数理解析研究所講究録
131巻 1971年 104-121

S^1－作用のコボルディズム

東大　理　服部晶夫
上智大　理工　谷口　肇

§1　序

この小論に於ては，群 $S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ の可微分多様体への作用につき，その固定点の集合の近傍の幾何学的な考察により，各点の固定化群（isotropy subgroup）の集合がなるべく簡単なものを，コボルディズムの範囲で求める事を考える。最も簡単な場合，即ち固定化群として $\{1\}$（自明な群）のみが現われる場合は，問題の多様体はその軌道空間上の主 S^1－バンドルであり，又 $\{1\}$ と S^1 のみが現われる場合は作用は semi－free であるといわれ；これについては例えば内田［7］がある。一般に $\mathcal{F}$ を S^1 の部分群の族とするとき次のように定義する。

定義1　S^1 の作用する閉じた，向き付けられた可微分多様体で，固定化群として $\mathcal{F}$ の要素のみが現われるものの作るコボルディズム群を $\Omega_*(\mathcal{F})$ とする。（但し二つの多様体の

コボルディズムを与える一次元高い多様体についても固定化群は$\mathfrak{F}$の要素であるとする。)

ここでは$\mathfrak{F}$として次のようなものを考える。$\mathbb{Z}_k \subset S^1$を位数kの巡回群として

① $\mathfrak{F}_l = \{ \mathbb{Z}_k \mid k \leq l \}$

② $\mathfrak{F}_l^+ = \mathfrak{F}_l \cup \{S^1\}$

①′ $\mathfrak{F}_\infty = \cup_{l=1}^{\infty} \mathfrak{F}_l$ 　　②′ $\mathfrak{F}_\infty^+ = \cup_{l=1}^{\infty} \mathfrak{F}_l^+$

又多様体Mに対して次のように置く。

$$F = \{ x \in M \mid \forall g \in S^1 \quad g.x = x \}$$

$$F_k = \{ x \in M \mid \forall g \in \mathbb{Z}_k \quad g.x = x \}$$

ここでFは固定点の集合であり case ①に於ては$F = \phi$である。又F, F_kの各連結成分はMの部分多様体である。

定義2. 定義1に於て各F, F_kの法バンドルにS^1の作用と両立する複素構造が与えられているもの(コボルディズムについても同様)の作るコボルディズム群を$\Omega_*^u(\mathfrak{F})$とかく。同様にS^1の作用と両立する弱概複素構造を持つ多様体のコボルディズム群を$\Omega_*^U(\mathfrak{F})$とする。このとき次の定理が成り立つ。

定理I. $\mathcal{G}_l$を case ① $\mathfrak{F}_l$, case ② $\mathfrak{F}_l^+$のいずれかとし, $\mathcal{G}_{l-1}$を① $\mathfrak{F}_{l-1}$, ② $\mathfrak{F}_{l-1}^+$とする。

i) 自然な写像 $\Omega_*^u(\mathcal{G}_{l-1}) \longrightarrow \Omega_*^u(\mathcal{G}_l)$ は単射である。

ii) $\Omega_*^u(\mathcal{G}_l) = \Omega_*^u(\mathcal{G}_{l-1}) + \wp(\mathcal{G}_l)$ とかける。

ここで $\wp(\mathcal{G}_e)$ は後に説明する " twisted projective space bundle " $P_\psi(V\oplus 1)$ で生成される部分群で，$V\to F_e$ は閉じた多様体 F_e 上の S^1-作用 ψ をもつ実ベクトルバンドル．又 ψ は V の zero-section F_e でのみ自明でない固定化群 $\mathbb{Z}_e$ をもつ．

定理 I' i) 自然な写像 $\Omega_*(\mathcal{G}_{e-1})\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\longrightarrow\Omega_*(\mathcal{G}_e)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ は単射である。

ii) $\Omega_*(\mathcal{G}_e)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]=\Omega_*(\mathcal{G}_{e-1})\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]+\wp(\mathcal{G}_e)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ とかける。ここで $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]=\{m/2^n \mid m\in\mathbb{Z},\ n\in N\}$.

定理 II. $\Omega^U_*(\mathcal{G}_e)$ について定理 I と同様の命題が成りたつ。

定理 III. 自然な写像 $\Omega^u_*(\mathcal{F}_\infty)\to\Omega^u_*(\mathcal{F}^+_\infty)$, $\Omega^U_*(\mathcal{F}_\infty)\longrightarrow\Omega^U_*(\mathcal{F}^+_\infty)$ は共に自明な写像である。

定理 IV (Atiyah - Singer) S^1 の作用する M について，

i) $\mathrm{sign}\, M=\sum_F \mathrm{sign}\, F$

ii) $T_y(M)=\sum_F(-y)^{d_F}T_y(F)$ 但し $[M,\psi]\in\Omega^U_*(\mathcal{F}^+_\infty)$ ψ は作用

ここで $\sum_F$ は各連結成分にわたる。又 d_F は適当な自然数である。

注意. 定理 I ～ III に於て Ossa [6] と重複する部分がある。

以下 §2 に於て定理 I ～ III の証明をのべ，§3 で F, F_k の法バンドルの複素構造に関連して定理 (3.1) を証明する。

又§4で定理IVの証明をスケッチする。

§2. 定理I〜IIIの証明.

MをS^1の作用ψを持つ多様体，その位数有限の固定化群の中で位数最大のものを$\mathbb{Z}_\ell$としF_ℓの管状近傍をVとすると，連結成分をとる事により次の状況を考えればよい事が分る。

i) F_ℓは閉じた多様体.

ii) φはF_ℓ上のS^1のsemi-freeな作用.

iii) $V \longrightarrow F_\ell$はベクトルバンドル.

iv) S^1のF_ℓへの作用φ^ℓを　$\varphi^\ell(g)\cdot x = \psi(g^\ell)x \quad g \in S^1, \ x \in F_\ell$

で定義すると，ψはS^1のバンドル$V \longrightarrow F_\ell$への作用であり，その zero-section F_ℓへの制限がφ^ℓである。特に$\mathbb{Z}_\ell$は$V \to F_\ell$にバンドル自己同型として作用する，又$V - F_\ell$（差集合）の各点に対する固定化群は$\mathbb{Z}_k$ $1 \leq k < \ell$，$k \mid \ell$である。

v) バンドル$V \longrightarrow F_\ell$は複素構造ψ'を持ち，これはψと可換である。（但し定理I'に於ては定理（3,1）を適用する。）

ここで次のような多様体Wの構成を試みる。

i) $\partial W = \dot{V}$　（但し$\dot{V}$は$V \to F_\ell$に附随した球バンドル）

ii) Wは，S^1の作用で$\partial W = \dot{V}$上ψと一致するものをもつ。これをもψとかく。

iii) W の点に対し ψ の有限な固定化群の位数は $\leq \ell-1$ である。

このような W に対して M と $(M-\mathrm{Int}\,V)\cup W + V\cup W$ とを比較する事により定理 I I′ II が得られ，又 $M_1 = (M-\mathrm{Int}\,V)\cup W$ に於ける有限の固定化群はその位数が M のものよりも小さいから位数に関する帰納法により定理 III IV を得る。

S^1 の多様体 V への作用 ψ_1 で ψ と transversal（既ち ψ と ψ_1 は可換で且つ V の各点に対し ψ と ψ_1 の軌道はその点で直交する。），且つ $\dot{V}$ 上自由なものを作る事を目的として次のように考える。まずバンドル $V \to F_\ell$ は ψ−不変な部分バンドル V_i の直和になっている：

$$V = \sum_i V_i$$

但し $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/\ell)$ に対して $\psi(\zeta)$ の作用は各 fibre を固定するがそれが V_i 上

(1) $\psi(\zeta)\cdot u = \psi'(\zeta^{\ell_i})\cdot u \qquad u \in V_i$

を満たすものとする。ここで ℓ_i は mod ℓ で定まる整数だから固定点の集合 F について $F \subset F_\ell$ に注意して

$$0 < \ell_i < \ell$$

なるようにとれる。このとき $(\ell, \ell_i) = d_i$ とおくと $V_i - F_\ell$ の各点に対して固定化群は Z_{d_i} である。

次に ψ は "fibre 方向" の S^1 の作用とみなせるが，これに対

して"底空間方向"の S^1 の作用 ψ'' を次のように定義する。$g \in S^1$ に対して V_i 上 $\psi(g)\psi'(g^{-l_i})$ なる作用を考えると $g = \zeta$ に対しては 1 となるから、S^1 の V への作用 ψ'' で V_i 上では $\psi''(g^l) = \psi(g)\psi'(g^{-l_i})$ なるものが定義される。ψ'' は F_l への作用 φ の V への拡張で V_i 上

(2) $\psi(g) = \psi''(g^l)\psi'(g^{l_i}) \qquad g \in S^1$

であり、case ① に於ては ψ' と ψ'' は transversal である。

ここで次の式で定義される S^1 の作用 ψ_1 を考える。

(3) $\psi_1(g) = \psi''(g^a)\psi'(g) \qquad g \in S^1$

但し case ① に於ては $a = 1$、② に於ては $a = 2$ とする。これに対して

i) ψ_1 は $\dot{V}$ 上自由である。

ii) case ① に於ては ψ と ψ_1 は transversal である。

いずれの場合も i) に注意して $P_\psi(V) = \dot{V}/\psi_1$ とおき、W を $\dot{V} \longrightarrow P_\psi(V)$ に附随した胞バンドルとすると、

i) W は $\partial W = \dot{V}$ 上の作用 ψ の拡張をもつ。(これも ψ とかく。)

ii) W 上の ψ の作用の有限な固定化群 (case ① の場合はこれに限る。) の位数は $\leq l-1$ である。

今 iii) の計算を後回しにして $M_1 = (M - \mathrm{Int}\, V) \underset{\dot{V}}{\cup} W$、$P_\psi(V \oplus 1) = V \underset{\dot{V}}{\cup} W$ とおくと次の i) 〜 iii) がいえて証明が終る。

ⅰ) M_1, $P_\psi(V\oplus 1)$ は S' の作用 ψ をもつ．

ⅱ) M は作用をこめて $M_1 + P_\psi(V\oplus 1)$ にコボルダント．

ⅲ) M_1 上の作用の固定化群の中有限のものの位数は $\leq l-1$.

さて固定化群の計算であるが $W - P_\psi(V) \cong \dot{V}\times[0,1)$ だから $P_\psi(V)$ 上の作用を考えれば十分である。写像 $\dot{V} \longrightarrow \dot{V}/\psi = P_\psi(V)$ による $v \in \dot{V}$ の像を $[v]$ とかく。case ① では $v = \sum_s v_{i_s}$ $v_{i_s} \in V_{i_s}$ $v_s \neq 0$ に対して

$\psi(g)[v] = [v]$ $g \in S'$ $\Leftrightarrow$ $\exists h \in S'$ $\psi(g)v = \psi(h)v$

(3) に於て $a = 1$, 故に $\Leftrightarrow$ $\forall s$ $g^{l-l_{i_s}} = 1$

従って位数は $l - l_i$ 又はそれのいくつかの公約数で $\leq l-1$.

case ② で $F \neq \phi$ とする。F の連結成分の一つを F^0 とする。ψ の F^0 への作用は自明だからバンドル $V|F^0$ (V の F^0 への制限) の各 fibre を固定するが，このとき各 $V_i|F^0$ が次のように分解する，

$$V_i|F^0 = \sum_j V_{ij}$$

但し V_{ij} は ψ - 不変で V_{ij} 上 ψ の作用は

$$\psi(g)u = \psi'(g^{l_{ij}})u \qquad u \in V_{ij}$$

で与えられる。ここで $l_{ij} \in \mathbb{Z}$, 因って $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/l)$ の作用を考えると $l_{ij} \equiv l_i \mod l$ である。有限の固定化群の位数 $\leq l$ であることを考えに入れると l_{ij} としては高々 l_i 又は $l_i - l$ のみが現われる．$l_{ij} = l_i$ に対応する V_{ij} を $V_i^+(F^0)$,

$l_{ij} = l_i - l$ に対応するものを $V_i^-(F^\circ)$ とかく，但し一方は 0 でもよい．そうすると

$$V_i \mid F^\circ = V_i^+(F^\circ) \oplus V_i^-(F^\circ)$$

$$\psi(g)u = \begin{cases} \psi'(g^{l_i})u & u \in V_i^+(F^\circ) \\ \psi'(g^{l_i - l})u & u \in V_i^-(F^\circ) \end{cases}$$

$\mathbb{P}_\psi(V)$ での固定化群を求めるためまず

a) $\mathbb{P}_\psi(V) \mid (F_e - F)$ の上で．$a = 2$ には意して case の と同様に計算すると $l / l_i = 2$ のときは $\mathbb{P}_\psi(V_i)$ が固定点の集合，それ以外では $|l - 2l_i|$ 又はそれのいくつかの公約数が固定化群の位数で $\leq l-1$ である．

b) $\mathbb{P}_\psi(V) \mid F^\circ$ の上で．$v = \sum v_{i_s}^+ + \sum v_{j_t}^-$　$v_{i_s}^+ \in V_i^+(F^\circ)$，$v_{j_t}^- \in V_{j_t}^-(F^\circ)$　$v_{i_s}^+ \neq 0$，$v_{j_t}^- \neq 0$ に対して

$$\psi(g)[v] = [v] \iff \exists h \in S' \quad \psi(g)v = \psi_1(h)v$$

$$\iff \forall s \quad g^{l_{i_s}} = h$$

$$\forall t \quad g^{l_{j_t} - l} = h^{-1}$$

従って $\{l_i\}_i \cup \{l - l_i\}_i$ の中相異るものを $\{k_j\}_j$ とし各 k_j について対応する $V_i^+(F^\circ)$ 又は $V_i^-(F^\circ)$ の直和を $V(k_j)$ とすると $\mathbb{P}_\psi(V(k_j)) = \dot{V}(k_j) / \psi_1$ は ψ の固定点の集合であり，又有限の固定化群の位数は $k_j - k_{j'}$ 又はそれらのいくつかのものの公約数であり特に $\leq l-1$ である．

§3. $\Omega_*(\mathcal{G}_\ell)$ と $\Omega_*^u(\mathcal{G}_\ell)$ の比較.

自然な写像 $\Omega_*^u(\mathcal{G}_\ell) \to \Omega_*(\mathcal{G}_\ell)$ の像を $\bar{\Omega}_*^u(\mathcal{G}_\ell)$ とする. この§では次の定理を証明する. ($\mathcal{G}_\ell$ は§2と同様)

定理 (3.1) $\bar{\Omega}_*^u(\mathcal{G}_\ell)\otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \Omega_*(\mathcal{G}_\ell)\otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$

§2, P.4 の data i)～v) を考える. 但しここでは v) を除きその代りに

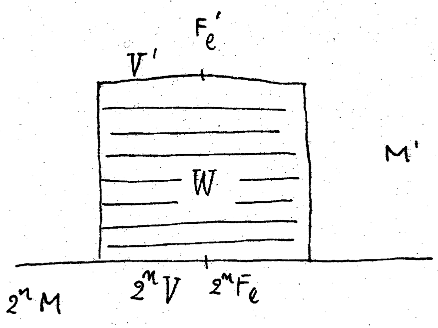
vi) $w_1(F_\ell) = w_1(V \to F_\ell)$

とする. このような四つのものの組 $(F_\ell, \varphi, V, \psi)$ 同志の間のコボルディズムという概念が自明な方法で定義される. 勿論 $(F_\ell, \varphi, V, \psi)$ と $(F'_\ell, \varphi', V', \psi')$ の間のコボルディズムで, φ と φ' は semi-free な作用で, ψ と ψ' は底空間以外での固定化群がすべて $\mathcal{F}_\ell$ に属する S^1-作用で結ばれるものとする. そのコボルディズム類を $[F_\ell, \varphi, V, \psi]$ で表わすことにする.

補題 (3.2) 任意の $(F_\ell, \varphi, V, \psi)$ に対し, 自然数 n と $(F'_\ell, \varphi', V', \psi')$ が存在し, $[F'_\ell, \varphi', V', \psi'] = 2^n[F_\ell, \varphi, V, \psi]$, 且つ V' は ψ'-不変な複素ベクトルバンドルの構造をもつ.

(3.2) を認めると (3.1) は次のように証明される. 明らかに $\bar{\Omega}_*^u(\mathcal{G}_\ell)\otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow \Omega_*(\mathcal{G}_\ell)\otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ は単射だから, それが全射であることをいえばよい. すなわち, $[M, \psi] \in \Omega_*(\mathcal{G}_\ell)$ に対し, 自然数 n と $[M', \psi'] \in \bar{\Omega}_*^u(\mathcal{G}_\ell)$ が存在し

て $[M', \psi'] = 2^n[M, \psi]$ となる事を示せばよい。F_e を §1と同様 Z_e の固定点とし その M に於ける法ベクトルバンドルを V とすると、§2 に述べたように (F_e, φ, V, ψ) は (3.2) に於けるような組である。そこで (3.2) による n と $(F_e', \varphi', V', \psi')$ をとり $2^n(F_e, \varphi, V, \psi)$ と $(F_e', \varphi', V', \psi')$ の間のコボルディズムを (X, Φ, W, Ψ) とする。なお V は F_e の M に於ける管状近傍と同一視し、V', W も胞バンドルを表わすものとする。又 $\dot{W}$ は以前と同様対応する球バンドルを表わすものとする。$M' = 2^n(M - \mathrm{Int}\, V) \cup \dot{W} \cup V'$ とし、$2^n(M - \mathrm{Int}\, V)$ 上 $\psi' = \psi$、$\dot{W}$ 上 $\psi' = \Psi|\dot{W}$ として V' 上の ψ' を M' にまで拡張すると、作り方から $[M', \psi'] = 2^n[M, \psi]$ であり、$[M', \psi'] \in \overline{\Omega}_*^u(g_e)$ である。



以下 (3.2) の証明の概要を述べる。場合を二つに分ける。F_e は連結として差支えない。

1) $w_1(F_e) = w_1(V \to F_e) \neq 0$. F_e の向き付け可能な二重被覆多様体を $F_e' \xrightarrow{\pi} F_e$ とする。ψ による S^1-軌道は互にホモトープで、局所的な向きを保つ ($\pi_1(F_e)$ の元と考えて、$\pi_1(F_e') < \pi_1(F_e)$ に属する。) ことが確められる。;

れから F_ℓ' 上の S^1 作用 φ' で射影 π と可換なものがある。特に φ' の丁度二つの S^1 軌道が φ の S^1-軌道を覆う。$V' = \pi^* V$ とし、V' 上の S^1-作用 ψ' を $\psi' = \varphi \times \psi$ で与える。F_ℓ' と $2F_\ell$ の間のコボルディズム X を Dold による方法により作る;([2]) この際、φ' と φ の関係に注意すると、X には φ' 及び 2φ を拡張する S^1-作用 Φ がはいることが分る。X は又 $F_\ell \times I$ 上の分岐した被覆多様体になっているので、その射影により V を X 上にもちあげたバンドル W をつくることができ、その上の S^1-作用 Ψ は $\Psi = \Phi \times \psi$ で与える。作り方から (X, Φ, W, Ψ) は $2(F_\ell, \varphi, V, \psi)$ と $(F_\ell', \varphi', V', \psi')$ の間のコボルディズムを与える。$w_1(F_\ell') = w_1(V' \to F_\ell') = 0$ だから次の場合に帰着された。

2) $w_1(F_\ell) = w_1(V \to F_\ell) = 0$. §2 と同様に V は ψ-不変な部分ベクトルバンドルの直和

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots$$

に分解する。但し $\zeta = \exp(\sqrt{-1}\,\theta)$　$\theta = 2\pi/\ell$ に対し $\psi(\zeta)$ は V の各 fibre を固定するが各 fibre への作用が V_i 上行列

$$\begin{pmatrix} \cos l_i\theta & -\sin l_i\theta \\ \sin l_i\theta & \cos l_i\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 < l_i < \ell$$

の直和で与えられるものとする。$i \geq 1$ に対しては $l_i \neq \ell/2$ とすれば V_i $(i \geq 1)$ には ψ-不変な複素ベクトルバンドルの構造 ψ' で

(1) $\psi(\zeta)\cdot v = \psi'(\zeta^{l_i})v \qquad v \in V_i$

となるものを導入することができる。又 V_0 上での ζ の作用は

(2) $\psi(\zeta)v = -v$

で与えられるものとする。$i \geq 1$ に対しては，§2 により ψ と可換で，ψ を拡張する V_i 上の S^1-作用 ψ'' がある。

ここでまず，F_e と φ が固定点をもたないとする。従って F_e/φ は多様体であり，$p: F_e \to F_e/\varphi$ は S^1-バンドルである。この S^1-バンドルを η とかく。又，$i \geq 1$ に対しては，$V_i/\psi'' \longrightarrow F_e/\varphi$ は F_e/φ 上の複素ベクトルバンドル ξ_i を与える。すなわち複素ベクトルバンドル V_i は p により ξ_i をもちあげたもので，そこでの S^1-作用 ψ は (1) から

(3) $\psi = \varphi^{l} \times \psi'^{l_i}$

の形である。但し $\varphi^l(g) = \varphi(g^l) \quad g \in S^1$ など。

次に (2) により V_0 上 $v \longmapsto -v$ は向きを保つ。従って $\dim V_0 = 2d_0$ の形であり，V_0 の構造群は $SO(2d_0)$ である。V_0 に附随し，群 $PSO(2d_0) = SO(2d_0)/\{\pm 1\}$ をもつバンドルを $\tilde{\xi}_0$ とする。(2) により，ψ は $\tilde{\xi}_0$ のバンドル写像による S^1-作用（それをも ψ とかく。）を導く。$\tilde{\xi}_0/\psi \xrightarrow{\pi_0} F_e/\varphi$ は F_e/φ 上の $PSO(2d_0)$-バンドルである。（これを ξ_0 とかく。）かくして，向き付けられた多様体 $F_e/\varphi = N$，その上の $U(1)$-バンドル η，$PSO(2d_0)$-バンドル ξ_0，及び $U(d_i)$-バンドル ξ_i の

組 $(N, \eta, \xi_0, \xi_1, \cdots)$ が得られた。これは

$$\Omega_*(BU(1) \times BPSO(2d_0) \times \prod BU(d_i))$$

の元 $[N, \eta, \xi_0, \xi_1, \cdots]$ を代表する。

ところで、以下に於て次の命題 (3.3) と (3.4) が鍵となる。$PSO(2d_0)$-バンドル ξ_0 の構造群を $SO(2d_0)$ にまで持ち上げるための障害を $\theta(\xi_0) \in H^2(N; Z_2)$ とする。

命題 (3.3) $w_2(\eta) + \theta(\xi_0) = 0$

次に $w_2 \oplus \theta \in H^2(BU(1) \times BPSO(2d_0); Z_2)$ を殺すファイバー空間を $B \longrightarrow BU(1) \times BPSO(2d_0)$ とする。又 $PU(d_0) = U(d_0)/\{\pm 1\}$ とし、$\theta^U \in H^2(BPU(d_0); Z_2)$ はファイバー空間 $K(Z_2, 1) \longrightarrow BU(d_0) \longrightarrow BPU(d_0)$ の特性類とし、$w_2 \oplus \theta^U$ を殺すファイバー空間を $B^U \longrightarrow BU(1) \times BPU(d_0)$ とする。(3.3) は $[N, \eta, \xi_0, \xi_1, \cdots]$ が $\Omega_*(B \times \prod BU(d_i)) \longrightarrow \Omega_*(BU(1) \times BPSO(2d_0) \times \prod BU(d_i))$ の像の中に属することを示す。

命題 (3.4) $\Omega_*(B^U \times \prod BU(d_i)) \otimes Z[\frac{1}{2}] \longrightarrow \Omega_*(B \times \prod BU(d_i)) \otimes Z[\frac{1}{2}]$ は全射。

(3.3) の証明. ξ_0 に附随し $P^{2d_0-1}(R)$ をファイバーとするバンドルを $E \xrightarrow{\pi_0} N$ とする。$E = \tilde{D}_0/\psi$ に他ならない。ここで $\tilde{D}_0$ は球バンドル、$\theta(\xi_0)$ は $\pi_0^*: H^2(N; Z_2) \longrightarrow H^2(F; Z_2)$ の核を生成することに注意する。又 Gysin により $w_2(\eta)$ は $p^*: H^2(N; Z_2) \longrightarrow H^2(F_C; Z_2)$ の核を生成する。すると、$p^*E =$

$\dot{V}_0/\mathbb{Z}_2$ でこれは球バンドル $\dot{V}_0$ で覆われるから、$p^*\theta(\xi_0)=0$。
故に $\theta(\xi_0)=a\,w_2(\eta)$。$a=0$ 又は 1。また $\pi_0^*\eta$ は $\dot{V}_0/\mathbb{Z}_2 \to$
$\dot{V}_0/\psi$ であるが、これは $\dot{V}_0 \longrightarrow \dot{V}_0/\psi$ なる S^1 バンドルで覆わ
れるから、$w_2(\eta)=b\,\theta(\xi_0)$ $b=0$ 又は 1 である。故に $\theta(\xi_0)$
$=ab\cdot\theta(\xi_0)$。故に $ab=1,0$ のいずれにしても $\theta(\xi_0)=w_2(\eta)$
となる。

(3.4)の証明 $\Omega_*(B^U\times\prod BU(d_i))\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\cong\Omega_*\otimes$
$H_*(B^U\times\prod BU(d_i),\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, $\Omega_*(B\times\prod BU(d_i))\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\cong$
$\Omega_*\otimes H_*(B\times\prod BU(d_i),\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ であり、且つ

$$H_*(B^U\times\prod BU(d_i),\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}])\to H_*(B\times\prod BU(d_i),\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}])$$

が全射なることによる。

(3.3) (3.4)から(3.2)は次のように導かれる。(3.3)
(3.4)から

(4) $\Omega_*(B^U\times\prod BU(d_i))\longrightarrow\Omega_*(BU(1)\times BPU(d_0)\times\prod BU(d_i))$

の像に属する $[N',\eta',\xi_0',\xi_1',\cdots]$ で、

$$\Omega_*(BU(1)\times BPU(d_0)\times\prod BU(d_i))\longrightarrow\Omega_*(BU(1)\times BPSO(2d_0)\times\prod BU(d_i))$$

により $2^n[N,\eta,\xi_0,\xi_1,\ \ ]$ にうつるものがある。η' は $F_e'\xrightarrow{p'}$
N' なる S^1-バンドルに対応するものとし、F_e' 上の $PU(d_0)$ バ
ンドル $p'^*\xi_0'$ を考えると、(4)を使うことにより、$p'^*\xi_0'$ は複
素ベクトルバンドル $V_0\longrightarrow F_e'$ により二重に覆われているこ
とが分る。S^1-バンドルとしての F_e' 上の S^1 作用を φ' とする

と，作り方から V_0' 上には $(\varphi')^2$ を拡張する作用があり，従って $(\varphi')^\ell$ を拡張する S^1 作用 ψ' がある。$\varphi'^*\xi_i' = V_i'$ 上にも (3) と同様の方法で S^1-作用 ψ' が定義される。$(i \geq 1)$ 従って $V' = V_0 \oplus V_1' \oplus \cdots$ 上にも ψ' が定義される。作り方から $[F_i', \varphi', V', \psi'] = 2^n [F_i, \varphi, V, \psi]$ である。以上により φ の固定点集合 $F = \phi$ なるときは (3.2) は証明された。$F \neq \phi$ なる場合は，$V_0|F$ 上では既に ψ 不変な複素ベクトルバンドルへの構造が入る。それを φ 不変な F の F_i での管状近傍 U について $V_0|U$ にまで拡張し，後は上と同様な推論により $(F_i', \varphi', V', \psi')$ を構成する。

§4 Atiyah-Singer の公式 Kosniowski の公式

$[M, \psi] \in \Omega_*(\mathfrak{F}_i^+)$ とする。$F = \cup F^i$ を ψ の固定点の集合 F の連結成分への分解とする。各 F^i の法ベクトルバンドル W^i は複素ベクトルバンドルの構造をもち ψ は W^i の自己同型群として作用する。従って W^i は複素ベクトルバンドルとして

$$W^i = \sum W^i_j$$

$$\psi(g)v = g^{\ell_{ij}} v \qquad v \in W^i_j$$

と分解するが，以下では $\ell_{ij} > 0$ となるように複素構造を入れると約束する。それにより F^i の向きも確定する。$d(i) =$

$\dim_{\mathbb{C}} W^i$ とおく。Atiyah-Singer の公式（定理 IV 2)）は更に

$$\mathrm{sign}\, M = \sum_{d(i)\ \text{偶数}} \mathrm{sign}\, F^i$$

$$0 = \sum_{d(i)\ \text{奇数}} \mathrm{sign}\, F^i$$

と述べられる; [1]。又 Kosniowski の公式（定理 IV 3)）についても同様である; [4]。これらの公式は Atiyah-Singer の定理の特別な場合として得られるが、$\ell = 1$ のとき、すなわち作用が semi free のときは川久保 [3]，松本(尭) [5] によるコボルディズムの範囲内での初等的証明がある。ℓ が一般の場合でも，§2，§3 を用いてほぼ同様の線での証明を与える事ができる。ここでは Atiyah-Singer の公式についてそのごく大ざっぱな筋を述べる。

§3 により $[M, \varphi] \in \Omega^U_*(\mathcal{F}_\ell^+)$ として差支えない。F_ℓ は以前の通り Z_ℓ の固定点集合とし，$F_\ell = \cup F_\ell^j$ を連結成分への分解，V^j を F_ℓ^j の法ベクトルバンドルとする。仮定により V^j は φ-不変な複素ベクトルバンドルの構造をもつ。§3 と §2 により，

(1) $[M, \varphi] = \sum_j [P_\varphi(V^j \oplus 1), \varphi] + [M_1, \varphi]$

となる。ここで $M_1 = (M - \cup_j \mathrm{Int}\, V^j) \cup W^j$，$P_\varphi(V^j \oplus 1) = V^j \cup W^j$ であり，$[M_1, \varphi] \in \Omega_*(\mathcal{F}'_{\ell-1})$。我々は公式を ℓ に関する帰納法で証明する。（$\ell = 1$ のときは [3], [5] と同じ）。$[M_1, \varphi] \in \Omega_*(\mathcal{F}^+_{\ell-1})$ であり，又 $P_\varphi(V^j) \subset M_1$ は

ψ 不変だから $[\mathbb{P}_\psi(V^0), \psi] \in \Omega_*(\mathfrak{F}_{(1)})$.

この両者に帰納法の仮定によって公式を適用することにより，

$$(2) \quad 0 = \operatorname{sign} M_1 - \sum_{F_\ell \cap F^i = \phi,\ d(i):\text{偶数}} \operatorname{sign} F^i$$

$$= \sum\nolimits_0 \operatorname{sign} \mathbb{P}_\psi(V^0) + \sum_{F_\ell \cap F^i = \phi,\ d(i)\ \text{奇数}} \operatorname{sign} F^i$$

を得る。

次に，$\mathbb{P}_\psi(V^0 \oplus 1)$ 上の semi free な作用 ψ' についしと適用して，

$$(3) \quad \operatorname{sign} \mathbb{P}_\psi(V^0 \oplus 1) = \sum_{F^i \subset F_\ell^0,\ d(i)\ \text{偶数}} \operatorname{sign} F^i$$

又，$\mathbb{P}_\psi(V^0)$ 上の semi free な作用 ψ'' に公式を適用して

$$(4) \quad \operatorname{sign} \mathbb{P}_\psi(V^0) = \sum_{F^i \subset F_\ell^0,\ d(i)\ \text{奇数}} \operatorname{sign} F^i$$

を得る

以上の準備をすれば，(1)，(2)，(3) から

$$\operatorname{sign} M = \sum\nolimits_0 \operatorname{sign} \mathbb{P}_\psi(V^0 \oplus 1) + \sum_{F_\ell \cap F^i = \phi,\ d(i)\ \text{偶数}} \operatorname{sign} F^i$$

$$= \sum_{d(i)\ \text{偶数}} \operatorname{sign} F^i .$$

又 (2)，(4) から

$$0 = \sum\nolimits_0 \operatorname{sign} \mathbb{P}_\psi(V^0) + \sum_{F_\ell \cap F^i = \phi,\ d(i)\ \text{奇数}} \operatorname{sign} F^i$$

$$= \sum_{d(i)\ \text{奇数}} \operatorname{sign} F^i .$$

参考文献

[1] M. Atiyah and I. Singer, "The index of elliptic operators: III," Ann. of Math. 87 (1968)

[2] A. Dold, "Démonstration elémentaire de deux résultats du cobordisme," Ehresmann seminar notes, Paris, 1958–59.

[3] K. Kawakubo and F. Uchida, On the index of a semi-free S^1-action, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 620–622.

[4] C. Kosniowski, "Applications of the holomorphic Lefschetz formula," Bull. London Math. Soc. (2), 1970.

[5] T. Matzumoto

[6] E. Ossa, "Fixpunktfreie S^1-Aktionen," Math. Ann. 186, 1970.

[7] F. Uchida, "Cobordism groups of semi-free S^1 and S^3-actions.