

# Spin-Wave Green's Functions for a Body-Centered Tetragonal Antiferromagnet<sup>\*</sup>

神戸大 理 利根川 孝

## § 1. 反強磁性体スピン波グリーン関数の定義:

ハイゼンベルグ型反強磁性体におけるスピン波の不純物状態(局在状態及び共鳴状態)、励起子とスピン波の同時励起による光の吸収等の問題を議論する際には要となるスピン波グリーン関数を、 $MnF_2$ 型の結晶の場合について述べる。

$MnF_2$ 型の反強磁性体に対するハミルトニアンは

$$H = -J_1 \sum_j \sum_{\sigma} S_j \cdot S_{j+\sigma} - J_2 \sum_l \sum_{\sigma} S_l \cdot S_{l+\sigma} + 2J_2 \sum_j \sum_p S_j \cdot S_{j+p} - D \sum_j (S_j^z)^2 - D \sum_l (S_l^z)^2, \quad (J_1, J_2, D > 0). \quad (1)$$

ここで  $j$  及び  $l$  についてはそれぞれ上向き及び下向きスピンの成る副格子に属する格子点についての和を意味する。

又  $J_1, J_2$  はそれぞれ副格子内及び副格子間最近接スピンの間

---

\* T. Tonegawa, Prog. Theor. Phys. 40 (1968) 1195; 41 (1969) 1 を参照。尚体心立方格子をもつ反強磁性体に対するスピン波グリーン関数は Walker 等によっても計算されている (L. R. Walker, B. B. Cetlin and D. Hone, J. Phys. Chem. Solids 30 (1969) 923)。

の交換積分であり、 $D$ は一軸性異方性エネルギーの係数である。通常 $J_3$ で表わされる副格子内最近接スピン間の交換積分はここでは考えない。特に $J_1 = D = 0$ の場合には(1)は最近接スピン間の交換相互作用のみを持つ反強磁性体に対するハミルトニアンとなる。

ハミルトニアン(1)に関するスピン波グリーン関数は次のように定義される:

$$G(j, j'; E) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{p_{\mathbf{k}+} p_{\mathbf{k}+} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j'})}}{E_{\mathbf{k}+}^{(0)} - E} - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{p_{\mathbf{k}-} p_{\mathbf{k}-} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j'})}}{E_{\mathbf{k}-}^{(0)} - E}, \quad (2a)$$

$$G(j, l; E) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{p_{\mathbf{k}-} q_{\mathbf{k}-} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l)}}{E_{\mathbf{k}-}^{(0)} - E} - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{p_{\mathbf{k}+} q_{\mathbf{k}+} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l)}}{E_{\mathbf{k}+}^{(0)} - E}, \quad (2b)$$

$$G(l, j; E) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{q_{\mathbf{k}+} p_{\mathbf{k}+} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)}}{E_{\mathbf{k}+}^{(0)} - E} - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{q_{\mathbf{k}-} p_{\mathbf{k}-} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)}}{E_{\mathbf{k}-}^{(0)} - E}, \quad (2c)$$

$$G(l, l'; E) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{q_{\mathbf{k}-} q_{\mathbf{k}-} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'})}}{E_{\mathbf{k}-}^{(0)} - E} - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{q_{\mathbf{k}+} q_{\mathbf{k}+} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'})}}{E_{\mathbf{k}+}^{(0)} - E}, \quad (2d)$$

$$E_{\mathbf{k}\pm}^{(0)} = \pm 2S \left[ \{ J_2 z_2 + J_1 (z_1 - \gamma_{1\mathbf{k}}) + D \}^2 - J_2^2 \gamma_{2\mathbf{k}}^2 \right]^{1/2}, \quad (3)$$

$$p_{\mathbf{k}\pm} = \left[ \frac{2S \{ J_2 z_2 + J_1 (z_1 - \gamma_{1\mathbf{k}}) + D \} + E_{\mathbf{k}\pm}^{(0)}}{2 |E_{\mathbf{k}\pm}^{(0)}|} \right]^{1/2}, \quad (4a)$$

$$q_{\mathbf{k}\pm} = \left[ \frac{2S \{ J_2 z_2 + J_1 (z_1 - \gamma_{1\mathbf{k}}) + D \} - E_{\mathbf{k}\pm}^{(0)}}{2 |E_{\mathbf{k}\pm}^{(0)}|} \right]^{1/2}, \quad (4b)$$

$$\gamma_{1\mathbf{k}} = \sum_{\sigma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{\sigma}} = z_1 \cos(k_x c), \quad z_1 = 2 \quad (5a)$$

$$\gamma_{2\mathbf{k}} = \sum_{\rho} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{\rho}} = z_2 \cos(k_x a/2) \cos(k_y a/2) \cos(k_z c/2), \quad z_2 = 8. \quad (5b)$$

(2a and) に於て  $N$  は副格子内のスピンの数、又  $k$  について  $N$  の和は副格子がつくる逆格子の第一ブリルアン域内での和である。

(2a and) に (3) ~ (5) を代入して和を積分に置きかえれば

$$\begin{aligned} \Gamma(j, j'; \delta, \alpha_1; \varepsilon) &\equiv 2S(J_2 z_2 + 2J_1 z_1 + D) \cdot G(j, j'; E) \\ &= (1+2\alpha_1 \zeta + \delta) \frac{8}{\pi^3} \int_0^{\pi/2} dx dy dz \cos[(n_x - n'_x)x] \cdot \cos[(n_y - n'_y)y] \cos[(n_z - n'_z)z] \times \\ &\quad \times \frac{[1 + \alpha_1 \zeta \{1 - \cos(2z)\} + \delta] + (1+2\alpha_1 \zeta + \delta) \cdot \varepsilon}{[1 + \alpha_1 \zeta \{1 - \cos(2z)\} + \delta]^2 - \cos^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \cos^2 z - (1+2\alpha_1 \zeta + \delta)^2 \varepsilon^2}, \\ &\quad (|n_i|, |n'_i| \quad (i=x, y, z) : \text{even}), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(l, j; \delta, \alpha_1; \varepsilon) &\equiv 2S(J_2 z_2 + 2J_1 z_1 + D) \cdot G(l, j; E) \\ &= -\Gamma(j, l; \delta, \alpha_1; \varepsilon) \equiv -2S(J_2 z_2 + 2J_1 z_1 + D) \cdot G(j, l; E) \\ &= (1+2\alpha_1 \zeta + \delta) \frac{8}{\pi^3} \int_0^{\pi/2} dx dy dz \cos[(m_x - n_x)x] \cdot \cos[(m_y - n_y)y] \cdot \cos[(m_z - n_z)z] \times \\ &\quad \times \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}{[1 + \alpha_1 \zeta \{1 - \cos(2z)\} + \delta]^2 - \cos^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \cos^2 z - (1+2\alpha_1 \zeta + \delta)^2 \varepsilon^2}, \\ &\quad (|m_i| : \text{odd}, |n_i| : \text{even}), \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(l, l'; \delta, \alpha_1; \varepsilon) &\equiv 2S(J_2 z_2 + 2J_1 z_1 + D) \cdot G(l, l'; E) \\ &= (1+2\alpha_1 \zeta + \delta) \frac{8}{\pi^3} \int_0^{\pi/2} dx dy dz \cos[(m_x - m'_x)x] \cdot \cos[(m_y - m'_y)y] \cdot \cos[(m_z - m'_z)z] \times \\ &\quad \times \frac{-[1 + \alpha_1 \zeta \{1 - \cos(2z)\} + \delta] + (1+2\alpha_1 \zeta + \delta) \cdot \varepsilon}{[1 + \alpha_1 \zeta \{1 - \cos(2z)\} + \delta]^2 - \cos^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \cos^2 z - (1+2\alpha_1 \zeta + \delta)^2 \varepsilon^2}, \\ &\quad (|m_i|, |m'_i| : \text{odd}), \end{aligned} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } \varepsilon &\equiv E/2S(J_2 z_2 + 2J_1 z_1 + D), \quad \delta \equiv D/J_2 z_2, \\ \alpha_1 &\equiv J_1/J_2, \quad \zeta \equiv z_1/z_2 = 0.25. \end{aligned} \quad (7)$$

(6a~c) に於て我々は原点と上向きスピンの位置  $j$  とを結ぶ格子ベクトル  $R_j$  とを原点と下向きスピンの位置  $l$  とを結ぶ格子

ベクトル  $R_l$  を  $z$  軸  $z$  軸  $z$  軸 の よう に おく:

$$R_j = (n_x a/2, n_y a/2, n_z c/2) \quad n_i = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (8)$$

$$R_l = (m_x a/2, m_y a/2, m_z c/2) \quad m_i = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

## § 2. スピン波グリーン関数の間の関係.

(6a, c) より スピン波グリーン関数の間には種々の関係があることが分かる。例之は\*

$$\Gamma(j, j'; \delta, d_1; \varepsilon) = -\Gamma(j+l, j'+l; \delta, d_1; -\varepsilon), \quad (9)$$

$$\Gamma(l, j; \delta, d_1; \varepsilon) = \Gamma(l, j; \delta, d_1; -\varepsilon), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\varepsilon}{z_2} \sum_p \Gamma(j, p; \delta, d_1; \varepsilon) - 2d_1 z \cdot \frac{(1+d_1 z + \delta)}{(1+2d_1 z + \delta)} \cdot \frac{1}{z_1} \sum_{\sigma} \{ \Gamma(j, \sigma; \delta, d_1; \varepsilon) \\ & \quad + \Gamma(j+l, \sigma+l, \delta, d_1; \varepsilon) \} \\ & + \frac{d_1^2 z^2}{(1+2d_1 z + \delta)} \cdot \frac{1}{z_1^2} \sum_{\sigma \sigma'} \{ \Gamma(j+\sigma, \sigma'; \delta, d_1; \varepsilon) + \Gamma(j+\sigma+l, \sigma'+l; \delta, d_1; \varepsilon) \} \\ & = (1+2d_1 z + \delta) \cdot 2\varepsilon \cdot \delta_{j,0} \\ & \quad - (1+2d_1 z + \delta) \left\{ \frac{(1+d_1 z + \delta)^2}{(1+2d_1 z + \delta)^2} - \varepsilon^2 \right\} \{ \Gamma(j, 0; \delta, d_1; \varepsilon) + \Gamma(j+l, l; \delta, d_1; \varepsilon) \}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\varepsilon}{z_2} \sum_p \Gamma(j, p; \delta, d_1; \varepsilon) \\ & = \frac{-1}{1+2d_1 z + \delta} \cdot \frac{1}{z_1^2} \sum_{pp'} \{ \Gamma(j+p-l, p'-l; \delta, d_1; \varepsilon) + \Gamma(j+p, p'; \delta, d_1; \varepsilon) \}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z_2} \sum_p \{ \Gamma(0, p-l; \delta, d_1; \varepsilon) + \Gamma(l, p; \delta, d_1; \varepsilon) \} \\ & = (1+2d_1 z + \delta) \cdot 2\varepsilon \cdot \Gamma(l, 0; \delta, d_1; \varepsilon). \quad (13) \end{aligned}$$

特に  $d_1 = 0$  の場合には

$$(\varepsilon-1) \cdot \Gamma(j, j'; \delta, 0; \varepsilon) = (\varepsilon+1) \cdot \Gamma(j+l, j'+l; \delta, 0; \varepsilon) \quad (14)$$

\*  $z = z_1 z_2$  (原典を参照),  $\sigma, l+l'$  等は上向き副格子に、又  $l, p, j+l$  等は下向き副格子に属することに注意。

なる関係も成り立つ。従って (11) ~ (14) より  $d_1 = 0$  の場合には

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} \sum_p \Gamma(p, j; \delta, 0; \varepsilon) &= -\frac{1}{z_2} \sum_p \Gamma(j, p; \delta, 0; \varepsilon) \\ &= -(1+\delta) \delta_{j,0} + (1+\delta)(1-\varepsilon) \Gamma(j, 0; \delta, 0; \varepsilon) \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} \sum_{pp'} \Gamma(j+p, p'; \delta, 0; \varepsilon) \\ = (1+\delta)^2 (1-\varepsilon) \delta_{j,0} - (1+\delta)^2 (1-\varepsilon)^2 \Gamma(j, 0; \delta, 0; \varepsilon) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z_2} \sum_p \Gamma(l, p; \delta, 0; \varepsilon) = -(1+\delta)(1-\varepsilon) \Gamma(l, 0; \delta, 0; \varepsilon) \quad (17)$$

等が成り立つ。(15), (16) に於て  $j=0$  ととれば  $\Gamma(p, 0; \delta, 0; \varepsilon)$  及び  $\Gamma(p, p'; \delta, 0; \varepsilon)$  を  $\Gamma(0, 0; \delta, 0; \varepsilon)$  をもちいす表わす式が得られる。以上のようなグリーン関数の間の種々の関係はいくつかのグリーン関数の値を知って他の多くのグリーン関数の値を求める為ばかりではなく、別々に求められたグリーン関数の値の精度を調べる為にも用いられる。

### §3. 数値計算の方法

まずスピノ波エネルギーバンド内の  $\varepsilon$  ( $\frac{\sqrt{2\delta+\delta^2}}{1+2d_1\delta+\delta} < |\varepsilon| < 1$ ) に対するグリーン関数:  $\Gamma(j, j'; \delta, d_1; \varepsilon + i\delta)$ ,  $\Gamma(l, j; \delta, d_1; \varepsilon + i\delta)$ ,  $\Gamma(l, l'; \delta, d_1; \varepsilon + i\delta)$  ( $s \rightarrow +0$ ) の数値計算の方法を述べる。今  $f(x)$  を任意の正則関数とし、 $g(x)$  を  $a < x < b$  の範囲で  $g(x) = 0$  をみたす  $x$  の値:  $x_0$  をだゞ一つだけ持つ単調増加(或いは単調減少)関数とする。この時よく知られた公式:  $\frac{1}{x \mp i\delta} = P \frac{1}{x} \pm i\pi \delta(x)$  をつかえば

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b \frac{f(x)}{g(x) \mp i\delta} dx = P \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \pm i\pi \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \\
 &= \int_a^b \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{(x-x_0)g'(x_0)} \right\} dx + \frac{f(x_0)}{g'(x_0)} \ln \frac{b-x_0}{x_0-a} \\
 &\quad \pm i\pi \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

(18)の右辺にあらわれている積分の被積分関数は  $a < x < b$  の範囲で正則であるから数値積分は簡単に行なうことができる。

(6a)で与えられているグリーン関数に対しては、 $1 > |\varepsilon| > \frac{1+\delta}{1+2\alpha_1\beta+\delta}$  の時はまず  $\varepsilon$  についての積分を行なえばこの時上の方法が使え、又  $\frac{1+\delta}{1+2\alpha_1\beta+\delta} > |\varepsilon| > \frac{\sqrt{2\delta+\delta^2}}{1+2\alpha_1\beta+\delta}$  の時は積分変数を  $(x, y, z)$  から極座標  $(r, \theta, \phi)$  に変換した後  $r$  についての積分を行なえばこの時上の方法が使え。

スピン波エネルギーバンドの外  $\varepsilon$  ( $|\varepsilon| < \frac{\sqrt{2\delta+\delta^2}}{1+2\alpha_1\beta+\delta}$ ,  $|\varepsilon| > 1$ ) に対しては(6a)は直接数値積分することができる。特に  $\varepsilon$  の値がエネルギーバンドから十分はなれている場合には、(6a)の被積分関数の分母の三角関数を含む項をその他の項にくらべて小さいとして得られる級数(この級数の各項はすべて積分可能である)の和を求めることによりグリーン関数の値を簡単に求めることができる。<sup>\*</sup> 又いくつかのグリーン関数は、バンドの外  $\varepsilon$  に対して、より簡単な形に書き直すことができる。例えば  $t \equiv (1+\delta)^2(\varepsilon^2-1)$  として  $\alpha_1=0$  のとき

\*実際にはこの方法は  $\varepsilon$  がバンド中(あるいはその以下)しかバンドからはなれていない場合にもかなり有効である。

$$-\frac{\Gamma(000, 000; \delta, 0; \varepsilon)}{(1+\delta)^2(\varepsilon+1)} = -\frac{\Gamma(III, III; \delta, 0; \varepsilon)}{(1+\delta)^2(\varepsilon-1)} = f_0(t), \quad (19a)$$

$$-\frac{\Gamma(III, II-1; \delta, 0; \varepsilon)}{(1+\delta)^2(\varepsilon-1)} = 2f_1(t) - f_0(t), \quad (19b)$$

$$-\frac{\Gamma(III, I-1-1; \delta, 0; \varepsilon)}{(1+\delta)^2(\varepsilon-1)} = 4f_2(t) - 4f_1(t) + f_0(t), \quad (19c)$$

$$-\frac{\Gamma(III, -1-1-1; \delta, 0; \varepsilon)}{(1+\delta)^2(\varepsilon-1)} = 8 - 12f_2(t) + 6f_1(t) - (1+8t)f_0(t), \quad (19d)$$

但し

$$f_0(t) = \frac{8}{\pi^3} \iiint_0^{\pi/2} \frac{1}{t + \cos^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \cos^2 z} dx dy dz, \quad (20a)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{t + \cos^2 z}} \cdot F\left(\frac{\cos z}{\sqrt{t + \cos^2 z}}\right) dz, & (t > 0) \\ \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{t} \int_0^{\pi/2} F(\cos z / \sqrt{-t}) dz, & (t < -1) \end{cases} \quad (20b)$$

$$(20c)$$

$$f_1(t) = \frac{8}{\pi^3} \iiint_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 z}{t + \cos^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \cos^2 z} dx dy dz, \quad (21a)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 z}{\sqrt{t + \cos^2 z}} \cdot F\left(\frac{\cos z}{\sqrt{t + \cos^2 z}}\right) dz, & (t > 0) \\ \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{t} \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \cdot F(\cos z / \sqrt{-t}) dz, & (t < -1) \end{cases} \quad (21b)$$

$$(21c)$$

$$f_2(t) = \frac{8}{\pi^3} \iiint_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 y \cdot \cos^2 z}{t + \cos^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \cos^2 z} dx dy dz, \quad (22a)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\pi/2} \left\{ \sqrt{t + \cos^2 z} \cdot E\left(\frac{\cos z}{\sqrt{t + \cos^2 z}}\right) - \frac{t}{\sqrt{t + \cos^2 z}} \cdot F\left(\frac{\cos z}{\sqrt{t + \cos^2 z}}\right) \right\} dz, & (t > 0) \\ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \left\{ E\left(\frac{\cos z}{\sqrt{-t}}\right) - F\left(\frac{\cos z}{\sqrt{-t}}\right) \right\} dz, & (t < -1) \end{cases} \quad (22b)$$

$$(22c)$$

==  $z \cdot F(x)$ ,  $E(x)$  は  $z$  の  $z$  の第一種, 第二種の完全楕円積分

分である。  $t \rightarrow +0$   $z$   $f_0(t)$ ,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  は発散する。  $z$  の  $z$  の

leading term は  $(\ln t)^2 / 2\pi^2 \sqrt{t}$ ,  $-c_1 \ln t / \sqrt{t}$ ,  $C_2 / \sqrt{t}$

( $C_1, C_2$  は正の定数) となる。

#### §4. 数値計算の結果

§3で述べた方法により  $\delta = \alpha_1 = 0$  の場合及び反強磁性体  $MnF_2$  に対する  $\delta, \alpha_1$  の値:  $\delta = 0.016, \alpha_1 = 0.18$  の場合について、種々のグリーン関数のバンド内の  $\varepsilon$  に対する数値を求めた<sup>\*</sup>。数値積分は分桌数が28のガウス法によった。次頁の図に

$$\eta_0(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \{ \text{Im}[\Gamma(j, j; \delta, \alpha_1; \varepsilon + i\delta)] + \text{Im}[\Gamma(l, l; \delta, \alpha_1; \varepsilon + i\delta)] \} \quad (23)$$

より計算されるスピオン波状態密度:  $\eta_0(\varepsilon)$  の結果を示す。  $\delta = \alpha_1 = 0$  の場合、 $|\varepsilon|$  が1に近づくにつれてグリーン関数の計算の精度は悪くなるが ( $\delta = \alpha_1 = 0$  の場合 Van Hove singularity は  $|\varepsilon| = 1$  のみで起る)、実数部については  $|\varepsilon| \lesssim 0.99$  の2~4桁の有効数字で、又虚数部については  $|\varepsilon| \lesssim 0.999$  の5~8桁の有効数字の結果が求められた<sup>\*\*</sup>。  $\delta = 0.016, \alpha_1 = 0.18$  の場合の有効数字も特別な場合を除いて同程度である。特に実数部に対する計算の精度をよくする為には、数値積分の分桌数を増すこと及び場合によつては倍数精度の計算を行なうことが必要である。尚 (20)~(22) で与えられてゐる  $f_0(t), f_1(t), f_2(t)$  についても十分よい精度で数値を求めた<sup>\*</sup>。

\* かわしい結果を必要とされる方は著者に連絡されたい。

\*\* この精度は§2で述べたグリーン関数の間の関係式をもちいて評価したものである。



