

有限要素法の誤差について

東大 工学部 辻 尚史

§1. 序

有限要素法における未解決の問題について考えてみると、

- (1) 収束するため、分割法に課せられる条件。
- (2) ある基底関数をとったときに収束するかどうか。収束する場合に、その意味とオーダー [2], [5], [7], [8]。
- (3) 近似された有限系の数値的安定性 [4]。
- (4) 誤差の漸近展開。

などがあるが、ここでは (2) の点について、基底関数がある条件を満たしているときに、少なくともエネルギー収束をすることを数値実験例も合わせて考察する。

現在、有限要素法によって解かれている問題には、平面応力問題、板の曲げ等があるが、ここではおもに、例題として 2 階の自己随伴方程式で、2次元の場合に三角形要素に分割する場合について考えることにする。

§2. エネルギー法

一般に, \mathcal{L} をあるヒルベルト空間 \mathcal{H} で定義された正定値対称作用素として, その定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ が稠密であるとするとき, $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ の上で新しい内積 (エネルギー積) を,

$$(2.1) \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \text{ に対して, } [u, v] \equiv (\mathcal{L}u, v)$$

と定義する。 $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ を $\|u\| = [u, u]^{1/2}$ に関して完備化してヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ を得る。

ところで, \mathcal{L} が正定値対称作用素であるから,

$$(2.2) \quad \exists \gamma > 0 \quad (\mathcal{L}u, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2.$$

さて, $\mathcal{L}u = f$ の解を持つば, その解は汎関数

$$(2.3) \quad J[u] = (\mathcal{L}u, u) - 2(u, f)$$

を最小にする。逆に, これを最小にする u が存在すれば, それは $\mathcal{L}u = f$ の解である [6]。

Cauchy の不等式および (2.1), (2.2) より,

$$|(u, f)| \leq \|f\| \cdot \|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| \cdot \|u\|_{\mathcal{L}}$$

であるから, Riesz の定理によつて,

$$\forall u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}, \exists u_0 \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}} \quad (u, f) = [u, u_0].$$

簡単な計算によつて,

$$(2.4) \quad J[u] = \|u - u_0\|_{\mathcal{L}}^2 - \|u_0\|_{\mathcal{L}}^2$$

を得る。これより明らかになるように, $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ の汎関数 $J[u]$ は, $u = u_0$ のとき最小となる。また, $J[u_0] = -\|u_0\|_{\mathcal{L}}^2$

であるから,

$$(2.5) \quad \|u - u_0\| = J[u] - J[u_0].$$

有限要素法においては, 領域 Ω — 単一の凸多角形であるとする — を三角形, 四角形などの要素に分割し, 各要素は隣接する要素と辺を共有するものとする。

要素 Ω_k 内で, パラメータ S_1^k, \dots, S_m^k を持った十分滑らかな関数

$$U^k(x, y) = \sum_{i=1}^m S_i^k \phi_i^k(x, y)$$

を考える。ここで, $\phi_i^k(x, y)$ は, $(x_i, y_i) \in \Omega_k$, f を $\overline{\Omega_k}$ 上で十分滑らかな関数として, Λ_i^k をある $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2})$ に対して,

$$\Lambda_i^k f = D^{\alpha_i} f(x_i, y_i) \quad D^{\alpha_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_{i1}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha_{i2}}$$

なる汎関数とするとき, $\Lambda_i^k \phi_i^k(x, y) = \delta_{ij}$ なる Ω_k 内で, 十分滑らかな関数である。このとき, Ω 全体における試験関数 $U(x, y)$ を, χ_k を Ω_k の特徴関数として,

$$U(x, y) = \sum_k U^k(x, y) \chi_k$$

とする。ここで, Λ_i^k の決め方により, S_i^k は Ω_k の頂点等における $U(x, y)$ の値等であるから, $S_i, i=1, \dots, N$ を同じ点における S_i^k を同一視して得たものとするとき, S_i を, $U(x, y)$ のパラメータと考えることができるが, このような $U(x, y | S_1, \dots, S_N)$ のつくる空間を H_R とするとき, H_R において, $J[U]$ を最小にする $U_0(x, y)$ が有限要素法による

近似解であるから, (2.5) より, $\forall \sigma \in H_L$ に対し,

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \|\sigma_0 - u_0\|_L^2 &= J[\sigma_0] - J[u_0] \\ &\leq J[\sigma] - J[u_0] = \|\sigma - u_0\|_L^2. \end{aligned}$$

すなわち, σ_0 は u_0 の H_L における最良近似である。とくに $\tilde{\sigma}(x, y)$ を, $\tilde{\zeta}_i^k = \Lambda_i^k u_0, i=1, \dots, N; \tilde{\sigma}^k(x, y) = \sum_{i=1}^m \tilde{\zeta}_i^k \phi_i^k(x, y)$ なるものとするれば,

$$(2.7) \quad \|\sigma_0 - u_0\| \leq \frac{1}{\gamma} \|\sigma_0 - u_0\|_L \leq \frac{1}{\gamma} \|\tilde{\sigma} - u_0\|_L.$$

§3. 誤差評価

まず, 問題を単純化するため, 一次元について考える。

$$\text{問題 (I)} \quad \begin{cases} \mathcal{L} u \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u = f(x) & a \leq x \leq b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

ただし, $a \leq x \leq b$ で $p(x), q(x)$ は区分的に連続かつ非負であり, $\int_a^b \frac{dx}{p(x)}$ が存在して, $p(a) \neq 0, p(b) \neq 0$ とする。

区間 $[a, b]$ の分割を, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$

とし, $h_k = x_{k+1} - x_k, k=0, 1, \dots, N; h = \max_k h_k < 1$ 。

区間 $[x_k, x_{k+1}]$ で定義された $\sigma^k(x)$ を,

$$D^i \sigma^k(x_k) = c_{k0}^{(i)}, \quad D^i \sigma^k(x_{k+1}) = c_{k+1}^{(i)} \quad i=0, 1, \dots, m$$

なる $m (= 2m+1)$ 次多項式とするとき, $\sigma(x)$ のつくる空間 H_L は, $H_L \subset W_2^1(a, b)$ である。ここで, 解 u_0 の (m) 階導関数が有界, $|D^m u_0| \leq M_m$ と仮定する。

$\varphi = \tilde{u} - u_0$ とすると, 仮定によつて,

$$(3.1) \quad \begin{aligned} D^i \varphi(x_j) &= 0 & j = k, k+1; \quad i = 0, 1, \dots, m \\ |D^{m+1} \varphi| &\leq M_{m+1} \end{aligned}$$

である。

補題 1 m を非負なる整数, $n = 2m+1$ とするとき, $\varphi(x)$ が

i) $D^i \varphi(x) \quad i = 0, 1, \dots, m$ は $[x_0, x_1]$ で連続.

ii) $D^i \varphi(x_j) = 0 \quad j = 0, 1; \quad i = 0, 1, \dots, m$

iii) $|D^{m+1} \varphi(x)| \leq M_{m+1} \quad x \in (x_0, x_1)$

をみたすならば, $h = x_1 - x_0$ とし,

$$|\varphi(x)| \leq \left(\frac{h}{2}\right)^{m+1} M_{m+1}, \quad |D^i \varphi(x)| \leq 2 \left(\frac{h}{2}\right)^m M_{m+1}$$

である [7].

(3.1) と補題 1 によつて,

$$\|\varphi\|_E \leq C_1 M_{m+1}^2 h^{2m}$$

$$C_1 = \left\{ \max_p \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} + \max_q \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} \right\} (b-a)$$

が成り立つから, (2.7) より,

$$(3.2) \quad \|D_0 - u_0\| \leq k_1 M_{m+1} h^m \quad k_1^2 = C_1 / \gamma$$

補題 2 (Sobolev の補題)

$x = (x_1, \dots, x_m)$ とするとき, $u(x) \in W_p^{(k)}(\Omega)$ であるとき,

整数 k が $p(k-k) > m$ であるとするとき,

$$u(x) \in C^{(k)}(\Omega)$$

$$\|u\|_{C^{(k)}} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |a|=k}} |D^a u(x)| \leq C \|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

ここで, C は u によらない定数 [6].

(3.2) および補題 2 より,

$$|U_0 - u_0| \leq KM_{\text{int}} h^k \quad k = k_1 C$$

すなわち, この問題については, 有限要素法による近似解は $\|\cdot\|_{\infty}$ の意味で $O(h^k)$ の収束を有する。

さて, 問題を 2次元の場合にのみ考えることにする。

$$\text{問題 (I)} \quad \mathcal{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + cu = f \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

ここで, a_{ij}, c, f は $\bar{\Omega}$ で連続, $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \quad \mu \text{ は定数で } \mu > 0,$$

$$c(x_1, x_2) \geq 0$$

であるとし, 境界条件は

$$\text{i) } u|_{\Gamma} = 0$$

$$\text{または iii) } \left[\sum_{j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma u \right] \Big|_{\Gamma} = 0$$

(ν は Γ の外向き法線, (ν, x_i) は ν と軸 x_i とのなす角である))

あって, σ は $\sigma \geq 0, \sigma \neq 0$ とする。

ここでは, 三角形要素 Ω_k 内の試験関数として, 格子点 P_j (三角形の各辺を m 等分し, 各 m 等分点よりそれぞれ各辺に平行な線分を Ω_k 内にひき, それらの交点および m 等分点) 上で値 C_i^k を持つ m 次多項式 $\Pi^k(x, y)$ とする方法について述べる。このとき Λ_i^k は $\Lambda_i^k u = u(P_i)$ である。

明らか、 $\mathcal{U}(x, y)$ の構成する空間 H_2 は、 $H_2 \in W_2^1(\Omega)$.

解 u_0 が $(n+1)$ 階の有界な導関数を持つ、すなわち、

$$|D^\alpha u_0| \leq M_{n+1} \quad |\alpha| = n+1$$

とすると、前に同様に \tilde{u} を、 $\tilde{u} \in H_2$ であって、 $\forall k$ に対して

$$\Lambda_i^k \tilde{u}(x, y) = u_0(P_i) \quad i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

なるものとし、 $\varphi = \tilde{u} - u_0$ とおけば、

$$(3.3) \quad |D^\alpha \varphi| \leq M_{n+1} \quad |\alpha| = n+1$$

$$\varphi(P_i) = 0 \quad i = 1, \dots, \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

定理 1 \mathcal{T} を 3 点 $P_i(x_i, y_i) \quad i=0, 1, 2$ を頂点とする三角形

とし、 $\theta_i = \angle P_i \quad i=0, 1, 2$, $h_0 = \overline{P_1 P_2}$, $h_1 = \overline{P_2 P_0}$, $h_2 = \overline{P_0 P_1}$ と

する。また $Q_{ij} \quad (0 \leq i, j, i+j \leq n)$ を、各辺の n 等分点と、

それらから各辺に平行に n 本の三角形内の線分の交点とする。

$\varphi(x, y)$ の条件

i) $\varphi(x, y)$ は \mathcal{T} で連続

ii) $|D^\alpha \varphi(x, y)| \leq M_{n+1} \quad |\alpha| = n+1 \quad (x, y) \in \mathcal{T}$

iii) $\varphi(Q_{ij}) = 0 \quad 0 \leq i+j \leq n$

をみたすならば、 C_1, C_2 を φ に依る定数、 $h = \max_{i=0,1,2} h_i$,

$\theta = \min_{i=0,1,2} \theta_i$ とすると、

$$|\varphi| \leq C_1 \frac{M_{n+1}}{\sin \theta} h^{n+1}, \quad |D^\alpha \varphi| \leq C_2 \frac{M_{n+1}}{\sin \theta} h^n \quad |\alpha| = 1.$$

である [7].

(3.3) と定理 1 によって、 h_k, θ_k を Ω_k の最大辺、最小角

とすると, $|\varphi| \leq C_1 \frac{M_{\max}}{\sin \theta_k} h_k^{m+1}$, $|D^\alpha \varphi| \leq C_2 \frac{M_{\max}}{\sin \theta_k} h_k^n$ $|\alpha| = 1$.

a_{ij} , c は $\bar{\Omega}$ で連続であるから最大値が存在する。

$C_3 = C_1^2 \max a_{ij} + C_2^2 \max c$ とおき, $h = \max_k h_k$, $\theta = \min_k \theta_k$

$K = \frac{C_3}{\gamma} \iint_{\Omega} dx_1 dx_2$ とおくと,

$$\|u_0 - u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leq K \frac{M_{\max}}{\sin \theta} h^n$$

を得る。

すなわち, 有限要素法による近似解は二乗平均収束するといえるが, 1次元における2点境界値問題のように, $\|\cdot\|_{\infty}$ のノルムで収束するということは, 未だいえない。勿論, 試験関数が1階導関数まで連続である場合は別である。

平面応力問題のように, 未知関数が2次元以上に比べても2階の方程式である限り, 全く同様なことが示せる。また板の曲げ等の4階の方程式の場合には, 試験関数は1階導関数まで連続でなければならぬが, ある試験関数をとったときに, そのパラメタの値を解のそれと一致させたとき, それが, 解を補間する関数となっていることがあれば, $W_2^2(\Omega)$ のノルムで収束することがわかるばかりでなく, $\|\cdot\|_{\infty}$ のノルムで収束することがわかる。

§4. 数値実験例

数値実験は, 試験関数として, 最も簡単なものであるべき

的に一次関数がある (5.3 において, $n=1$ とした) のについて, 分割の仕方を変えてみた。

分割法は, 最初の分割を, F_1, F_2, F_3 に示すものとして, 分割を細かくする際には, 各三角形を各辺の中点を結ぶ線分で4等分して順次細かくするという方法をとった。

格子点 (三角形の頂点) を $P_i(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, N$ とし

$$E = U_0 - u_0$$

$$\|E\|_2 = (-\Delta E, E)^{\frac{1}{2}}, \quad \|E\|_{\infty} = \max_c |E(x_i, y_i)|$$

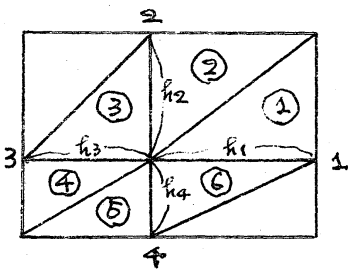
として, F_1, F_2, F_3 の分割を行ったときの実験結果をそれぞれ, G_1, G_2, G_3 に示した。

F_1 の分割を行ったときには, パラメタに対する方程式は差分近似解法において, 5点差分を用いたときと一致するから [4, 7], 結果は明らかである。このように正方形に分割して対角線を一本入れたものでなく, 長方形の場合にも, $\| \cdot \|_{\infty}$) ルムで収束することを示すことができる。

左図のようにするとき, 点 O に関する

差分式を有限要素法によって導くと,

$$\begin{aligned} & -\frac{h_2}{h_1}(u_1 - u_0) && -\frac{1}{3} h_1 h_2 f_{(1)} \\ & -\frac{h_1}{h_2}(u_2 - u_0) && -\frac{1}{3} h_1 h_2 f_{(2)} \\ & +\frac{h_2}{h_3}(u_0 - u_3) - \frac{h_3}{h_2}(u_2 - u_0) && -\frac{1}{3} h_2 h_3 f_{(3)} \\ & +\frac{h_4}{h_3}(u_0 - u_3) && -\frac{1}{3} h_3 h_4 f_{(4)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{h_5}{h_4} (u_0 - u_4) - \frac{1}{3} h_3 h_4 f_5 \\
 & - \frac{h_4}{h_1} (u_1 - u_0) + \frac{h_1}{h_4} (u_0 - u_4) - \frac{1}{3} h_1 h_4 f_6 = 0
 \end{aligned}$$

となるが， u に解を代入してみれば，主要項は，

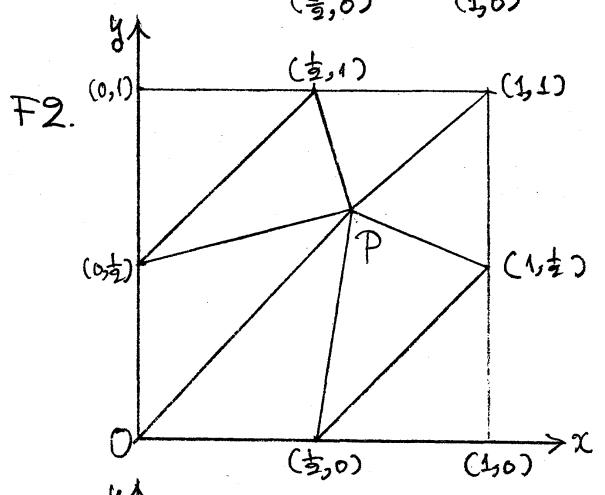
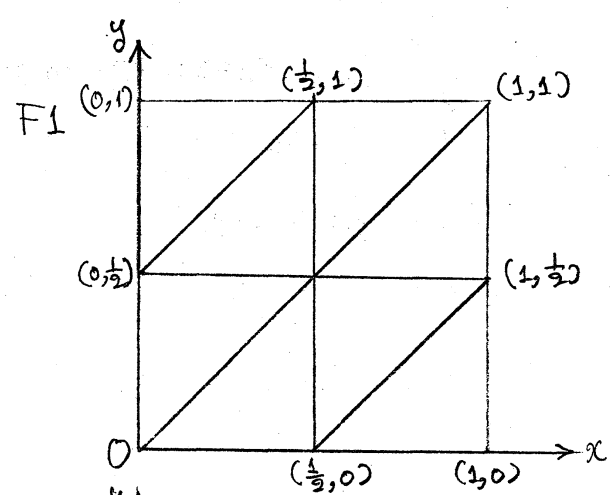
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_4 h_1) (u_{xx} + u_{yy}) \\
 & + \frac{1}{6} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) \{ (h_1 - h_3) u_{xxx} + (h_2 - h_4) u_{yyy} \} + O(h^7)
 \end{aligned}$$

となることからわかる。

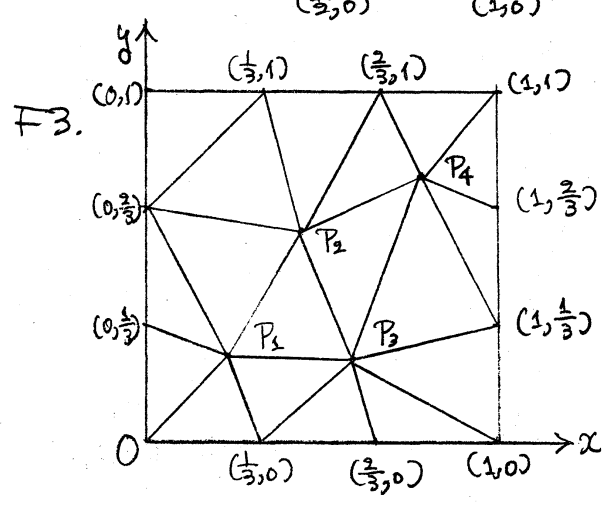
また， F_2 ， F_3 の分割においても， G_2 ， G_3 をみると
 各々の結論である少なくとも $\|u\|_{\infty}$ では1次の収束を
 するということが成り立っていると思われる。

しかし， $\|u\|_{\infty}$ についてみるとこの実験の範囲では
 収束するとはいえない。むしろ， F_3 の分割においては，
 誤差は $\|u\|_{\infty}$ において増したりしている。 F_2 の
 分割では， $\|E\|_{\infty}$ としは，この範囲では増してはいないので
 あるが，各点における誤差を調べてみると，分割が細かくな
 るに従って増大する点さえも存在する。この現象は， F_3
 の分割においても起っている。

勿論，現在までの実験においては，分割は未だのほり粗い
 ことに注意しなければならぬことは確かではある。



$P(0.6, 0.65)$

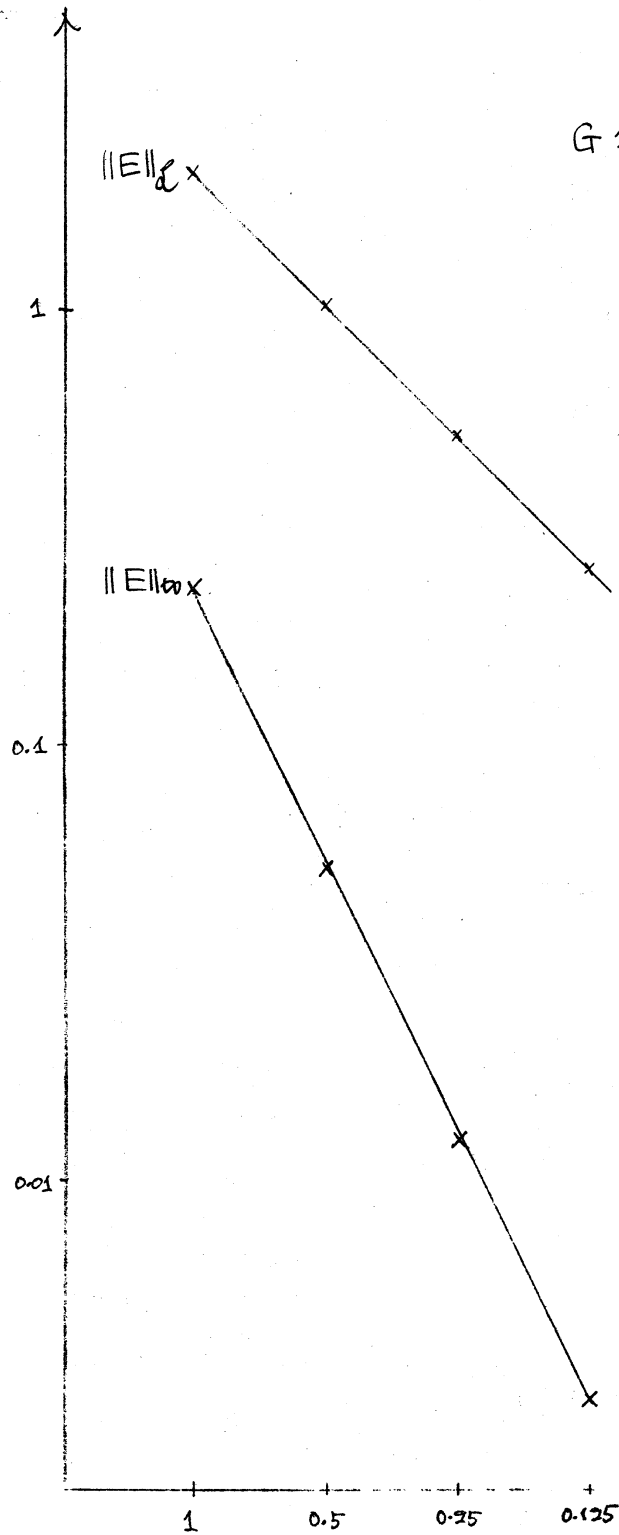


$P_1(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

$P_2(\frac{5}{12}, \frac{37}{60})$

$P_3(\frac{19}{3}, \frac{1}{4})$

$P_4(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

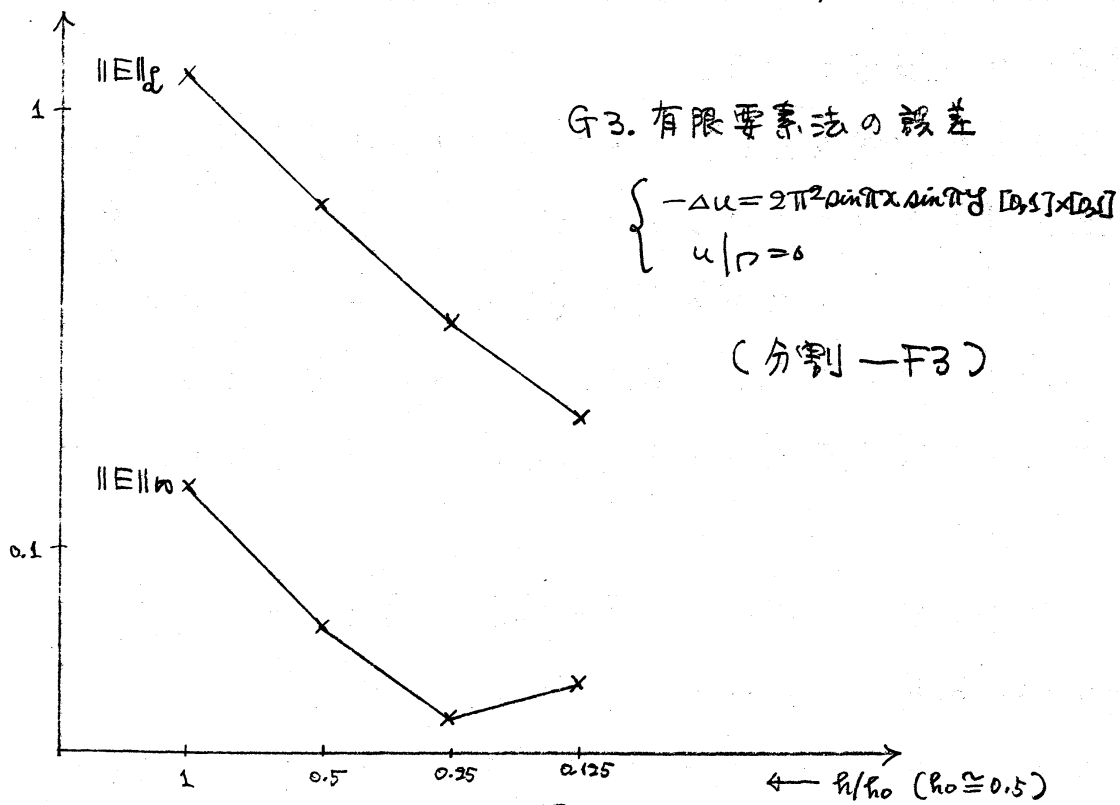
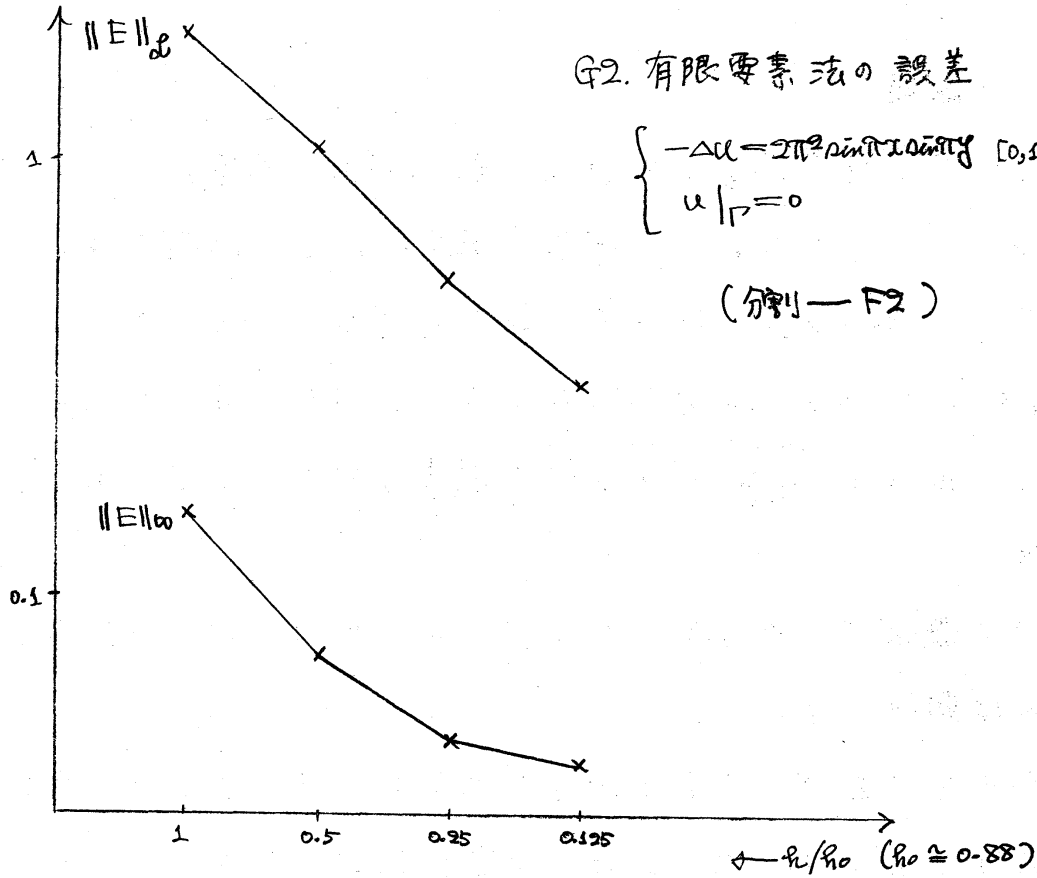


G 1. 有限要素法の誤差.

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y & [0,1] \times [0,1] \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

(分割 - F 1)

$\leftarrow n/h_0 \quad (h_0 = \sqrt{2}/2) \rightarrow$



結語

ここでは、要素 Ω_k 内で \tilde{u}^k が、解 u_0 のある程度より近似関数と仮定しているときには、有限要素法による近似解 u_h は、すべての三角形の最大辺を h 、最小角を θ とするとき、 $\theta \geq \theta_0 > 0$ なる θ_0 が存在するように分割し、 $h \rightarrow 0$ としたとき、ノルム $\|\cdot\|_{W_2^{(1)}}$ でみる限り収束することを示したわけである。

数値実験例が示唆するように、ノルム $\|\cdot\|_{W_2}$ での収束は、一般には期待できない。

エネルギーに相当するものが要求されている場合にはこれによりわけであるが、右点における近似値が要求されている場合には不都合である。

こうした事情を考へ、いかに分割すれば、右点における収束が得られるのがあるうへにこのことを探るため、数値実験においていろいろな分割を試みた。F1の分割では、結局相隣接する要素と、あたかも一階導関数が連続であるかのような差分式を構成するので、ノルム $\|\cdot\|_{W_2}$ で収束してしまうのである。

一階導関数まで連続なる基底関数を構成するので、2次元補間法の発展を待たねばならない。

しかし、基底関数を滑らかにしようとするれば、計算量が

莫大なる恐れがあることに注意しなければならない。

なお、この研究を進めるにあたり、指導をいただいた森口繁一先生、度々の議論をして下さった埼玉大学の小林光夫先生に、ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Birkoff, G., and C.R. de Boor: Piecewise polynomial interpolation and approximation. *Approximations of functions*. ed. by H.L. Garabedian. pp. 164-190. Elsevier, 1965.
- [2] Birkoff, G., M.H. Schultz, and R.S. Varga: Piecewise Hermite interpolation in one and two variable with applications to partial differential equations. *Num. Math.* 11, pp. 232-256 (1968).
- [3] Courant, R.: Variational methods for the solution on problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 49, pp. 1-23 (1943).
- [4] Fix, G., and G. Strang: Fourier Analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory. *Studies in App. Math.* 48, pp. 265-273 (1969).
- [5] Friedrichs, K.O., and H.B. Keller: A finite difference scheme for generalized Neuman problems. *Num. Sol. of P.D.E.* ed by J.H. Bramble. pp. 1-19, Academic Press, 1966.
- [6] Mikhlín, S.G., and K.L. Smolitzky: Approximate methods for the solution of differential and integral equations. pp. 145-269. Elsevier, 1967.

[7] 辻尚史 : 有限要素法の誤差について. 東大修論. 1970.

[8] Zlamal, M. : *On the finite element method.*

Num. Math. 12, pp. 394—409 (1968).