

Bordism algebras of periodic transformations

京大 数理研 島田信天

表題は大きいですが、ここで取扱うのはその極く一部分にすぎないことを先づお断りしなければなりません。

compact Lie groups のうちで最も簡単な $S^1 = U(1)$ およびその部分群 \mathbb{Z}_n の differentiable action を持つ C^∞ 多様体の equivariant bordism group については, free actions の場合 Conner-Floyd [3], Conner [2], Sullivan [12], Uchida [14], Kamata [5, 6] 等多くの人々によって論ぜられていいる。ここでは semi-free actions の場合の bordism の ring structure を主として述べたい。

§1. $\mathcal{M}_+(S^i)$ ($i=1, 3$) の環構造

Conner-Floyd [3], Uchida [13] によって次の完全系列が知られていいる (実は split exact):

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} \mathcal{M}_+(\mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

$$(1.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_*(S^1) \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_*(S^1) \xrightarrow{\partial} \mathcal{M}_+(S^1) \rightarrow 0$$

$$(1.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_*(S^3) \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_*(S^3) \xrightarrow{\partial} \mathcal{M}_+(S^3) \rightarrow 0$$

$\mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_2)$ は unoriented manifolds with involution の bordism 群. $\mathcal{O}_*(S^i)$ ($i=1,3$) は oriented manifolds with semi-free S^i -action の bordism 群, これらに對して, free involution による free S^i -action の場合とそれぞれ $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2)$, $\mathcal{M}_*(S^i)$ で表わす. また $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{M}_*(BO(k))$, $\mathcal{M}_*(S^1) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{M}_*(BU(k))$, $\mathcal{M}_*(S^3) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{M}_*(BSp(k))$.

これらの三つの完全系列の間には, その形が如く analogy が存在し統一的に論ずることが出来る.

定理(1.4). F で, 実数体 \mathbb{R} , 複素数体 \mathbb{C} , 四元数体 \mathbb{H} のどれか一つを表わす. $d = \dim_{\mathbb{R}} F$. $FP(n)$ は射影空間とする.

このとき, 1) $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2)$ ($\mathcal{M}_*(S^{d-1})$, $d-1=1,3$) は $\mathcal{M}_*(\mathcal{O}_*)$ 上の free module, 生成系は $\{ \alpha_{dn-1} = [S^{dn-1}, \tau]; n \geq 1 \}$ で与えられる. ただし $\tau: S^{d-1} \times S^{dn-1} \rightarrow S^{dn-1}$ は, $S^{dn-1} \subset F^n$ (単位球面) として, scalar 積. 2) $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2) \approx \mathcal{M}_*[\theta_0, \theta_1, \dots]$, $\mathcal{M}_*(S^i) \approx \mathcal{M}_*[\theta_0, \theta_1, \dots]$ ($i=1,3$) は, それぞれ, Thom ring \mathcal{M}_* , \mathcal{O}_* 上の多項式環, $\theta_n = [\eta_n \rightarrow FP(n)]$ で η_n は canonical line bundle を表わす.

証) 1) はよく知られてゐる. 2) について $\mathcal{M}_*(S^1)$ の場合の証明を書く. 他の場合も類似である.

i -bundle の Whitney sum を導く写像 $\varphi: BU(k) \times BU(l) \rightarrow BU(k+l)$ によつて "積"

$$H_i(BU(k); \mathbb{Z}) \otimes H_j(BU(l); \mathbb{Z}) \rightarrow H_{i+j}(BU(k+l); \mathbb{Z})$$

$$\Omega_i(BU(k)) \otimes \Omega_j(BU(l)) \rightarrow \Omega_{i+j}(BU(k+l))$$

が induce する, $\sum_{k \geq 0} H_*(BU(k); \mathbb{Z})$ 及び $\mathcal{M}_*(S^1) = \sum_{k \geq 0} \Omega_*(BU(k))$

は環構造を成す. このとき自然写像 μ (Cohen-Floyd [3]):

$$\sum \Omega_*(BU(k)) \rightarrow \sum H_*(BU(k); \mathbb{Z})$$

は環と (2) の準同型写像と成す. $\theta_n = [\gamma_n \rightarrow CP(n)] \in \Omega_{2n}(BU(1))$ の像と

$$a_n = \mu(\theta_n) = \{CP(n)\} \in H_{2n}(CP(\infty); \mathbb{Z}) = H_{2n}(BU(1); \mathbb{Z})$$

と表わす. $\{a_n; n \geq 0\}$ は $H_*(BU(1); \mathbb{Z})$ の additive base

を成す. $\mathcal{M}_*(S^1) \approx \Omega_*[\theta_0, \theta_1, \dots]$ を証明するためには,

$\{\theta_{i_1} \dots \theta_{i_k}; 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k\}$ が $\Omega_*(BU(k))$ の Ω_* -base である

ことを示せば十分である. そのためには $\mu(\theta_{i_1} \dots \theta_{i_k}) = a_{i_1} \dots a_{i_k}$

が $H_*(BU(k); \mathbb{Z})$ の additive base であることを示せばよい (

Cohen-Floyd [3], Th. 18.1). 一方 $H^*(BU(k); \mathbb{Z})$ は写像

$$f: \underbrace{CP(\infty) \times \dots \times CP(\infty)}_{k \text{ 回}} \rightarrow BU(k), f^*(x_k) = \gamma \times \dots \times \gamma$$

$H^*(CP(\infty) \times \dots \times CP(\infty); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ における対称式の部分環

に同型に等えられる. $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k), 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$ に対し

$$s_\omega = \sum x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \text{ (無数の対称式)} \text{ と表わす, } \{s_\omega; \omega =$$

$$(i_1, \dots, i_k), 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k\} \text{ が } f^*(H^*(BU(k); \mathbb{Z})) \approx H^*(BU(k); \mathbb{Z})$$

の additive base と成す. $a_\omega = a_{i_1} \dots a_{i_k} = f_*(CP(i_1) \times \dots \times CP(i_k))$

であるから, 容易に次を得る (Milnor [7]),

$$\langle s_\omega, a_\omega \rangle = \langle x_1^{i_1}, \{CP(i_1)\} \rangle \dots \langle x_k^{i_k}, \{CP(i_k)\} \rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & (\omega' \neq \omega) \\ 1 & (\omega' = \omega) \end{cases} \quad \text{g.c.d.}$$

§2. $\mathcal{O}_*(S^i)$ ($i=1, 3$) の環構造

Alexander [1] は (1.1) を利用して $\mathcal{J}_*(\mathbb{Z}_2)$ の環構造を調べた。ただし彼は $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2)$ の構造を full に使っている。定理(1.4)を使えば、より簡単に $\mathcal{J}_*(\mathbb{Z}_2)$, $\mathcal{O}_*(S^i)$ の環構造が導かれる。 $\mathcal{O}_*(S^1)$ の場合を述べよう。

完全系列 (1.2)

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_*(S^1) \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_*(S^1) \xrightarrow{\partial} \Omega_{*,1}(S^1) \rightarrow 0$$

において, ν は ring homomorphism で, $\nu[M^n, T] = \sum_i [\nu_{F_i} \rightarrow F_i]$ で与えられる。 F_i は T の fixed pt set F_T の連結成分で oriented closed submanifold, ν_{F_i} は M^n における normal bundle. また $\partial[\xi \rightarrow M] = [S(\xi), T]$, ここで $S(\xi) = \partial D(\xi)$ は disk bundle $D(\xi)$ の境界である, T は標準的 \mathbb{Z}_2 fiber-preserving $\mathbb{Z}(1)$ -action. 従って特に

$$(2.1) \quad \partial \theta_n = [S^{2n+1}, T] = \alpha_{2n+1}, \quad \partial \theta_0^n = \alpha_{2n-1}$$

ここに $\sigma_n = [CP(n+1), T]$, $n \geq 1$, を $T(S; (z_0, \dots, z_{n+1})) = (sz_0, sz_1, \dots, sz_n, z_{n+1})$ で定義すれば

$$(2.2) \quad \nu(\sigma_n) = \theta_n - \theta_0^{n+1} \quad (n \geq 1).$$

さらに Ω_* -map

$$(2.3) \quad \Gamma: \mathcal{O}_*(S^1) \rightarrow \mathcal{C}_{*+2}(S^1)$$

を次の様に定義する (Conner-Floyd [3], p. 94).

$T_0 \in D^2$ 上の標準的 S^1 -action とするとき, semi-free S^1 -action をもつ多様体 (M^n, T) に対して, equivariant diffeomorphism $\varphi: (S^1 \times M^n, T_0 \times 1) \rightarrow (S^1 \times M^n, T_0 \times T)$, $\varphi(s, x) = (s, sx)$, による境界を貼り合わせて得られる多様体を

$$(2.4) \quad \Gamma(M^n, T) = (\tilde{M}^{n+2}, \tilde{T}) = (-D^2 \times M^n, T_0 \times 1) \cup_{\varphi} (D^2 \times M, T_0 \times T)_2$$

と置く, 即ち自然な S^1 -action $\tilde{T} \in \mathfrak{e}$ を

このとき, fixed pt. set は $F_{\tilde{T}} = (0) \times M^n \cup (0) \times \Gamma_T$ であり,

$$(2.5) \quad \nu[\tilde{M}^{n+2}, \tilde{T}] = \nu[M^n, T] \cdot \theta_0 - [M^n] \cdot \theta_0$$

が成り立つ. 記号

$$\iota: \mathcal{M}_n(S^1) \rightarrow \mathcal{M}_{n+2}(S^1) \quad \iota(x) = x \cdot \theta_0,$$

$$\varepsilon: \mathcal{E}_n(S^1) \rightarrow \Omega_n, \quad \varepsilon[M^n, T] = [M^n]$$

$$\tau: \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{n+2}(S^1) \quad \tau[M^n] = [M^n] \cdot \theta_0$$

を用いて (2.5) を書き直すと

$$(2.6) \quad \nu\Gamma = \iota\nu - \tau\varepsilon.$$

$$\text{補題 (2.7). } \Gamma(ab) = \Gamma(a) \cdot b + \varepsilon(a)\Gamma(b)$$

$$= a \cdot \Gamma(b) + \varepsilon(b)\Gamma(a) \quad \text{for } a, b \in \mathcal{O}_*(S^1)$$

証) (2.6) から容易に従う

定理 (2.8). $\mathcal{O}_*(S^1)$ は生成系 $\{\Gamma^l(\sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_k}); l \geq 0, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k\} \cup \{1\}$ をもつ free Ω_* -module で, その環構造は, 多項式環 $\Omega_*[\Gamma^l(\sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_k}); l \geq 0, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k]$ の, 関係式 (2.7) から生成された ideal \mathcal{J} による商として与えられる. $\mathcal{O}_*(S^3)$ についても同様.

証) (2.5) に注意すれば, $\mathcal{M}_*(S')$ の monomials に適当な順序を
 与えて $\nu(\Gamma^k(\sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_k})) = c_0^k \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_k} + \text{lower terms}$ が成り立つ.
 $\{c_0^k \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_k}\}$ が $\mathcal{M}_*(S')$ の Ω_* -base であることから定理が従う.

§3. $\mathcal{O}_*(Z_3)$ について

p を奇素数として, Z_p -action の場合, とくに $p=3$ の場合を
 重点として取り扱う. 次の完全系列が知られている (Conner [2],
 Wu [15])

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \Omega_* \xrightarrow{i_*} \mathcal{O}_*(Z_p) \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_*(Z_p) \xrightarrow{\partial} \tilde{\Omega}_*(Z_p) \rightarrow 0$$

ここで $\mathcal{O}_*(Z_p)$ は前と同様に (semi-free) Z_p -actions の bordism 群,
 $\mathcal{M}_*(Z_p) = \mathcal{M}_*(S') \otimes_{\Omega_*} \otimes_{\Omega_*} \mathcal{M}_*(S')$ ($\frac{p-1}{2}$ 個の tensor 積), $\Omega_*(Z_p)$ を
 free Z_p -actions の bordism 群, $\bar{E}: \Omega_*(Z_p) \rightarrow \Omega_*$ を $\bar{E}[M, \tau] = [M^*/\tau]$
 で定義すると $\tilde{\Omega}_*(Z_p) = \text{Ker } \bar{E}$. $\mu_0 = [Z_p, \sigma] \in \mathcal{O}_0(Z_p)$ とす
 ると $i_*[M] = [M] \cdot \mu_0 = [M \times Z_p, 1 \times \sigma]$. ν, ∂ については前節に
 おけると同様にして定義したものである.

簡単のため以下 $p=3$ の場合を考える.

つぎの可換図式が成立する ([10] [15])

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_*(S^1) & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{M}_*(S^1) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_*(S^1) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \bar{\lambda} \approx & & \downarrow \bar{\lambda} \\ 0 & \rightarrow & \Omega_* \xrightarrow{i_*} \mathcal{O}_*(Z_3) & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{M}_*(Z_3) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{\Omega}_*(Z_3) \rightarrow 0 \end{array}$$

ここで λ は S^1 -action を部分群 Z_3 に restrict することにより得ら
 れる自然写像である.

このとき Conner-Floyd [3], §36, §46 により次のことが知られてくる: 1) 写像 $\bar{\lambda}: \Omega_*(S^1) \rightarrow \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_3)$ は全射である, 2) $\Omega_*(S^1) \cong \Omega_{*-1}(CP(\infty))$ は $\{\alpha_{2n-1} = [S^{2n-1}, \tau]; n \geq 1\}$ で生成された free Ω_* -module である, 3) ある oriented closed manifolds $M^4, M^8, \dots, M^{4k}, \dots$ の系列が存在して,

$$(3.3) \quad \beta_{2n-1} = 3\alpha_{2n-1} + [M^4]\alpha_{2n-5} + [M^8]\alpha_{2n-9} + \dots \quad (n \geq 1)$$

とおくとき $\{\beta_{2n-1}; n \geq 1\}$ は $K = \text{Ker } \bar{\lambda}$ の生成系をつくる(1次係数 β_{2n-1} における係数 $[M^{4k}] \in \Omega_{4k}$ は複素 cobordism における formal group law の係数と関係づけられる. 柴田氏の講演および Miščenko [8] 参照).

$$(3.4) \quad \bar{\beta}_n = 3\theta_0^n + [M^4]\theta_0^{n-2} + [M^8]\theta_0^{n-4} + \dots \quad (n \geq 1)$$

と置き, $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_3)$ を同型 $\bar{\lambda}$ により $\mathcal{M}_*(S^1)$ と同一視すれば, $\bar{\beta}_n$ は $\bar{\alpha}: \mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_3) \rightarrow \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_3)$ の核にぞくする.

$$(3.5) \quad \partial(\bar{\beta}_n) = 0.$$

従って完全系列(3.1)から $\mu_n \in \mathcal{C}_*(\mathbb{Z}_3)$ ($n \geq 1$) が存在して $\partial(\mu_n) = \bar{\beta}_n$ となる. 従って μ_n の定理を得る (Wu [15]).

定理(3.6). $\mathcal{C}_*(\mathbb{Z}_3)$ は free Ω_* -module で $\Omega_*(\mu_0, \mu_1, \dots)$ と $\lambda(\mathcal{C}_*(S^1))$ との直和に同型である.

つぎに $\mathcal{C}_*(\mathbb{Z}_3)$ の積構造を調べよう. まず Ω_* -algebra としての生成系として $\{\mu_k (k \geq 0), \Gamma^l(\sigma_j) (l \geq 0, j \geq 1)\}$ がとれることは以上のことから明らかである. ただし $\lambda(\Gamma^l(\sigma_j))$

を単に $\Gamma^k(\sigma_j)$ とかくことにする. $\lambda: \mathcal{O}_*(S^1) \rightarrow \mathcal{O}_*(Z_3)$ は中への環同型写像であり, $\text{Im } \lambda \approx \mathcal{O}_*(S^1)$ は $\mathcal{O}_*(Z_3)$ の subalgebra である. また $\text{Im } i_* = \text{Ker } \nu = \Omega_* \mu_0$ ($\mu_0 = [Z_3, \sigma]$) は $\mathcal{O}_*(Z_3)$ の ideal であり, 実際 $\varepsilon: \mathcal{O}_*(Z_3) \rightarrow \Omega_*$, $\varepsilon[M^n; \tau] = [M^n]$,
 $\varepsilon \mu_0 = 0$

$$(3.7) \quad \mu_0 \cdot a = \varepsilon(a) \cdot \mu_0 \quad \text{for } a \in \mathcal{O}_*(Z_3)$$

を得る. μ_n の個々の関係を調べるため, μ_n の選び方を適当に固定しなくてはならない. また (Conner [2])

$$(3.8) \quad \mu_1 = [M^2, \tau_1]$$

とおく. ここで M^2 は $CP(2)$ における代数曲線 $z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = 0$ で, non-singular, genus = 1 である. $\tau_1(z_0, z_1, z_2) = (z_0, z_1, \rho z_2)$, $\rho = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ とする. τ_1 の固定点は $(1, -1, 0)$, $(\rho, -1, 0)$, $(\rho^2, -1, 0)$ の三点であり,

$$(3.9) \quad \nu(\mu_1) = 3\theta_0.$$

つぎに

$$(3.10) \quad \mu_2 = [CP(2), \tau_2]$$

を $\tau_2(z_0, z_1, z_2) = (z_0, \rho z_1, \rho^2 z_2)$ で定義する. τ_2 の固定点は $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ の三点で

$$(3.11) \quad \nu(\mu_2) = 3\theta_0^2.$$

μ_n ($n \geq 3$) を定めるための準備をする. 一般に

(M^n, T) を S^1 -action T をもつ oriented 多様体とすると, T が semi-free で $n < 2k$ と $\S 2$ におけると同様に Γ -operation

が定義される。これは任意の S^1 -actions の torclism 群への作用となる。

$$(3.12) \quad \Gamma[M^n, T] = [\tilde{M}^{n+2}, \tilde{T}]$$

また S^1 -action T の restriction である \mathbb{Z}_2 -action $\lambda(T)$ を持つ多様体

$$(3.13) \quad \lambda(M^n, T) = (M^n, \lambda(T))$$

が定義される。 $(\tilde{M}^{n+2}, \lambda(\tilde{T}))$ に対して $\lambda(\tilde{T})$ の固定点の集合

$$\text{は } F_{\lambda(\tilde{T})} = (0) \times M^n, \cup (0) \times F_{\lambda(T)} \text{ であり,}$$

$$(3.14) \quad \nu[\tilde{M}^{n+2}, \lambda(\tilde{T})] = \nu[M^n, \lambda(T)] \cdot \theta_0 - [M^n] \cdot \theta_0$$

または、同値である

$$(3.15) \quad \nu \lambda \Gamma = \tau \nu \lambda - \tau \varepsilon \lambda$$

が成り立つ。これから inductive に

$$(3.16) \quad \nu \lambda \Gamma^n = \tau^n \nu \lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{n-1-i} \tau \varepsilon \lambda \Gamma^i$$

を得る。いま μ_2 に対して S^1 -action を持つ多様体

$$(3.17) \quad (CP(2), T_2)$$

を、 $T_2(e^{i\theta}; (z_0, z_1, z_2)) = (z_0, e^{i\theta} z_1, e^{2i\theta} z_2)$ で定義すれば、

$$(3.18) \quad \lambda[CP(2), T_2] = [CP(2), \tau_2] = \mu_2$$

である。そこで

$$(3.19) \quad \mu_n = \lambda \Gamma^{n-2} [CP(2), T_2] \quad (n \geq 2)$$

と定義する。このとき (3.16) から

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \nu(\mu_n) &= 3\theta_0^n - \sum_{i=0}^{n-3} \varepsilon(\mu_{i+2}) \theta_0^{n-2-i} \\ &= 3\theta_0^n - \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon(\mu_i) \theta_0^{n-i} \end{aligned}$$

を得る。これは (3.6) における $\nu(\mu_n) = \bar{\beta}_n$ の条件と多少くい違
うが、(3.20) の右辺を改めて $\bar{\beta}_n$ と取り直して $\varepsilon = \{\bar{\beta}_n, n \geq 1\}$
が $\vartheta: \mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_*(\mathbb{Z}_3)$ の kernel の free base を与えること
は同じである。

以上の μ_n の定め方から、 μ_n の間の関係式として

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= 3\mu_2 - \varepsilon(\mu_2)\mu_0, \quad \mu_1\mu_2 = 3\mu_3 + \varepsilon(\mu_2)\mu_1 \\ (3.21) \quad \mu_1\mu_n &= 3\mu_{n+1} + \varepsilon(\mu_n)\mu_1 - \varepsilon(\mu_{n+1})\mu_0 \quad (n \geq 1) \\ \mu_2\mu_n &= 3\mu_{n+2} + \varepsilon(\mu_n)\mu_2 + \varepsilon(\mu_{n+1})\mu_1 - \varepsilon(\mu_{n+2})\mu_0 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

等が両辺に ν をかけ ε をほどこして比較することにより得ら
れる。ただし $\varepsilon|_{\text{Ker } \nu}$ は単射であること、 $\varepsilon(\mu_1) = 0$, $\varepsilon(\mu_3) = 0$
に留意。さらに同様にして

$$\begin{aligned} (3.22) \quad \mu_1 \cdot \Gamma^l(\sigma_i) &= 3\Gamma^{l+1}(\sigma_i) + \varepsilon(\Gamma^l(\sigma_i))\mu_1 - \varepsilon(\Gamma^{l+1}(\sigma_i))\mu_0 \\ \mu_2 \cdot \Gamma^l(\sigma_i) &= 3\Gamma^{l+2}(\sigma_i) + \varepsilon(\Gamma^l(\sigma_i))\mu_2 + \varepsilon(\Gamma^{l+1}(\sigma_i))\mu_1 \\ &\quad - \varepsilon(\Gamma^{l+2}(\sigma_i))\mu_0 \end{aligned}$$

が成り立つ。 μ_n ($n \geq 3$), $\Gamma^l(\sigma_i)$ の間の関係として

$$\begin{aligned} (3.23) \quad \mu_n \cdot \mu_m &= \mu_{n-1}\mu_{m+1} + \varepsilon(\mu_m)\mu_n - \varepsilon(\mu_{n-1})\mu_{m+1} \quad (n \geq 3) \\ \mu_n \cdot \Gamma^l(\sigma_i) &= \mu_{n-1}\Gamma^{l+1}(\sigma_i) + \varepsilon(\Gamma^l(\sigma_i))\mu_n - \varepsilon(\mu_{n-1})\Gamma^{l+1}(\sigma_i) \end{aligned}$$

があり、これは形式的には $\mu_n = \Gamma(\mu_{n-1})$ とおいて (2.7) を適用し
たものに等しい。従って $\mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3)$ の積構造は essential には (2.7)
により規定されていると考えよう。勿論 (3.7), (3.21), (3.22)
は別としての話である。

§4. 補足

これまで oriented manifold を考えたが, weak complex structure を持つ多様体とその structure と compatible な periodic transformation の bordism を考えても, 以上に述べたことと類似なことが成り立つ. 例えば完全系列の由る可換図式

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_*^U(S^1) & \xrightarrow{\nu} & M_*^U(S^1) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_*^U(S^1) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \lambda & & \downarrow \bar{\lambda} \\ 0 & \rightarrow & \Omega_*^U \xrightarrow{i_*} C_*^U(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\nu} & M_*^U(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{\Omega}_*^U(\mathbb{Z}_p) \rightarrow 0 \quad (p: \text{素数}) \end{array}$$

とか

$$M_*^U(S^1) = \sum_{k \geq 0} \Omega_*^U(BU(k)) \approx \Omega_*^U[\theta_0, \theta_1, \dots]$$

$$\theta_n = [\eta_n \rightarrow CP(n)], \quad \eta_n \text{ は canonical line bundle,}$$

$$M_*^U(\mathbb{Z}_p) = M_*^U(S^1) \otimes_{\Omega_*^U} \dots \otimes_{\Omega_*^U} M_*^U(S^1) \quad (p-1 \text{ 回の tensor 積}),$$

$$\Omega_*^U(S^1) \approx \Omega_{*-1}^U(CP(\infty)) \approx \sum_{n \geq 1} \Omega_*^U \alpha_{2n-1} \quad (\text{free module})$$

$$\tilde{\Omega}_*^U(\mathbb{Z}_p) \approx \tilde{\Omega}_*^U(B\mathbb{Z}_p) \text{ は } p\text{-torsion 等}$$

が成り立つ. $p=2$ の場合は $\bar{\lambda}$ は同型写像であり, 前節の方法で $\mathcal{O}_*^U(\mathbb{Z}_2)$ の構造が同様に調べ得る.

$p=2$ の場合の (4.1) の下列の完全系列の応用として, 吉田氏の講演における二つの命題を導びいて見よう.

命題(4.2). $[M, T] \in \mathcal{O}_m^U(\mathbb{Z}_2)$ とする. M における T の固定点集合の連結成分 F_i の normal bundle ν_{F_i} が trivial で, $\dim_C \nu_{F_i}$ が一定数 n に等しいとする. このとき $F = \cup_i F_i$ とおけば, $[N], [L] \in \Omega_*^U$ が存在して

$$[F] = 2^n [N], \quad [M, T] = [N] \cdot [CP(1), \tau]^n + [L] \cdot [Z_2, \sigma]$$

が成り立つ。ここで $\tau(z_0, z_1) = (z_0, -z_1)$ 。

証) 命題の仮定から $\nu[M, T] = [F] \cdot \theta_0^n$ であり $\partial \theta_0^n = \bar{\alpha}_{2n-1} = [S^{2n-1}, a]$ (a は標準的 \mathbb{Z}_2 involution) から $[F] \cdot [S^{2n-1}, a] = 0$ in $\tilde{\Omega}_+^U(Z_2)$ 。 $[S^{2n-1}, a]$ の order は 2^n であり (Kamata [5]), $\tilde{\Omega}_+^U(Z_2)$ の生成系 $\{\bar{\alpha}_{2n-1}; n \geq 1\}$ の間の relations を知らしめている ([5])。それによつて $[F] = 2^n [N]$ とする $[N] \in \tilde{\Omega}_+^U$ が存在する。第2の関係式は両辺に ν, ε をほどく前節の方法で容易に示される。

命題 (4.3). $n (\geq 4)$ を偶数。 S_n を $CP(2)$ における代数曲線 $z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0$ とする (これは non-singular)。 $\tau'(z_0, z_1, z_2) = (z_0, z_1, -z_2)$ とするとき、

$$[S_n, \tau'] = \frac{n}{2} [CP(1), \tau] - \frac{n(n-2)}{4} [CP(1)] \cdot [Z_2, \sigma]$$

証) τ' の固定点は $\omega = e^{\frac{\pi i}{n}}$ とするとき $(1, \omega^{2j-1}, 0)$, $j=1, \dots, \frac{n}{2}$ の $\frac{n}{2}$ 個の点である ($k = \frac{n}{2}$ とおく)。従つて, $\nu[S_n, \tau'] = 2k\theta_0$ 。一方 τ の固定点は $(1, 0), (0, 1)$ の二点。 $\nu[CP(1), \tau] = 2\theta_0$ 。従つて $[S_n, \tau'] - \frac{n}{2} [CP(1), \tau] \in \text{Im } i_*$ 。また S_n の genus $= \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (2k-1)(k-1) = 1 - 3k + 2k^2$ 。 $\chi(S_n) = 2(3k - 2k^2)$ 。それ故

$$\varepsilon[S_n, \tau'] = [S_n] = (3k - 2k^2)[CP(1)] \text{ in } \tilde{\Omega}_+^U. \text{ 従つて}$$

$$\varepsilon([S_n, \tau'] - \frac{n}{2} [CP(1), \tau]) = k(2 - 2k)[CP(1)] = \frac{-n(n-2)}{2} [CP(1)]$$

$$\varepsilon[Z_2, \sigma] = 2, \quad \varepsilon|_{\text{Im } i_*} \text{ は単射}$$

であるから求めた等式を得る。

参考文献

- [1] J. C. Alexander, The bordism ring of manifolds with involution, Technical Report, Univ. of Maryland (1970)
- [2] P. E. Conner, Seminar on periodic maps, Lect. Notes in Math. No. 46, Springer, 1967.
- [3] P. E. Conner and E. E. Floyd, Differentiable periodic maps, Ergebnisse der Math., Vol. 33, Springer, 1964.
- [4] —————, Maps of odd period, Ann. of Math. 84 (1966)
- [5] M. Kamata, The structure of bordism group $U_*^*(B\mathbb{Z}_p)$, Osaka J. Math. 7 (1970)
- [6] —————, On the ring structure of $U_*^*(BU(1))$, (to appear)
- [7] J. Milnor, Lectures on characteristic classes, Princeton Univ. 1957
- [8] A. S. Miščenko, Bordisms with the action of the group \mathbb{Z}_p and fixed points, Mat. Sbornik Tom 80 (1969), 英訳 Math. USSR Sbornik 9 (1969)
- [9] E. Cssa, Cobordismtheorie von Fixpunktfreien und Semifreien S^1 -Mannigfaltigkeiten, Thesis, Univ. zu Bonn (1969)
- [10] N. Shimada and C.-M. Wu, Bordism algebra of semi-free S^1 -actions, (to appear)
- [11] R. E. Stong, Bordism and involutions, Ann. of Math. 90 (1969)
- [12] J. C. Su, A note on the bordism algebra of involutions, Michigan Math. J. 12 (1965)
- [13] F. Uchida, Cobordism groups of semi-free S^1 - and S^3 -actions, Osaka J. Math. 7 (1970)
- [14] —————, Bordism algebra of involutions, Proc. Japan Acad. 46 (1970)
- [15] C.-M. Wu, Bordism and maps of odd period, Osaka J. Math. (to appear)