 10	14	"	"
48	0.359 × 10	-0.594 × 10	6	3	0.367 × 10	-0.607 × 10	15	"	"
52	0.359 × 10	-0.595 × 10		1	0.367 × 10	-0.607 × 10	16	"	"
56	0.359 × 10	-0.595 × 10		2	0.367 × 10	-0.607 × 10	17	"	"
60	0.25981060 × 10	-0.59543310 × 10	7	3	0.367 × 10	-0.607 × 10	18	"	"
64	0.25982255 × 10	-0.59553763 × 10		1	0.367256 × 10	-0.607509 × 10	19	"	"
68	0.2599183 × 10	-0.59559526 × 10		2			20		
72	0.25994191 × 10	-0.5956282 × 10	8	3			21		
76	0.25995735 × 10	-0.59565207 × 10		1			22		
80	0.2599658 × 10	-0.59566425 × 10		2			23		

表2  $\|x(t)\|^2$  の値 係数 0.25

回	① 連続系			C	I	② 離散系			回	③ 切り変え時間法		
0	0.143	x	10	1	0	0.143	x	10	0	0.301	x	10
1	0.108	x	10		1	0.611	x	10 <sup>-5</sup>	1	0.182	x	10 <sup>-1</sup>
2	0.836				2	0.6774	x	10 <sup>-5</sup>	2	0.210	x	10 <sup>-2</sup>
3	0.636			2	3	0.538	x	10 <sup>-5</sup>	3	0.317	x	10 <sup>-3</sup>
4	0.488			1		0.345	x	10 <sup>-5</sup>	4	0.634	x	10 <sup>-10</sup>
8	0.376				2	0.376	x	10 <sup>-5</sup>	5	0.194	x	10 <sup>-12</sup>
12	0.289			3	3	0.131	x	10 <sup>-5</sup>	5	0.184	x	10 <sup>-12</sup>
16	0.231	x	10 <sup>-1</sup>		1	0.168	x	10 <sup>-5</sup>	7	0.563	x	10 <sup>-10</sup>
20	0.740	x	10 <sup>-2</sup>		2	0.144	x	10 <sup>-5</sup>	8	0.126	x	10 <sup>-12</sup>
24	0.257	x	10 <sup>-2</sup>	4	3	0.274	x	10 <sup>-6</sup>	9	0.117	x	10 <sup>-12</sup>
28	0.888	x	10 <sup>-3</sup>		1	0.528	x	10 <sup>-6</sup>	10	0.199	x	10 <sup>-14</sup>
32	0.306	x	10 <sup>-3</sup>		2	0.477	x	10 <sup>-6</sup>	11			
36	0.105	x	10 <sup>-3</sup>	5	3	0.145	x	10 <sup>-6</sup>	12			
40	0.363	x	10 <sup>-2</sup>		1	0.320	x	10 <sup>-6</sup>	13			
44	0.125	x	10 <sup>-4</sup>		2	0.197	x	10 <sup>-6</sup>	14			
48	0.429	x	10 <sup>-5</sup>	6	3	0.920	x	10 <sup>-8</sup>	15			
52	0.147	x	10 <sup>-5</sup>		1	0.738	x	10 <sup>-10</sup>	16			
56	0.508	x	10 <sup>-6</sup>		2	0.712	x	10 <sup>-10</sup>	17			
60	0.173	x	10 <sup>-6</sup>	7	3	0.557	x	10 <sup>-10</sup>	18			
64	0.6	x	10 <sup>-7</sup>		1	0.721	x	10 <sup>-10</sup>	19			
68	0.205	x	10 <sup>-7</sup>						20			
72	0.72	x	10 <sup>-8</sup>						21			
76	0.24	x	10 <sup>-8</sup>						22			
80	0.83	x	10 <sup>-9</sup>						23			

グラフ |  
( $\eta_1^*$ ,  $\eta_2^*$ )の動き





例2 制御系が

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + u$$

$$x_1(0) = -0.3741433 \times 10$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$x_2(0) = -0.1407899 \times 10$$

$$x_1(1) = 0$$

$$x_2(1) = 0$$

が評価関数が

$$C(u) = \int_0^1 (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|u\|^2) dt$$

であるものを §2 の方法で求める。 ここではその真値が分

っているものについて計算した。 すなわち

$$q_{1*} = 0.402152918 \times 10$$

$$q_{2*} = -0.4166132852 \times 10$$

である。 結果は下記の表、グラフに示す。

例2  $\int_0^1 \|x\|^2 + \|u\|^2 = \min.$

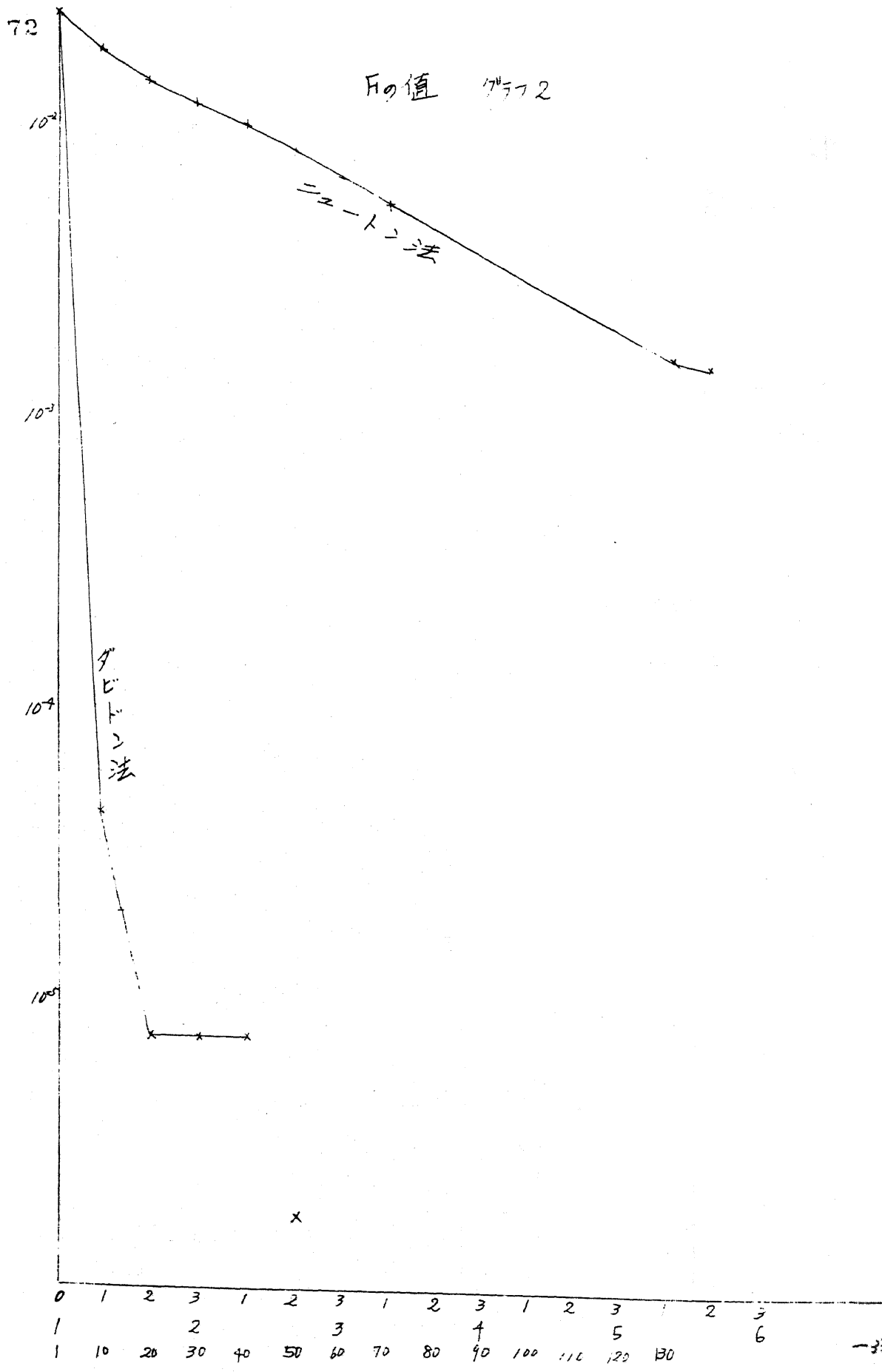
ニュートン法 (係数 0.01)			グビットン法			
回	$g_{1x}$	$g_{2x}$	回	I	$g_{1x}$	$g_{2x}$
1	$0.50 \times 10$	$-0.50 \times 10$	1	0	$0.5 \times 10$	$-0.5 \times 10$
10	$0.46072 \times 10$	$-0.45172 \times 10$	1		$0.4688 \times 10$	$-0.5214 \times 10$
20	$0.435562 \times 10$	$-0.4219525 \times 10$	2		$0.46891 \times 10$	$-0.52204 \times 10$
30	$0.420622 \times 10$	$-0.4054073 \times 10$	2	3	$0.4689 \times 10$	$-0.52202 \times 10$
40	$0.411504 \times 10$	$-0.396258 \times 10$	1		$0.4688 \times 10$	$-0.52202 \times 10$
50	$0.405562 \times 10$	$-0.3913074 \times 10$	2		$0.42916 \times 10$	$-0.4597 \times 10$
60	$0.40169617 \times 10$	$-0.38880349 \times 10$	3	3	$0.4201 \times 10$	$-0.4451 \times 10$
70	$0.39906712 \times 10$	$-0.38773234 \times 10$	1		$0.42009 \times 10$	$-0.44519 \times 10$
			2		$0.4041 \times 10$	$-0.4198 \times 10$
			4	3	$0.4039 \times 10$	$-0.4195 \times 10$
			1		$0.4039 \times 10$	$-0.4195 \times 10$
			2		$0.4021 \times 10$	$-0.4166 \times 10$
			5	3		
130	$0.39601435 \times 10$	$-0.3944115 \times 10$	1			
138	$0.39608642 \times 10$	$-0.3955732 \times 10$	2			
			6	3		
			1			
			2			
			7	3	$0.40215292 \times 10$	$-0.4166329 \times 10$

例2

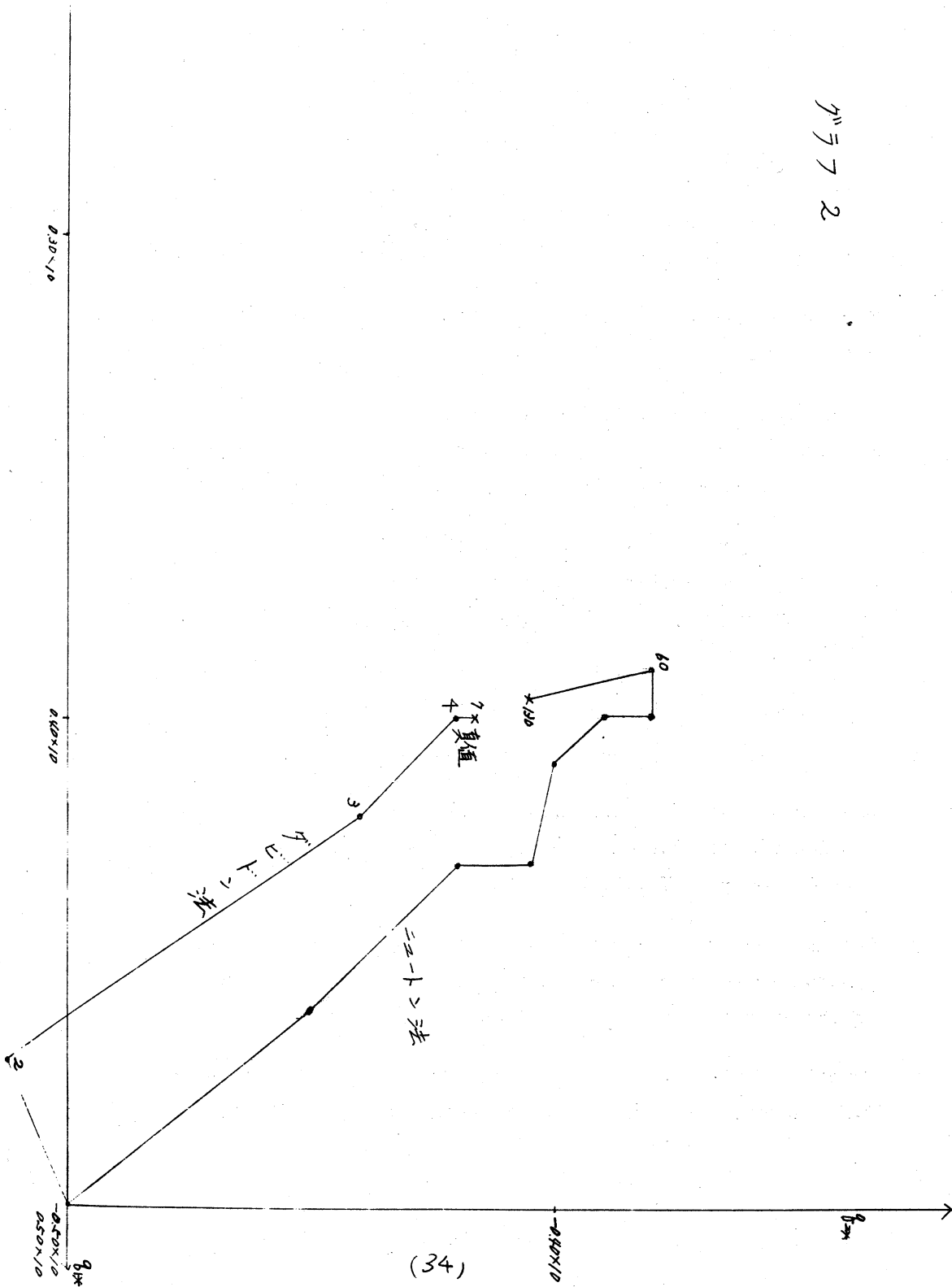
Fの値

回	ニュートン法	回	ダビドン法
C		C I	
1	$0.2052 \times 10^{-1}$	1 0	$0.20525097 \times 10^{-1}$
10	$0.1707 \times 10^{-1}$	1	$0.4309 \times 10^{-4}$
20	$0.1392 \times 10^{-1}$	2	$0.7638 \times 10^{-5}$
30	$0.1138 \times 10^{-1}$	2 3	$0.7633 \times 10^{-5}$
40	$0.931104 \times 10^{-2}$	1	$0.76334 \times 10^{-5}$
50	$0.7615 \times 10^{-2}$	2	$0.1857 \times 10^{-5}$
60	$0.622714 \times 10^{-2}$	3 3	$0.7606 \times 10^{-6}$
70	$0.50874696 \times 10^{-2}$	1	$0.64901 \times 10^{-6}$
		2	$0.1317 \times 10^{-7}$
		4 3	$0.77637 \times 10^{-8}$
		1	$0.7696 \times 10^{-8}$
		2	$0.61311 \times 10^{-25}$
		5 3	⋮
		1	⋮
130	$0.15533573 \times 10^{-2}$	2	⋮
138	$0.13013383 \times 10^{-2}$	6 3	⋮
		1	⋮
		2	⋮
		7 3	$0.1893 \times 10^{-30}$





グラフ 2



## 参 考 文 献

1. Foundations of Optimal Control Theory,  
E.B. Lee and L. Markus pp. 512-513, New York ; Wiley 1966.
2. The Mathematical Theory of Optimal Processes,  
Pontryagin, L. et al, Interscience Publishers Inc., New York, 1962.
3. Discrete Linear Optimal Systems with Essentially Quadratic Cost  
Functionals Dong Hak Chyung, Jee Transactions on Automatic Control,  
Vol.AC-11, No.3, July, 1966.
4. Computation of Optimal Trajectories for a class of Nonlinear Control  
Processes R.R. Mohler and S.F. Moon, Preprints of papers for IFAC  
Kyoto Symposium on Systems Engineering Approach to Computer Control  
2-1 (1970).
5. An On Line Solution to Sampled-Data Time Optimal Control,  
Eaton J.H., J. Electron. Control, 15, No. 4, 333-341, 1963.
6. Davidon's Method for Minimization Problems in Hilbert Space with  
Application to Control Theory, H. Tokumaru, N. Adachi, K. Goto,  
SIAM J. Control, Vol.8, No.2, May 1970.
7. Optimal Control of the Discrete Linear System with the Bounded  
Controller and the Quadratic Cost Function. T. Itoh, the Journal  
of the Institute of electrical engineers. 1971 to appear.
8. Function Minimization by Conjugate Gradients, R. Fletcher and  
C.M. Reeves, Computer J., Vol.7, No.2, pp.149-154 (1964).