数理解析研究所講究録
129巻 1971年 174-182

多項式処理プログラム

日本原子力研　石黒美佐子

ここで扱うのは、すべて整係数の多項式である。係数は、桁数に制限をおかないので、有理係数多項式への拡張も可能である。無限長整数演算プログラムJUPIA（JAERI Unrestricted Precision Integer Arithmetic）によって係数の演算を行っている。

1. 整数の内部表現

Mを0でない$(m+1)$－Precision の整数とし、次のように表現する。

$$M=\sum_{i=0}^{m}(\sigma\alpha_i)B^i$$

σ；　Mの符号で＋または－

B；　2^{35}（計算機の1語のビット数に依存する）

α_i；　$0\leqq\alpha_i<B$ の整数，$a_m\neq 0$

メモリ上は，$(\sigma\alpha_0,\sigma\alpha_1,\text{-----},\sigma\alpha_m)$ と表現する。

2. 多項式の表現

整係数多項式　$P(X_1,X_2,\text{----},X_r)$ は

$$P(X_1,X_2,\text{----},X_r)=\sum_{i=1}^{n}a_i X_1^{e_{i1}}X_2^{e_{i2}}\cdots\cdots X_r^{e_{ir}}$$ と書ける。

a_i；整数で，2.1でのべたリスト形式をなす

X_j；変数で2文字以内

e_{ij} ; 変数 X_j の次数で $e_{ij} > e_{i-1,j} > 0$.

これを次のように書きなおすと，

$$P(X_1, X_2, \cdots, X_r) = \sum_{i=1}^{m} P_i(X_1, X_2, \cdots, X_{r-1}) X_r^{e_i}$$

$$e_i > e_{i-1}, \quad P_i \neq 0 . \qquad (2-1),$$

これは，r に関して帰納的である。α_i を係数 P_i を指すリストとし，β_i は変数 $X_r^{e_i}$ を指すとする。ここで変数は，1語を2分して，上半分にアルファベットで変数名を入れ，下半分に整数で次数を入れる。$X_r^{e_i}$ は，$\boxed{XR \mid e^i}$ となり，常数項なら $e^i = 0$ が入る。そしてメモリ上は $((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \cdots, (\alpha_m, \beta_m))$ の形式で保存する。

たとえば，$f(x, y) = (2x^3 + 3)y^2 + x + 2^{40}$ は，次のような内部表現となる。

$$((((2), X^3), ((3), X)), Y^2), ((((1), X^1), ((2^5, 0), X^0)), Y^0))$$

3. 無限長整数演算（JUPIA）

関数の一覧表を挙げる。

L = IS(M, N)	2つの整数M, N の和.
L = IN (M)	整数Mの符号の逆転.
L = IM (M)	整数Mの絶対値.
L = ISM (M, N)	整数MからNをひく.
L = IP (M, N)	整数M, Nの積.

L = IQRS (M, N)	N が 1 − Precision の時，M を N で割り，商を Q，剰余を R とし L = (Q, R).
L = IQR (M, N)	N が 1 − Precision でない時に商を Q，剰余 R とし L = (Q, R).
L = IGCD (M, N)	整数 M，N の最大公約数．
L = IRD (X)	カード上の整数（桁数 ≦ 72）を読み，内部変換．
X = ILST (L)	内部表現を 10 進に変換し，出力．

ここで，X はダミイである。 入出力関数は，多項式処理関係からは参照されないが，無限長演算を単独に実行する時に必要である。

4. 多項式処理プログラム（JPM）

(a) 四則演算

L = PSM (P, Q)	多項式 P, Q の和．
L = PN (P)	多項式 P の符号逆転．
L = PD (P, Q)	多項式 P から Q をひく．
L = PP (P, Q)	多項式 P と Q の積．
L = PQ (P, Q)	多項式 P を Q で割り商を求める。

四則演算 PS, PD, PP, PQ は，同じ変数を持つ多項式 P, Q の間で演算がなされる。 たとえば $f(x)$ と $g(x, y)$

の和を求めたい時は，引続きのべる関数PCIVを使用して，$f(x)$ を形式的に2変数の関数になるように前もって変換しておかなければならない。つまり $P=f(x)$, $Q=g(x,y)$ とおくと，L = PS(PCIV(P,Q),Q)となる。四則演算はいずれも帰納的関係として作成している。内部表現で示すように，r変数多項式の演算は，$r-1$変数多項式の演算結果より導かれるのでrについて帰納的になっており，結局は常数（無限長整数）の演算にかえる。

(b)代入演算

L = PCIV(P, Q)	$P(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ に $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　$n \geqq m$ に対応する変数 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ を形式的に追加する。
L = PSSUB(P, Q)	$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ の変数 y に，$P(x_1, x_2, \cdots, x_m)$　$m \geqq n$ を代入する。
L = PMPV(P, Y)	$P(x_1, x_2, \cdots, x_m)y^e$ を行う。ここで Y は $\boxed{y \mid e}$ なる形式を持つ。
L = PSUB(P, Y, Q)	$Q(x_1, x_2, \cdots, x_m, z_1, z_2, \cdots, z_r)$ の y に対して，$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$n \geqq m \geqq 0$, $r \geqq 0$ を代入し，答

$R(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_s)$

を得る。$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ と

$z_1, z_2, \cdots, z_r$ のうち一致する変

数があってもよい。又その時変

数が順序どおりでなくてもよい。

PSUBは，P, Y, Q の選び方によって次のようなことが実行できる。例を挙げて説明する。

(1). 変数へ多項式を代入する。

$P = f(a, b, d)$ を $Q = g(a, b, y, d)$ の y に代入する。

(2). 変数の順序の入れかえ。

Pとして $f(b, a) = a$ を，$g(a, b)$ の a に代入することにより，$g(b, a)$ を得る。

(3). 形式的に現われる変数（すなわち，$f(a, b, x) = a+2b$ の x をさす）の消去。

(4). 変数に数値を代入する。

Pとして $f(c) = 100$ を $g(a, b, c, d)$ の c に代入することにより，c に100を入れて計算した多項式 $g'(a, b, d)$ が得られる。これをくりかえすと，a, b, c, d すべてに数値を入れた式の値を求めることができ

る。

(c)式の簡約その他

L = PGCD(P, Q)	多項式P, Qの最大公約多項式を求める。
L = PCPP(P)	多項式PのContent Aと，primitive Pを求めL=(A, P)を得る。ここでContentとは，(2-1)のように多項式Pを書き現わすと，$P_1, P_2, \cdots, P_m$の最大公約多項式を表わす。primitiveとは，P/Aである。
L = PREM(P, Q)	多項式PをQで割った剰余(x_rについての)を求める。

(d)入出力

L = PREAD(0) or PREAD(1)	カード上に，引用符によってはさまれた多項式のストリングを内部変換する。PREAD(0)の場合は，2.2で述べた内部表現に，PREAD(1)の場合は，引続き次の3.1でのべる別の内部表現となる。多項式　$3x^2y+5x+3$

は，次のようなカードのペアを入力すればよい。

```
2 X Y
  3*X**2*Y+5*X+3
```

1枚目は変数名と降巾の順を定める。

X = PW (A, L)　　Z の内部表現を出力形式に変換し，それを印刷する。印刷の形式は，ブランクや整数の頭の0が消去され，FORTRANで式を書くのと同じ様式である。Aには，式の見出しを12文字以内で入れる。

X = PRINTS (L)　　リスト構造そのままで出力する。これは中間結果を出力する際に使用する。

多項式の入出力処理ルーチンは，筆者およびそのグループで，今までの数式処理の経験を生かし，実用性に重点をおいて作成しているので非常に使い易いものである。

(e) 例題　$P(a,b,d)=a^2+b^2+d^2$ を $Q(a,b,x,c)=ax^2-bxc^2$ の x に代入する。

181

P =PREAD (1)	式(1)の入力.
X =PREAD (1)	式(2)の入力.
Q =PREAD (1)	式(3)の入力.
L =PSUB (P,X,Q)	多項式Qの変数Xに多項式Pを代入する。
X = PRINTS (L)	中間結果 (4).
X = PW (A,L)	答を出力 (5).

資料 1

PSUB TEST

```
        'A**2+B**2+D**2'                                    (1)
       'X'                                                  (2)
       'A*X**2-B*X*C**2'                                    (3)
(((((((((-00001)0A000))0B001))0D002)((((((-00001)0A000))0B003)((((-00001)0A002))0B001))0D000))0C002)((((((((000001)0A001      (4)
))0B000))0D004)((((((000002)0A001))0B002)((((000002)0A003))0B000))0D002)((((((000001)0A001))0B004)((((000002)0A003))0B00
2)((((000001)0A005))0B000))0D000))0C000))
```

CHECK DATA 1

```
(+(-B*D**2-B**3-A**2*B)*C**2+A*D**4+(2*A*B**2+2*A**3)*D**2+A*B**4+2*A**3*B**2+A**5)      (5)
```