

Title	S^1 -作用のコボルディズム (コボルディズム理論)
Author(s)	服部, 晶夫; 谷口, 肇
Citation	数理解析研究所講究録 (1971), 131: 104-121
Issue Date	1971-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/106580
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

S^1 -作用のコホモロジー

東大 理 服部 晶夫
上智大 理工 谷口 肇

§1 序

この小論に於ては、群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の可微分多様体への作用につき、その固定点の集合の近傍の幾何学的考察により、各点の固定化群 (isotropy subgroup) の集合がなるべく簡単なものを、コホモロジーの範囲で求める事を示す。最も簡単な場合、即ち固定化群として $\{1\}$ (自明な群) のみが見られる場合は、問題、多球体のその軌道空間上の主 S^1 -バンドンであり、又 $\{1\}$ と S^1 のみが見られる場合は作用は semi-free であるといわれ、これについて例えの内の [7] がある。一般に G を S^1 の部分群の族とするとき次のように定義する。

定義 1 S^1 の作用する開じた、向き付けられた可微分多様体で、固定化群として G の要素のみが見られるものの作用のコホモロジー群を $\Omega_*(X)$ とする。(但し $n=0$ の多様体、

ゴホルディンズムを与えられた次元高多様体について固定化群の要素であるとする。

∴ 上記の群として次のようなものを考える。 $Z_k \subset S^1$ を位数 k の巡回群として

① $J_k = \{ Z_k \mid k \leq l \}$

② $J_l^+ = J_l \cup \{ S^1 \}$

③ $J_\infty = \bigcup_{l=1}^{\infty} J_l$ ④ $J_\infty^+ = \bigcup_{l=1}^{\infty} J_l^+$

又多様体 M に対して次のように置く。

$F = \{ x \in M \mid \forall g \in S^1 \quad gx = x \}$

$F_k = \{ x \in M \mid \forall g \in Z_k \quad gx = x \}$

∴ F は固定点の集合であり case ① に於ては $F = \emptyset$ である。又 F, F_k は各連結成分は M の部分多様体である。

定義 2. 定義 1 に於て各 F, F_k の法ベクトルは S^1 の作用と両立する複素構造が与えられているもの (ゴホルディンズムについても同様) を作るゴホルディンズム群を $\Omega_*^u(J)$ とかく。同様にして S^1 の作用と両立する弱複素構造を持つ多様体のゴホルディンズム群を $\Omega_*^u(J)$ とする。このとき次の定理が成り立つ。

定理 I. G_e は case ① J_e , case ② J_e^+ のいずれかとし、 G_{e-1} は ① J_{e-1} , ② J_{e-1}^+ とする。

i) 自然な写像 $\Omega_*^u(G_{e-1}) \rightarrow \Omega_*^u(G_e)$ は単射である。

ii) $\Omega_*^u(G_e) = \Omega_*^u(G_{e-1}) + \mathcal{Q}(G_e)$ と可なり。

∴ $\mathcal{P}(g_c)$ の後に説明する "twisted projective space bundle" $\mathcal{P}_\psi(V \otimes ())$ で生成された部分群で, $V \rightarrow F_c$ の際 ψ は多様体 F_c 上の S^1 -作用 ψ をもつ実ベクトルバンドル. ψ は V の zero-section F_c でのみ自明で, 固定化群 Z_c とする.

定理 I' ii) 自然な写像 $\Omega_*(g_{c-1}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow \Omega_*(g_c) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ は単射である.

ii) $\Omega_*(g_c) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \Omega_*(g_{c-1}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] + \mathcal{P}(g_c) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ とわかる. ∴ $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{ m/2^k \mid m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \}$.

定理 II. $\Omega_*^U(g_c)$ については定理 I と同様の命題が成り立つ.

定理 III. 自然な写像 $\Omega_*^U(F_\infty) \rightarrow \Omega_*^U(F_\infty^+)$, $\Omega_*^U(F_\infty) \rightarrow \Omega_*^U(F_\infty^+)$ は互いに自明な写像である.

定理 IV (Atiyah - Singer) S^1 の作用 ψ をもつ M について,

i) $\text{sign } M = \sum_F \text{sign } F$

ii) $T_y(M) = \sum_F (-1)^{d_F} T_y(F)$ 但し $(M, \psi) \in \Omega_*^U(F_\infty^+)$ ψ の作用

にて \sum_F は各連結成分にわたる. d_F は適当な自然数である.

注意. 定理 I ~ III による Ossa [6] と重複した部分がある.

以下 § 2 において定理 I ~ III の証明を行い, § 3 において F, F_c の法 ψ の複素構造に関連して定理 (3.1) を証明する.

2.8.4 で定理 IV の証明と ステップ 3.3.

§ 2. 定理 I ~ III の証明.

M と S' の作用 ψ を持つ多様体, その位数有限の固着化群の中で位数最大のものを Z_e とし F_e の管状近傍と V とすると, 連結成分をとる事により次の状況を考えればよい事分かる.

i) F_e は閉じた多様体.

ii) ψ は F_e 上の S' の semi-free 作用.

iii) $V \rightarrow F_e$ はベクトルバンドル.

iv) S' の F_e への作用 ψ^l と $\psi^l(g) \cdot z = \psi(g^l) \cdot z \quad g \in S', z \in F_e$

で定義すると, ψ は S' のベクトル $V \rightarrow F_e$ への作用であり,

その zero-section F_e への制限が ψ^l である. 特に Z_e は $V \rightarrow F_e$ のベクトル自己同型として作用する. 又 $V - F_e$ (差集合) の各点に対して固着化群は $Z_k, 1 \leq k < e, k | e$ である.

v) ベクトル $V \rightarrow F_e$ は複素構造 ψ' を持つ: これは ψ と可換である. (但し定理 I' に於ては定理 (3, 1) と適用する.)

∴ 以下のように多様体 W の構成を試みる.

i) $\partial W = \dot{V}$ (但し \dot{V} は $V \rightarrow F_e$ に付随した球バンドル)

ii) W は, S' の作用で $\partial W = \dot{V}$ と ψ と一致するものとする.

∴ これは ψ と可換.

iii) W の点に対し ψ の有限個の固定化群、位数は $\leq l-1$ である。

このように W に対し $M = (M - \text{Int } V) \cup W + V \cup W$ と区別した事により定理 I' II が得られ、又 $M_1 = (M - \text{Int } V) \cup W$ に対し有限個の固定化群の位数が M のものより小さいから位数に関する帰納法により定理 III IV を得る。

S' の多様体 V への作用 ψ が ψ と transversal (既に ψ と ψ' は可換で且つ V の各点に対し ψ と ψ' の軌道は ψ の点でのみ交わる。) 且つ V 上自由なものを作らんと目的として次のように示さる。まず V 上の ψ 不変な部分 V_i として V の直和に分ける。

$$V = \sum_i V_i$$

且つ $S = \exp(2\pi\sqrt{-1}/l)$ に対し $\psi(S)$ の作用は各 fibre 上固定するがこれが V_i 上

$$(1) \quad \psi(S)^{l_i} \cdot u = \psi(S)^{l_i} \cdot u \quad u \in V_i$$

を満足するものとする。ここで l_i は $\text{mod } l$ で定まる整数だから固定点の集合 F は $F \subset F_i$ に注意して

$$0 < l_i < l$$

が成り立ちます。このとき $(l, l_i) = d_i$ とおくと $V_i - F_i$ の各点に対し固定化群は $\mathbb{Z}d_i$ である。

次に ψ の "fibre 方向" の S' の作用と合せると、これに対し

1. "底空間方向" の S^1 の作用 ψ を次のように定義する。

$g \in S^1$ に対して V_i 上 $\psi(g) \psi'(g^{-l_i})$ の作用を考えると $g = 5$

に対して $\psi = 1$ となるから、 $S^1 \times V$ の作用 ψ'' を V_i 上で

$\psi''(g^l) = \psi(g) \psi'(g^{-l_i})$ とするものが定義される。 ψ'' の F_i への

作用 $g \in V$ の振動を V_i 上

$$(2) \quad \psi(g) = \psi''(g^l) \psi'(g^{l_i}) \quad g \in S^1$$

であり、case ① に於ては ψ' と ψ'' は transversal である。

∴ 次の式で定義される S^1 の作用 ψ_1 を考える。

$$(3) \quad \psi_1(g) = \psi''(g^a) \psi'(g) \quad g \in S^1$$

但し case ① に於ては $a = 1$ 、② に於ては $a = 2$ とする。∴

水に対して

i) ψ_1 は \dot{V} 上自由である。

iii) case ① に於ては ψ と ψ_1 は transversal である。

∴ 水の場合も i) に注意して $P_\psi(V) = \dot{V}/\psi_1$ とおき、 W を $\dot{V} \rightarrow P_\psi(V)$ に附随した胞バンドルとすると、

i) W は $\partial W = \dot{V}$ 上の作用 ψ の振動をもつ。(∵ 水と ψ とかく。)

ii) W 上、 ψ の作用の有限巡回化群 (case ① の場合は：水に限る。) の位数は $\leq l-1$ である。

今 ii) の計算を後図 1 により $M_1 = (M - \text{Int } V) \underset{\dot{V}}{\smile} W$, $P_\psi(V \oplus 1) = V \underset{\dot{V}}{\smile} W$ とおくと次の i) ~ iii) が " 水 " として証明が終了。

i) $M_i, P_\psi(V \otimes 1)$ の作用 ψ をもつ。

ii) M の作用 ψ : $M_i + P_\psi(V \otimes 1)$ にコホモロジとして

iii) M_i 上の作用の同変化群の中有限のもの、位数 $l_i \leq l-1$.

さて同変化群の計算であるが $W = P_\psi(V) \cong \dot{V} \times [0, 1]$ であるから $P_\psi(V)$ 上の作用を考えると十分である。写像 $\dot{V} \rightarrow \dot{V}/\psi = P_\psi(V)$

による $v \in \dot{V}$ の像を $[v]$ とかく。case ①では $v = \sum_i v_i$

$v_i \in V_i, v_i \neq 0$ に対して

$$\psi(g)[v] = [v] \quad g \in S^1 \iff \exists h \in S^1 \quad \psi(g)v = \psi(h)v$$

ii) に対して $a = 1$, 故に $\iff v_i \quad g^{l-l_i} = 1$

従って位数は $l-l_i$ 又はそれの l の l の公約数で $\leq l-1$.

case ②で $F \neq \emptyset$ とする。 F の連結成分の一つを F^0 とする。

F^0 への作用は自明であるから $V|_{F^0} \cong V|_{F^0} (V \text{ の } F^0 \text{ への制限})$ の各 fibre は同変である。このとき各 $V|_{F^0}$ が F^0 の ψ の分解

$$V_i|_{F^0} = \sum_j V_{ij}$$

但し V_{ij} は ψ -不変で V_{ij} 上 ψ の作用は

$$\psi(g)u = \psi(g^{l_{ij}})u \quad u \in V_{ij}$$

で与えられる。ここで $l_{ij} \in \mathbb{Z}$, 且つ $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/l)$ の作用

を考えると $l_{ij} \equiv l_j \pmod{l}$ である。有限の同変化群の位数 $\leq l$ である。これを考えると l_{ij} と l の高々 l 又は $l_i - l$ のみが現われる。 $l_{ij} = l_i$ に対応する V_{ij} は $V_i^+(F^0)$,

$l_{ij} = l_i - l_j$ に対応する l_i と $V_i^-(F^0)$ と l_j と $V_j^-(F^0)$ と $l_i - l_j$ の
 対応もする。したがって

$$V_i | F^0 = V_i^+(F^0) \oplus V_i^-(F^0)$$

$$\psi(g)u = \begin{cases} \psi'(g^{l_i})u & u \in V_i^+(F^0) \\ \psi'(g^{l_i-l_j})u & u \in V_i^-(F^0) \end{cases}$$

$P_q(V)$ の固定化群を求めたのである

a) $P_q(V) | (F_0 - F)$ の上で $q = 2$ に注意して case ① のと同
 様に計算すると $l/l_i = 2$ となるのは $P_q(V_i)$ の固定点の集合、
 それ以外では $|l - 2l_i|$ 又はそれのいくつかの公約数が固定
 化群の位数で $\leq l-1$ である。

b) $P_q(V) | F^0$ の上で $v = \sum v_{i_s}^+ + \sum v_{j_t}^-$ $v_{i_s}^+ \in V_{i_s}^+(F^0)$,
 $v_{j_t}^- \in V_{j_t}^-(F^0)$ $v_{i_s}^+ \neq 0$, $v_{j_t}^- \neq 0$ と対応して

$$\begin{aligned} \psi(g)[v] = [v] &\iff \exists h \in S' \quad \psi(g)v = \psi(h)v \\ &\iff \forall s \quad g^{l_{i_s}} = h \\ &\quad \forall t \quad g^{l_{j_t}-l} = h^{-1} \end{aligned}$$

従って $\{l_i\} \cup \{l-l_i\}$ の中相異なるものは $\{k_j\}_{j=1}^r$ 各 k_j
 によって対応する $V_i^+(F^0)$ 又は $V_i^-(F^0)$ の通称を $V(k_j)$ とすると
 $P_q(V(k_j)) = V(k_j) / \psi$ は ψ の固定点の集合であり、又有限
 の固定化群の位数は $k_j - k_j$ 又はそれのいくつかの公約
 数の公約数であり特に $\leq l-1$ である。

§ 3. $\Omega_*(g_e)$ と $\bar{\Omega}_*^u(g_e)$ の比較.

自然写像 $\bar{\Omega}_*^u(g_e) \rightarrow \Omega_*(g_e)$ の像と $\bar{\Omega}_*^u(g_e)$ と $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ の関係は、この § で以下の定理を証明する。(§ 2 の § 2 と同様)

$$\text{定理 (3.1)} \quad \bar{\Omega}_*^u(g_e) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \Omega_*(g_e) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$$

§ 2, p. 4 の data (i) ~ vi を考え、但し (iii) ~ (vi) を (i) ~ (iv) の代りに

$$vi) \quad w_i(F_e) = w_i(V \rightarrow F_e)$$

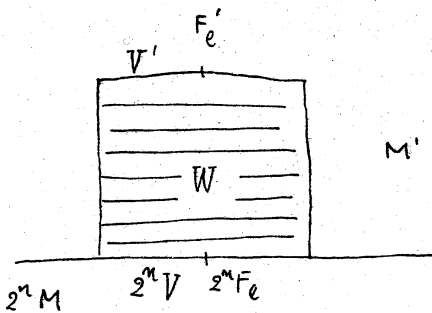
とする。このように四つの \mathfrak{g} の組 (F_e, φ, V, ψ) 同士の間のコホモロジーとこの概念が自明な方法で定義される。勿論 (F_e, φ, V, ψ) と $(F'_e, \varphi', V', \psi')$ の間のコホモロジーで、 φ と φ' は semi-free 作用で、 ψ と ψ' は底空間以外での同変化群が \mathfrak{g} である F_e に属する \mathfrak{g}' -作用で結ばれたものとする。このコホモロジー類を $[F_e, \varphi, V, \psi]$ で表わすことにする。

補題 (3.2) 任意の (F_e, φ, V, ψ) に対し、自然数 n と $(F'_e, \varphi', V', \psi')$ が存在し、 $[F'_e, \varphi', V', \psi'] = 2^n [F_e, \varphi, V, \psi]$ 、且つ V' は ψ' -不変な複素ベクトル空間の構造をもつ。

(3.2) を認めると (3.1) の次のように証明される。明らか $\bar{\Omega}_*^u(g_e) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow \Omega_*(g_e) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ は単射だから、 $\bar{\Omega}_*^u(g_e) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ は $\Omega_*(g_e) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ の部分群である。よって、 $[M, \varphi] \in \Omega_*(g_e)$ に対し、自然数 n と $[M', \varphi'] \in \bar{\Omega}_*^u(g_e)$ が存在し

て $[M', \psi'] = 2^m [M, \psi]$ と存する事を示せよう。 F_c を § 1 の
 同様 Z_c の固先端とし、その M に於ける法ベクトル ν を
 V とする。 § 2 に述べたように (F_c, ψ, V, ψ) は (3.2) に
 於けるような組である。 $\mu: \mathbb{C}(3.2)$ による m と $(F'_c, \psi',$
 $V', \psi')$ をとり $2^m (F_c, \psi, V, \psi)$ と (F'_c, ψ', V', ψ') の間のコホ
 ーモロジーを (X, Φ, W, Ψ) とする。 右 V は F_c の M に於ける
 管状近傍と同視し、 V', W も胞バレルを表現したものとし
 る。 \dot{W} の以前と同様に球バレルを表現したものとし
 る。 $M' = 2^m (M - \text{Int } V) \cup \dot{W} \cup V'$ とし、 $2^m (M - \text{Int } V)$ 上

$\psi' = \psi, \dot{W} \pm \psi' = \Psi|_{\dot{W}}$ として V'
 上の ψ' を M' に \mathbb{C} で拡張すると、
 作りおから $[M', \psi'] = 2^m [M,$
 $\psi]$ であり、 $[M', \psi'] \in \overline{\mathcal{D}}_x^u(g_c)$
 である。



以下 (3.2) の証明の概要を述べる。 場合を二つに分ける。
 F_c は連結として差支えなし。

1) $w_1(F_c) = w_1(V \rightarrow F_c) \neq 0$. F_c の向付付可能な
 二重被覆多様体 $F'_c \xrightarrow{\pi} F_c$ とする。 ψ による \mathcal{S}' -軌道は
 互にホモトピーで、局所的な向きを定めた $(\pi(F_c))$ の元と見な
 して、 $\pi(F'_c) \subset \pi(F_c)$ に属する。) : とが確かされる。

故から F'_e 上の S' 作用 Ψ' で射影 π と可換なものである。特に Ψ' の下で F'_e 上の S' 軌道が Ψ の S' -軌道と覆う。 $V' = \pi^*V$ とし、 V' 上の S' -作用 $\Psi' = \Psi \times \Psi$ で与える。 F'_e と $2F_e$ の間のコホモロジー $H^1(X)$ を Dold の方法により作る ([2])。この際、 Ψ' と Ψ の関係に注意すると、 X は Ψ' 及び 2Ψ を拡張した S' -作用 Ψ' による。と分かる。 X は $F_e \times I$ 上の分岐した被覆多様体になる。そこで、その射影により V と X 上に π^* が与えられたバンドル W をつくる。これができ、 Ψ' による S' -作用 $\Psi' = \Psi \times \Psi$ で与える。作り方から (X, Ψ, W, Ψ') は $2(F_e, \Psi, V, \Psi)$ と (F'_e, Ψ', V', Ψ') の間のコホモロジー H^1 を与える。 $w_1(F'_e) = w_1(V' \rightarrow F'_e) = 0$ とから次の場合へ帰着される。

2) $w_1(F_e) = w_1(V \rightarrow F_e) = 0$ § 2 と同様 V は Ψ -

不変な部分ベクトルバンドルの直和

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots$$

に分解する。但し $S = \exp(i\theta)$ $\theta = 2\pi/l$ に対し、 $\Psi(S)$ の V の各 fibre を固定するが各 fibre 上の作用が V_i 上で行列

$$\begin{pmatrix} \cos l_i \theta & -\sin l_i \theta \\ \sin l_i \theta & \cos l_i \theta \end{pmatrix} \quad 0 < l_i < l$$

の直和で与えられるものとする。 $i \geq 1$ に対し、 $l_i \neq l/2$ とすれば V_i ($i \geq 1$) は Ψ -不変な複素ベクトルバンドル。構造 Ψ' で

$$(1) \quad \psi(s) \cdot v = \psi'(s^{l_i}) v \quad v \in V_i$$

と行っても、と導入した：とかで、又 V_0 上での S の作用は

$$(2) \quad \psi(s) v = -v$$

と与えられたものと一致する。 $i \geq 1$ に対しては、 S_2 により ψ と可換で、 ψ を拡張した V_0 上の S' -作用 ψ' がある。

∴ である、 Fe 上 ψ が固定点をもちないことである。従って Fe/ψ は多様体であり、 $\rho: Fe \rightarrow Fe/\psi$ は S' -バンドルである。この S' -バンドルを η とかく。又、 $i \geq 1$ に対しては、 $V_i/\psi^i \rightarrow Fe/\psi$ は Fe/ψ 上の複素ベクトルバンドル ξ_i を与える。すなわち複素ベクトルバンドル V_i は ρ により ξ_i とおきかえらるもので、 ρ での S' -作用 ψ は (1) から

$$(3) \quad \psi = \psi^l \times \psi^r$$

の形である。但し $\psi^l(g) = \psi^r(g) \quad g \in S'$ など。

次に (2) により V_0 上 $v \mapsto -v$ の向きを得る。従って

$\dim V_0 = 2d_0$ の形であり、 V_0 の構造群は $SO(2d_0)$ である。

V_0 に付随し、群 $PSO(2d_0) = SO(2d_0)/\{\pm 1\}$ をもつバンドル $\bar{\xi}_0$ とする。 (2) により、 ψ は $\bar{\xi}_0$ のバンドル写像 ρ による S' -作用 (これは ψ とかく。) を導く。 $\bar{\xi}_0/\psi \xrightarrow{\pi_0} Fe/\psi$ は Fe/ψ 上の $PSO(2d_0)$ -バンドルである。(これは $\bar{\xi}_0$ とかく。) かくして、向き付けられた多様体 $Fe/\psi = N$ 、 N 上の $U(1)$ -バンドル η 、 $PSO(2d_0)$ -バンドル $\bar{\xi}_0$ 、 $R^+U(d_0)$ -バンドル ξ_0 の

V_0/\mathbb{Z}_2 上: 軌道球 B^1 上 V_0 を覆われ, $p^* \alpha(\xi_0) = 0$.

故に $\alpha(\xi_0) = a \omega_2(\eta)$. $a = 0$ 又は 1 だが $\pi_0^* \eta$ は V_0/\mathbb{Z}_2 上

$V_0/4$ であるから, $V_0/\mathbb{Z}_2 \rightarrow V_0/4$ は S^1 上 π を覆われ

たから, $\omega_2(\eta) = b \alpha(\xi_0)$ $b = 0$ 又は 1 だが $\alpha(\xi_0)$

$= ab \cdot \alpha(\xi_0)$. 故に $ab = 1$, $a = 0$ 又は $b = 0$ 又は $\alpha(\xi_0) = \omega_2(\eta)$

とある。

(3.4) の証明 $\Omega_* (B^U \times \pi BU(d_1)) \oplus \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \Omega_* \oplus$

$H_* (B^U \times \pi BU(d_1), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, $\Omega_* (B \times \pi BU(d_1)) \oplus \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong$

$\Omega_* \oplus H_* (B \times \pi BU(d_1), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ であり, 且つ

$H_* (B^U \times \pi BU(d_1), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]) \rightarrow H_* (B \times \pi BU(d_1), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$

が全射であり, \dots

(3.3) (3.4) から (3.2) の次, (4) を導かれる。(3.3)

(3.4) から

(4) $\Omega_* (B^U \times \pi BU(d_1)) \rightarrow \Omega_* (BU(1) \times BPU(d_0) \times \pi BU(d_1))$

の像に属する $[M', \eta', \xi_0', \xi_1', \dots]$ で,

$\Omega_* (BU(1) \times BPU(d_0) \times \pi BU(d_1)) \rightarrow \Omega_* (BU(1) \times BPSO(d_0) \times \pi BU(d_1))$

により $2^n [M', \eta', \xi_0', \xi_1', \dots]$ になるが, η' は $F_e' \xrightarrow{\varphi'}$

より S^1 上 π を覆われ, F_e' は $PU(d_0)$ 上

$\pi^* \xi_0'$ を考えると, (4) を使うと, $\pi^* \xi_0'$ は覆

き V_0/\mathbb{Z}_2 上 $V_0 \rightarrow V_0/\mathbb{Z}_2$ を覆われ, \dots

と分かる。 S^1 上 π と F_e' 上の S^1 作用を φ' とする

と、行方から V_0' 上には $(\varphi')^2$ を拡張する作用があり、従、
 $(\varphi')^2$ を拡張する S' 作用 ψ' がある。 $\psi'^* \xi'_i = V_0'$ 上にも (3)
 と同様の方法で S' 作用 ψ' が定義される。 ($i=1$) 従、 $(V'$
 $= V_0 \oplus V_1 \oplus \dots$ 上にも ψ' が定義された。 行方から $[F_0', \varphi',$
 $V', \psi'] = 2^n [F_0, \varphi, V, \psi]$ である。 以上により φ の固定点
 集合 $F = \phi$ なることより (2.2) は証明された。 $F \neq \phi$ なる
 場合は、 $V_0|F$ 上では既に φ 不変な複素ベクトル空間
 の構造が入る。 それを φ 不変な F の F_0 の管状近傍 U として
 $V_0|U$ にも拡張し、後は ψ' と同様の議論により $(F_0',$
 $\varphi', V', \psi')$ を構成する。

§ 4 Atiyah - Singer の η と Kosniowski の η

$[M, \varphi] \in \Omega_n(F_0)$ とする。 $F = \cup F^i$ を φ の固定点の集
 合 F の連結成分への分解とする。 各 F^i の法ベクトル空間 W^i
 W^i は複素ベクトル空間の構造と φ は W^i の自己同型
 として作用する。 従、 $(W^i$ は複素ベクトル空間として、

$$W^i = \sum W_j^i$$

$$\varphi|_{W_j^i} = g^{l_{ij}} \quad \psi \in W_j^i$$

と分解するが、以下では $l_{ij} > 0$ となるような複素構造を入
 れると約束する。 それにより F^i の向きも確定する。 $\eta^i =$

$\dim_{\mathbb{C}} W'$ とおく, Atiyah - Singer の公式 (定理 IV 1)) は更に

$$\text{sign } M = \sum_{i \text{ 偶数}} \dim \text{sign } F^i$$

$$0 = \sum_{i \text{ 奇数}} \dim \text{sign } F^i$$

と述べられる; [1]。又 Kosniowski の公式 (定理 IV 11)) にも
 同じものが述べられている; [4]。これらの公式は Atiyah - Singer
 の定理の特別な場合として得られるが、 $l=1$ のとき、 3 の
 作用が semi free のときは川又保 旧田 [3], 松本 (亮)
 [5] による Johnson 形式の範囲内での初等的証明がある。 l
 が一般の場合でも、§2, §3 を用いて同じ種類の証明の証
 明を与える事ができる。以下では Atiyah - Singer の公式に
 ついて先づおくため、以下を述べよう。

§3 により $[M, \psi] \in \Omega_{2l}^*(\mathcal{F}_e^+)$ とし、差をえながら F_e は
 以前の通り Z_e の固定点集合とし、 $F_e = \cup F_e^0$ を連結成分
 への分解、 V^0 を F_e^0 の法ベクトルバンドルとし、後述の
 ように V^0 の ψ 不変な複素ベクトルバンドル V の構造をもつ。
 §3 と §2 により、

$$(1) [M, \psi] = \sum_{\alpha} [R_{\psi}(V^{\alpha} \otimes 1), \psi] + [M_1, \psi]$$

とわかる。ここで $M_1 = (M - \psi \text{Int } V^0) \cup W^0$, $R_{\psi}(V^{\alpha} \otimes 1)$
 $= V^{\alpha} \cup W^0$ であり、 $[M_1, \psi] \in \Omega_{2l}^*(\mathcal{F}_e^+)$ 。我々の公式と
 [6] に関する帰納法の証明より、($l=1$ のときは [3], [5]
 と同じ)。 $[M_1, \psi] \in \Omega_{2l}^*(\mathcal{F}_e^+)$ であり、又 $R_{\psi}(V^0) \subset M_1$ は

ψ 不変 k から $[P_{\psi}(V^0), \psi] \in \mathcal{Q}_*(S_{\mathbb{C}})$.

この両者に帰納法の仮定に ψ (公式と適用) ψ とにより,

$$\begin{aligned} (2) \quad 0 &= \text{sign } M_{\psi} - \sum_{F_e, F^i = \phi, d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i \\ &= \sum_0 \text{sign } P_{\psi}(V^0) + \sum_{F_e, F^i = \phi, d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i \end{aligned}$$

を得る。

次に, $P_{\psi}(V^0 \oplus 1)$ 上の semi free 作用 ψ^{\oplus} k に ψ と適用し,

$$(3) \quad \text{sign } P_{\psi}(V^0 \oplus 1) = \sum_{F^i \subset F_e^0, d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i$$

又, $P_{\psi}(V^0)$ 上の semi free 作用 ψ^{\oplus} に ψ と適用し,

$$(4) \quad \text{sign } P_{\psi}(V^0) = \sum_{F^i \subset F_e^0, d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i$$

を得る。

以上の準備とすれば, (1), (2), (3) から

$$\begin{aligned} \text{sign } M &= \sum_0 \text{sign } P_{\psi}(V^0 \oplus 1) + \sum_{F_e, F^i = \phi, d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i \\ &= \sum_{d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i \end{aligned}$$

又 (2), (4) から

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_0 \text{sign } P_{\psi}(V^0) + \sum_{F_e, F^i = \phi, d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i \\ &= \sum_{d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i \end{aligned}$$

参考文献

- [1] M. Atiyah and I. Singer, "The index of elliptic operators: III," *Ann. of Math.* 87 (1968)
- [2] A. Dold, "Démonstration élémentaire de deux résultats du cobordisme," *Ehresmann seminar notes*, Paris, 1958-59.
- [3] K. Kawakubo and F. Uchida, "On the index of a semi-free S^1 -action," *Proc. Japan Acad.* 46 (1970), 620-622.
- [4] C. Kosniowski, "Applications of the holomorphic Lefschetz formula," *Bull. London Math. Soc.* (2), 1970.
- [5] T. Matsumoto
- [6] E. Ossa, "Fixpunktfreie S^1 -Aktionen," *Math. Ann.* 186, 1970.
- [7] F. Uchida, "Cobordism groups of semi-free S^1 and S^3 -actions.