

抽象的 CAUCHY 問題の適切性について

早大 理工 岡 沢 登

$A$  を Banach 空間  $X$  内の線形作用素とし,  $A$  を係数にもつ微分方程式

$$(E) \quad (d/dt)u(t) = Au(t), \quad 0 < t < \infty,$$

を考える.  $A$  に対して

(A1)  $A$  の定義域  $D(A)$  は  $X$  で稠密である.

(A2)  $A$  は閉作用素である.

(A3)  $D(A^2)$  は  $A$  の芯である. 即ち,  $A$  の  $D(A^2)$  上への制限は closable であり, その閉包は  $A$  自身に等しい.

を仮定すると都合がよい. 但し,  $A$  の resolvent 集合  $\rho(A)$  が空でなければ, (A1) と (A2) から (A3) が導かれる.

方程式 (E) に対して抽象的 CAUCHY 問題 (Abstract CAUCHY Problem) を次の様に設定する:

ACP.  $u_0 \in X$  が与えられたとき, 次の三条件を満足する  $X$ -値関数  $u$  — ACP の解 — を見出せ.

(ACP1)  $u(t)$  は  $t > 0$  で連続的微分可能である。

(ACP2)  $t > 0$  では  $u(t) \in D(A)$  から  $u(t)$  は方程式(E)を満足する。

(ACP3)  $u(0) = \lim_{t \rightarrow +0} u(t) = u_0$ .

上に定義された ACP は HILLE-PHILLIPS[2]で  $ACP_2$ ,  
КРЕЙН[3]で緩められた CAUCHY問題と呼ばれているものと同  
じである。

さて

ACPの適切性. 次の二条件が成立するとき,  $A$  に対する  
ACPは適切であると言われる。

(適切1) 任意の  $u_0 \in D(A)$  に対して ACPの解が一意的に  
~~存在する~~ 存在する (解の一意存在)。

(適切2)  $u_n(0) \in D(A)$  を初期値とする解を  $u_n(t)$  とすると,  
 $u_n(0) \rightarrow 0$  in  $X$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であれば, 任意の  $t \geq 0$  で  
 $u_n(t) \rightarrow 0$  in  $X$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる (初期値に対する解の  
連続的依存性)。

この適切性の定義は КРЕЙН[3]における, 緩められた CAUCHY問  
題の  $D(A)$  上での適切性の定義と同じである。

本稿では ACP 及びその適切性を上に定めた意味によって,  
(E)に対する ACP が適切であるような線形作用素  $A$  の満足す

べき条件を調べ、またその条件から逆に  $A$  に対する  $ACP$  の解を構成することについて考えてみたい。この問題の解決は  $KPEЙH$ [3] の意図したところと思われるが、この問題について [3] に述べられている結果には不十分なところがある。しかし、条件 (適切 2) で収束  $u_n(t) \rightarrow 0$  in  $X$  が任意の有限区間  $[0, T]$  上で一様である場合には、上に述べた問題が  $(C_0)$  級半群を特徴付ける HILLE-YOSIDA-FELLER-MIYADERA-PHILLIPS の定理によつて完全に解決されることを示している。

### 1. $KPEЙH$ の結果の要約

$KPEЙH$ [3] に述べられている結果のうちで線形作用素  $A$  の resolvent 集合が空であつても成立するものを抜き出しておく。

$\mathcal{T}(t)$  を各  $u_0 \in D(A)$  に、初期条件  $u(0) = u_0$  に応ずる  $ACP$  の解の時刻  $t$  における値  $u(t)$  を対応させる作用素  $u(t) = \mathcal{T}(t)u_0$  とする。  $ACP$  が適切ならば、作用素  $\mathcal{T}(t)$  は  $D(A)$  上で定義され、線形かつ有界である。従つて連続性により、 $\mathcal{T}(t)$  は全空間  $X$  上で定義される有界線形作用素に一意的に拡張される (このために条件 (A1) が欠かせない)。拡張された作用素を再び  $\mathcal{T}(t)$  で表わすことにする。

$A$  に対する  $ACP$  が適切ならば、作用素の族  $\{\mathcal{T}(t); t > 0\}$

は半群の性質をもつ。

$u_0 \in D(A)$  ならば,  $T(t)u_0$  は一般化された解と呼ばれるわけであるが, これに対して

補題 1.1.  $A$  に対する ACP が適切ならば, すべての一般化された解は  $(0, \infty)$  で連続である.

補題 1.1 は任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\|T(t)\| \leq M_\varepsilon, \quad \varepsilon \leq t \leq 1/\varepsilon,$$

が示されることから判る. これで  $T(t)$  の  $t > 0$  での強連続性が出たわけで,

定理 1.2.  $A$  に対する ACP が適切ならば, その解は次の様に表わされる:

$$u(t) = T(t)u_0, \quad u_0 \in D(A),$$

但し,  $\{T(t); t > 0\}$  は有界線形作用素の作る強連続な半群である.

注意 1.3.  $u_0 \in D(A)$  ならば  $T(t)u_0 = u(t) \rightarrow u_0$  ( $t \rightarrow +0$ ) であるから,  $\{T(t)\}$  の continuity set  $\Sigma = \{u \in X; \|T(t)u - u\| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +0\})$  は  $D(A)$  を含んでいる. 従って  $D(A)$  が  $X$  で稠密であれば,  $\Sigma$  も  $X$  で稠密である. このことに注意すると,  $A$  に対す

る ACP が適切である場合には 条件(A1)から  $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$  が  $X$  で稠密になつてゐることが導かれることは容易に判る。また条件(A3)があると  $Y$  が  $A$  の芯であることも同様に示すことができる。

$\rho(A) \neq \phi$  の場合には,  $AT(t)u_0 = T(t)Au_0$ ,  $u_0 \in D(A)$ ,  $t > 0$ , を容易に示すことができるが,  $\rho(A) = \phi$  の場合にはもう少し準備が必要なようである。

■定理 1.2 により  $\{T(t)\}$  は半群をなすから, その type

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|T(t)\| = \omega_0 < \infty$$

が確定する。ACP の“解作用素”が半群に拡張されるような条件を置くことの一つの利点として次のことが判る。

補題 1.4.  $A$  に対する ACP は適切であるとする。  $\omega_0 \in \{T(t)\}$  の type とすれば,  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$  なる複素数  $\lambda$  に対して  $\lambda - A$  は可逆であり,  $\lambda - A$  の値域  $R(\lambda - A)$  は  $D(A)$  を含んでゐる:

$$(1) \quad D(A) \subset R(\lambda - A), \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_0.$$

(この包含関係を導くときは条件(A2)が用いられる。) 更に

$$(2) \quad (\lambda - A)^{-1} u = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) u \, dt, \quad u \in D(A).$$

(2) から  $A T(t) u_0 = T(t) A u_0$ ,  $u_0 \in D(A^2)$ , であることが判るから, 条件(A3)を用いれば

(3)  $(d/dt) T(t) u_0 = A T(t) u_0 = T(t) A u_0$ ,  $u_0 \in D(A)$ ,  $t > 0$ ,  
 が得られる. (3) は ACP の定義における条件(ACP1)を實際に表わしている. 尚 (3) から出発すれば (即ち条件(A3)を用いれば), (2) は  $u \in R(\lambda - A)$  に対して成立することが示される.

## 2. КРЕЙНの結果への補足

(1) に注意すれば,  $R(\lambda - A)$  上で  $(\lambda - A)^{-(n+1)}$  が定義されることが判るが,  $\rho(A) \neq \emptyset$  のときと同様に

補題 2.1.  $A$  に対する ACP が適切なならば,

$$(\lambda - A)^{-(n+1)} v = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t) v dt, \quad v \in R(\lambda - A).$$

但し,  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$  かつ  $n = 1, 2, \dots$ .

証明には,  $n$  に依する帰納法が便利なようである.

補題 2.2.  $A$  に対する ACP が適切なならば,

$$\|T(t)u\| \leq M e^{\omega_1 t} (\|u\| + \|Au\|), \quad u \in D(A), \quad t > 0,$$

となるような定数  $\omega_1 \geq \omega_0$  及び  $M > 0$  が存在する.

補題 2.2 の証明には,  $A$  が閉線形作用素であるから,  $D(A)$  が graph norm  $\|u\|_A = \|u\| + \|Au\|$  に関して Banach 空間  $[D(A)]$  になることに注意して共鳴定理を用いねばよい。

補題 1.4, 2.1 - 2.2 から次の定理が得られる:

定理 2.3.  $A$  に対する ACP が適切ならば,

I)  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$  なる  $\lambda$  に対して  $\lambda - A$  は可逆であり, かつ

$$D(A) \subset R(\lambda - A), \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_0.$$

II)  $u \in D(A)$  及び  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_1$  なる  $\lambda$  に対して

$$\|(\lambda - A)^{-n} u\| \leq M (\operatorname{Re} \lambda - \omega_1)^{-n} \|u\|_A, \quad n = 1, 2, \dots$$

但し,  $\omega_1$  と  $M$  は補題 2.2 における定数である。

更に もう一つ

定理 2.4.  $A$  に対する ACP が適切ならば

III) 任意の  $\varepsilon > 0$  と任意の  $u \in D(A)$  に対して

$$\|\xi^n (\xi - A)^{-n} u\| \leq M_\varepsilon \|u\|, \quad \varepsilon \leq n/\xi \leq 1/\varepsilon, \quad \xi > \xi_0,$$

$n$ : 十分大

となるような正数  $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon, u)$  と  $M_\varepsilon$  が存在する。

以上のことから次の定理の必要性の方が判る:

定理 2.5. Banach 空間  $X$  内の線形作用素  $A$  は次の三条件を満足しているものとする:

(A1)  $D(A)$  は  $X$  で稠密である.

(A2)  $A$  は閉作用素である.

(A3)  $D(A^2)$  は  $A$  の芯である.

このとき  $A$  に対する ACP が適切であるための必要十分条件は

I)  $\xi > \omega$  なる実数  $\xi$  に対して  $\xi - A$  は可逆かつ

$$D(A) \subset R(\xi - A), \quad \xi > \omega,$$

であるような実数  $\omega$  が存在する.

II)  $u \in D(A)$  に対して

$$\|(\xi - A)^{-n} u\| \leq M(\xi - \omega_1)^{-n} \|u\|_A, \quad \xi > \omega_1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

となるような実数  $\omega_1 \geq \omega$  と正数  $M$  が存在する.

の二つに定理 2.4 の条件 III) を加えた三つである.

実際, 定理 2.3 から  $A$  に対する ACP が適切ならば,  $\omega = \omega_0$  として定理 2.5 の条件 I) - II) が満たされていることが判る.

定理 2.5 の三条件が十分であることの証明は 2 段階に分けて行なうことにする. 即ちまず ACP の解作用素なる  $D(A)$  上で定義される 1 径教族  $\{U(t); t \geq 0\}$  を構成し, 次にそれを全



空間  $X$  上の有界線形作用素からなる半群  $\{T(t); t > 0\}$  に拡張するという段取りである。

### 3. $ACP$ の解作用素の構成

簡単のため定理 2.5 で  $\omega_1 = 0$  (従って  $\omega \leq 0$ ) の場合について来える。

閉作用素  $A$  に対する条件のうちで本節で用いるのは次の三つである：

(B1)  $\xi > 0$  に対して  $\xi - A$  は可逆かつ  $D(A) \subset R(\xi - A)$ 。

(B2)  $u \in D(A)$  に対して

$$\|\xi^n (\xi - A)^{-n} u\| \leq M \|u\|_A, \quad \xi > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

であるような定数  $M > 0$  が存在する (安定条件)。

(B3)  $D(A^2)$  は  $A$  の芯である。

(B1) と (B2) から KREĬN-LAPTEV-CVETKOVA [4] と同様にしてもより強い安定条件を導くことができる：

補題 3.1.  $A$  は条件 (B1), (B2) を満足する閉線形作用素とする。そのとき

(B2')  $u \in D(A)$  に対して

$$\|\xi^n(\xi - A)^{-n} \eta^m(\eta - A)^{-m} u\| \leq M \|u\|_A, \quad \xi, \eta > 0, \\ n, m = 0, 1, 2, \dots$$

さて本題には  $\eta = \xi$

定理 3.2. Banach 空間  $X$  内の閉線形作用素  $A$  に対して条件 (B1) - (B3) を仮定する。そのとき

$$(4) \quad U(t)u = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n} A\right)^{-n} u, \quad u \in D(A), \quad t \geq 0,$$

によつて 1 径教族  $\{U(t); t \geq 0\}$  - ACP の解作用素 - が一意的に定まる。但し、(4) の収束は任意の有限区間上で一様である。  $U(t)$  は次に挙げるような性質をもっている：

(a)  $t \geq 0$  で  $U(t)u$  は  $t$  に 関して連続である。また

$$\|U(t)u\| \leq M \|u\|_A, \quad u \in D(A), \quad t \geq 0.$$

特に、 $\|U(t)u - u\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0)$ 。

(b)  $A^p U(t)u = U(t)A^p u, \quad u \in D(A^{p+1}), \quad t \geq 0.$

但し、 $p = 1, 2, \dots$ 。更に

$$(\xi - A)^{-1} U(t)v = U(t)(\xi - A)^{-1}v, \quad v \in D(A), \quad \xi > 0.$$

(c)  $U(t)u - u = \int_0^t U(s)A u ds, \quad u \in D(A^2), \quad t \geq 0.$

(d)  $U(t+s)u = U(t)U(s)u, \quad u \in D(A^2), \quad t, s \geq 0.$

(e)  $(\xi - A)^{-1}v = \int_0^\infty e^{-\xi t} U(t)v dt, \quad v \in D(A), \quad \xi > 0.$

(4)の収束を  $u \in D(A)$  に対して直接に示すことはできていない(できないかも知れない)。  $u \in D(A^2)$  に対しては CRANDALL-LIGGETT[1]の方法に従えば、条件(B2')により次の評価式が得られる:

$$\|(1 - \frac{t}{n}A)^{-n}u - (1 - \frac{t}{m}A)^{-m}u\| \leq 2tM \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \|Au\|_A,$$

$$u \in D(A^2), \quad t \geq 0, \quad n \geq m: \text{正整数.}$$

従って

$$\|U(t)u - (1 - \frac{t}{m}A)^{-m}u\| \leq 2tM \|Au\|_A / \sqrt{m}.$$

resolvent集合が空でないという仮定を捨ててみると確かに不便なことが多いが、上にみた(4)の収束の証明をはじめ、残りの部分も HILLE-YOSIDAの定理の証明と本質的な差はないように思われる。

$A$ に対するACPについては定理3.2の(a), (b), (c)から

系3.3. 任意の  $u_0 \in D(A^2)$  に対して,  $u(t) = U(t)u_0$  は  $A$  に対するACPの一意解を与える。この  $u(t)$  は  $t=0$  までこめて可微分であるが、ACPの適切性の定義における意味での初期値への連続的依存性はない。

尚  $P(A) \neq \emptyset$  ならば,  $ACP$  の解作用素は LIONS により導入され, 最近 CHAZARAIN, USHIJIMA によりその生成作用素の特徴付けが行なわれた超関数半群と関連をもつが,  $P(A) = \emptyset$  のときには超関数半群的な議論との対応がつけられるのかどうかはまだはっきりしていないようである. 但し, FRÉCHET 空間  $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$  を導入すれば,  $ACP$  の解作用素の  $Y$  上への制限が  $Y$  上の同等連続な  $(C_0)$  級半群 (YOSIDA [6] 参照) となることは容易に判る.

HILLE-YOSIDA の定理の 上の定理 3.2, 系 3.3 のような形への拡張を最初に行なったのは SOVA [5] だと思われるが, [5] はあまり知られていないようである. SOVA [5] が扱ったのは  $P(A) \neq \emptyset$  の場合であるが,  $ACP$  の解作用素と超関数半群との関係や解作用素を半群に拡張する問題については全く触れていない (cf. [7]).

#### 4. 解作用素の半群への拡張

本節でも定理 2.5 で  $\omega_1 = 0$  の場合について考える.  $A$  に対する条件のうちで前節では除外した条件 (A1) と定理 2.4 の条件 III) を用いると

定理 4.1. 定理 2.5 の諸条件が満足されると 以下に挙げるような性質をもった半群  $\{\mathcal{T}(t); t > 0\}$  が一意的に定まる.

(a)  $\mathcal{T}(t)u = U(t)u$ ,  $u \in D(A)$ ,  $t > 0$ , 但し,  $\{U(t)\}$  は ACP の解作用素である.

(b)  $\|\mathcal{T}(t)u - u\| \rightarrow 0$  for  $u \in D(A)$  as  $t \rightarrow +0$ . ぞして

(5)  $\|\mathcal{T}(t)\| \leq M_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \leq t \leq 1/\varepsilon$ .

(c)  $A\mathcal{T}(t)u = \mathcal{T}(t)Au$ ,  $u \in D(A)$ ,  $t > 0$ .

(d)  $\mathcal{T}(t)u - \mathcal{T}(t_0)u = \int_{t_0}^t \mathcal{T}(s)Au ds$ ,  $u \in D(A)$ ,  $t \geq t_0 > 0$ .

(e)  $(\xi - A)^{-1}u = \int_0^\infty e^{-\xi t} \mathcal{T}(t)u dt$ ,  $u \in D(A)$ ,  $\xi > 0$ .

定理 4.1 の (b), (c), (d) から 系 3.3 に対応する結果として

系 4.2. 任意の  $u_0 \in D(A)$  に対して  $u(t) = \mathcal{T}(t)u_0$  は ACP の一意解を与える.

定理 4.1 と系 4.2 によって 定理 2.5 の十分性の方が証明されたことになる. 実際, (5) は解  $u(t) = \mathcal{T}(t)u_0$  の初期値  $u_0$  への連続的依存性を示す評価に他ならない.

以上で不十分ながら, КРЕЙН[3]の提起した問題への一つの解答を与える試みは終了です.

## 付 録

本文の定理 2.5 において条件 (A3) の代りに

$$(A3') \quad \rho(A) \neq \emptyset$$

も仮定しても 必要十分条件の個数が三つということに変わりはない。しかし次に述べる場合のように定理 2.4 の条件 III) がかくれてしまうこともある。

定理 A. Banach 空間  $X$  内の線形作用素  $A$  は次の三条件を満足しているものとする：

$$(A1) \quad \overline{D(A)} = X; \quad (A2) \quad A \text{ は閉作用素}; \quad (A3') \quad \rho(A) \neq \emptyset.$$

このとき  $|\theta| \leq \theta_0 - \varepsilon$ ,  $0 < \theta_0 \leq \pi/2$ , なるすべての  $\theta$  に対して  $e^{i\theta}A$  に対する  $ACP$  が適切であるための必要十分条件は

(HI)  $|\arg(\zeta - \beta)| < \pi/2 + \theta_0$ . なる複素数  $\zeta$  に対して,  $\zeta - A$  は可逆かつ  $D(A) \subset R(\zeta - A)$ , であるような実数  $\beta$  が存在する.

(HII)  $u \in D(A)$  とするとき, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\|(\zeta - A)^{-1}u\| \leq M_\varepsilon |\zeta - \beta|^{-1} \|u\|_A, \quad |\arg(\zeta - \beta)| \leq \pi/2 + \theta_0 - \varepsilon,$$

となるような正数  $M_\varepsilon$  が存在する.

の  $\Rightarrow$  である。この場合 解作用素  $\{U(t); t > 0\} =$  半群であり,  $U(t)$  は  $|\arg t| < \theta_0$  で  $t$  に関して解析的である。

尚 定理 3.2 に対応する " 解析的 " 解作用素は Banach 空間  $[D(A)]$  上の解析的半群になる。

### 引用 文献

- [1] CRANDALL - LIGGETT, to appear in Amer. J. Math.
- [2] HILLE - PHILLIPS, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31, revised ed., Providence, 1957.
- [3] С. Г. КРЕЙН, Наука, Москва, 1967.
- [4] KREĪN-LAPTEV-CVETKOVA, Soviet Math. Dokl., 11(1970), 763-766.
- [5] M. SOVA, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22(1968), 67-100.
- [6] K. YOSIDA, second ed., Springer-Kinokuniya, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1968.
- [7] 大春慎之助, 数理科学 (数理解析研究所) 講究録 69, (1969), 17-33.