数理解析研究所講究録
134巻 1972年 104-120

放物型半群について

東大 教養　牛 島 照 夫

はじめに

Banach 空間 X における有界線形作用素の半群 $\{T_t\}_{t>0}$ のうちで，$t>0$ では無限回微分可能であって，ある非負整数 n と正数 $s\geq 1$ に対して

$$\|(\frac{d}{dt})^j(t^nT_t)\| \leq ab^je^{\omega t}(j!)^st^{-s(j+l)},$$

$$t>0, \quad j=0, 1, 2, \cdots$$

なる型の評価をみたすものを特徴づけようとするのが，本稿の目的である。ただし，上の評価において，a，b，l は非負実数であり ω は実数である。とくに $n=0$，$s=1$，$l=0$ のときは，複素解析的な C_0-半群の場合であり，Hille-Phillips [4]，Yosida [11]，Kato [5] 等に詳細に論じられている。$n=0$，$s>1$ に対しては，T_t の生成作用素のレゾルヴェントが空でないことを保証するような条件のもとで，幾つか論じられている。たとえば，Poulesen [8]，Krein [7]， Crandall-Pazy [2], Ushijima [9] などがある。Barbu [1] は、$\{T_t\}_{t>0}$ が、distribution 半群になるとの前提のもとで、$n=0$ のときの特徴づけを、生成作用素 A のレゾルヴェントの存在領域とそこでの評価の形で与えた。ところで定数係数線形の行列微分作用素 $P=P(D)=(P_{\alpha\beta}(D))$ ($1\leq\alpha,\beta\leq m$, $D^{\gamma}=(\frac{\partial}{i\partial x_1})^{\gamma_1}\cdots(\frac{\partial}{i\partial x_N})^{\gamma_N}$) を係数とする空間 $X=\prod^{m}L_2(\mathbb{R}^N)$ での発展方程式

$$\frac{dx}{dt}=Px,\quad x(0)=x$$

を、解こうとするときに、P のレゾルヴェント集合が空になる場合も起こり得る（Krein [7], 才I章, §8 を参照せよ)。そこで、生成作用素 A のレゾルヴェント集合 $\rho(A)$ が空な場合も含めて理論を作っておくことも、若干の意義あることと思う。ここでは、定義域 $D(A)$ が稠密な場合のみを扱うことにする。双対半群等と関連して、$D(A)$ が稠密でない場合も重要であるが、これは今後論じていきたい。$n>0$, $s=1$, $l=0$ のときは Da-Prato [3] が論じているが、これは必ずしも $\rho(A)\neq\phi$ とならない例の一つである。

§1 では、研究の基礎となる A^{∞}-理論の結果を要約する。§2 では、正則な強連続半群とその生成作用素を定義し、その性質を調べる。§3 では、主定理を述べる。§4 では、Shilov の意味で放物型の定数係数線形偏微分作用素は、ある

付帯条件のもとでは、我々の問題としている条件をみたす半群を $X = \Pi L^2(\mathbb{R}^N)$ において生成することを、主定理の応用として述べたい。§2を除いては、上記の議論は全てUshijima [10] に詳細に論じられているので、対応する個所を指示するに止め、証明はほとんど省略する。§2の内容は、そこでは触れなかったので、やや詳しく述べたい。Ushijima [10] を [U] と略記する。

本研究を進めるに当って、大春慎之助氏との討論が有益であった。同氏に深く感謝申し上げる次第である。

§1. A^∞－理論

一般に、線形作用素 T の定義域、値域、および零空間を、それぞれ $D(T)$、$R(T)$、および $N(T)$ であらわすことにする。

ノルム $\|\ \|$ をもつ Banach 空間 X における線形作用素 A で、$D(A^\infty) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ が X で稠密なものを、考察の対象とする。このとき、$D(A^\infty)$ は、可算ノルム系 $\{\|x\|_n = \sum_{j=0}^{n} \|A^j x\|\}_{n=0,1,2,\cdots}$ からきまる位相をもつ Fréchet 空間 Y と見なせる。A の Y への制限 $A|_Y$ を、A_∞ で表わす。また、Y のノルム $\|x\|_k$ による完備化を Y_k であらわす。$\rho(A) \neq \emptyset$ ならば、$Y_k = D(A^k)$ であり、Y_k の位相は、$D(A^k)$ のグラフ位相によるものと一致する。

定義 1.1.（A^∞-適切性）. 作用素 A が，A^∞-適切（$A\in(A^\infty)$ と略記）とは，A_∞ が Y において，クラス C_0 の半群 $\{T_\infty(t): t\geq 0\}$ を生成することをいう。

A が条件（A_c^∞）をみたす（$A\in(A_c^\infty)$）とは，A が A^∞-適切であって，任意の $t>0$ に対してある定数 $C_t>0$ があって，

$$\|T_\infty(t)x\| \leq C_t\|x\|, \quad x\in Y$$

となることをいう。

A が，条件（A_c^∞, n）をみたす（$A\in(A_c^\infty, n)$）とは，$A\in(A_c^\infty)$ でありさらに次の条件（n）をみたすことをいう：

（n）$\begin{cases} \text{ある定数 } C>0 \text{ と，非負整数 } k \text{ があって，} \\ \text{全ての } \varphi\in\mathcal{D}_{(-1,1)} \text{ と } x\in Y \text{ に対して，} \\ \left\|\int_0^1 \varphi(t)t^n T_\infty(t)x\,dt\right\| \leq C|\varphi|_k\|x\| \end{cases}$

ただし，$|\varphi|_k = \sup_{t\in\mathbb{R}^1}\sum_{j=0}^{k}\left|\varphi^{(j)}(t)\right|$ である。

定義 1.2.（逐次レゾルヴェント）. 複素数 λ が，n 次の逐次レゾルヴェント集合 $\rho_n(A)$ に属すとは，$\lambda\in\rho(A_\infty)$ であり，かつある $C_\lambda>0$ が存在して，

$$\|(\lambda-A_\infty)^{-n}x\| \leq C_\lambda\|x\|, \quad x\in Y$$

をみたすことをいう。Y が X で稠密なことから，$(\lambda-A_\infty)^{-n}$ は，有界作用素 $R_n(\lambda)\in L(X)$ に拡張される。この $R_n(\lambda)$ を，n 次の逐次レゾルヴェントという。複素数 λ が，本質的な

n 次の逐次レゾルヴェント集合 $\rho_{n,e}(A)$ に属すとは，$\rho_n(A)$ に含まれる λ の適当な近傍 U_λ とある定数 C_λ があって，

$$\|R_n(\lambda')\| \leqq C_\lambda, \quad \lambda' \in U_\lambda$$

となることをいう。

<u>命題 1.3.</u> 次の諸性質がなりたつ。

1. $\rho_1(A) = \rho(A)$ （[U], Proposition 2.2）。

2. $\rho(A) \neq \phi$ ならば，全ての n について $\rho_n(A) = \rho(A)$ でありかつ $R_n(\lambda) = (\lambda - A)^{-n}$ （[U], Proposition 2.1, Corollary）。

3. $\lambda \in \rho_n(A)$ に対して $N(R_n(\lambda)) = \{0\}$ であることと，$(\lambda - A_\infty)^n$ が，X で閉包をもつこととは同値（[U], Proposition 2.3）。

4. $\lambda \in \rho_n(A)$ のとき，$\lambda \in \rho(A)$ と，$(\lambda - A)^n$ が閉作用素であることとは同値であり，このとき $\overline{A_\infty}$ =(A_∞ の X での閉包)$= A$ である（[U], Proposition 2.5）。

かなり広いクラスの閉作用素 A に対して $D(A^\infty)$ は，A のコア（すなわち $\overline{A_\infty} = A$ ）になっていると思われるが，$\rho(A) = \phi$ のときにも有効であるような判定条件は未だ得ていない。さらに $\overline{A_\infty} \subsetneqq A$ かつ $\overline{D(A)} = X$ となる例も持っていない。

$\rho_{n,e}(A) \neq \phi$ としよう。このとき，$(\lambda - A_\infty)^{-n}$ は $\rho_{n,e}(A)$

上では，$L(Y)$−値の解析関数になる。したがって，

<u>命題 1.4.</u>　n 次の逐次レゾルヴェント $R_n(\lambda)$ は開集合 $\rho_{n,e}(A)$ 上で解析的である（[U], Proposition 2.7）。

<u>系 1.5.（$\rho_{n,e}(A)$ の性質）.</u>

1. $\rho_{n,e}(A) \subset \rho_{n+1,e}(A)$，さらに詳しく，$\rho_{n,e}(A)$ の連結成分は，$\rho_{n+1,e}(A)$ の連結成分である（[U], Proposition 2.7, Corollaries 1, 4.）。

2. $\rho_{n,e}(A) \neq \emptyset$ ならば，$m \geqq n$ かつ λ がある $\rho_{n,e}(A)$ の連結成分を動くとき，$N(R_m(\lambda))$ は一定である（[U], Proposition 2.8）。

3. $A \in (A_c^\infty, n)$ とすると $\rho_{n+1,e}(A)$ に含まれる，ある右半平面 $\Lambda_E = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geqq \omega\}$ が存在する（[U], Proposition 3.3）。さらに，任意の $\lambda \in \Lambda_E$ に対して，

$$N(R_{n+1}(\lambda)) = \bigcap_{t>0} N(T_t)$$

がなりたつ（[U], Proposition 5.3）。ここで $\{T_t : t>0\}$ は $T_\infty(t)$ の X での閉包の作る強連続半群である。

<u>命題 1.6（(A_c^∞, n) クラスの Cauchy 問題，[U], Theorem 5.1.）.</u>　$A \in (A_c^\infty, n)$ とする。$\rho_{n+1,e}(A)$ の右半平面を含む連結成分の一点 λ_0 で，$(\lambda_0 - A_\infty)^{n+1}$ が，X で閉包をもつとする。このとき，Cauchy 問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \quad t>0, \\ x(0) = x, \end{cases}$$

の解 $x(t) \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$ で $x(t) \in D(\bar{A}_\infty)$ をみたすものが存在したとすれば，$x(t) = T_t x$ と書ける。さらに次の性質をみたす非負整数kがある。すなわち，$x \in Y_k$ ならば，$x(t) = T_t x$ は，上述した意味での真の解であり，$x \in Y_{k+j}$ ならば $x(t) = T_t x \in C^j([0,\infty))$ である。

§2. 正則な強連続半群.

<u>定義 2.1</u> 強連続な有界作用素の半群 $\mathcal{T} = \{T_t : t>0\}$ が，正則であるとは，次の二条件をみたすことをいう。

(2.1) $\displaystyle\bigcup_{t>0} R(T_t)$ は X で稠密.

(2.2) $\displaystyle\bigcap_{t>0} N(T_t) = \{0\}$.

一般に $t>0$ で強連続な半群 $\mathcal{T} = \{T_t : t>0\}$ に対して，その連続集合Σおよび極小値域$\mathcal{R}$を次のように定める。

$$\Sigma = \{x : \lim_{t\downarrow 0} \|T_t x - x\| = 0\},$$

$$\mathcal{R} = \text{linear hull of } \{\mathcal{T}(\varphi)x : \varphi \in \mathcal{D}(0,\infty), x \in X\},$$

ただし，$\mathcal{T}(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t) T_t x \, dt$ とおく。このとき，

<u>命題 2.2.</u> $\displaystyle\bigcup_{t>0} R(T_t)$，$\Sigma$，および $\mathcal{R}$ の X における閉包は同一である。

証明 定義から $\mathcal{R}\subset\bigcup_{t>0}R(T_t)\subset\Sigma$ となる。Σ の元を $\mathcal{R}$ で近似するためには，$\{\varphi_j\}\subset\mathcal{D}(0,\infty)$ で $\varphi_j\to\delta$ となる列をとりあげれば $\mathcal{T}(\varphi_j)x\to x$ $(x\in\Sigma)$ である。

定義 2.3.（微分商，強生成作用素） 通常は，生成作用素とよばれるものをここでは微分商とよぶ。すなわち，定義域を

$$D(A_0)=\{x:\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}(T_tx-x)=y\text{ が存在する}\}$$

とする線形作用素

$$A_0x=y$$

を $\mathcal{T}=\{T_t\}$ の微分商という。微分商 A_0 の制限として強生成作用素 A_s を次のように定める。

$$D(A_s)=\{x\in D(A_0):\ A_0x\in\Sigma\},$$
$$A_sx=A_0x,\quad x\in D(A_s).$$

クラス C_0 の半群に対しては，$A_0=A_s$ であることに注意しておく。なお $x\in D(A_0)$ ならば，$T_tx\in C([0,\infty))\cap C^1((0,\infty))$ であり，$x\in D(A_s)$ ならば，$T_tx\in C^1([0,\infty))$ である。

命題 2.4. 正則な強連続半群 $\mathcal{T}$ の強生成作用素を A_s とすると，次のことがなりたつ。

1. A_s は閉包 A をもつ。

2. $\mathcal{R} \subset D(A_s^\infty)$.

3. $\mathcal{R}$はAのコアである。

4. $A = \overline{A_\infty}$.

証明 1. $x \in D(A_0)$, $t>0$ に対しては $T_t x \in C^1(0,\infty)$ かつ

$$\frac{d}{dt} T_t x = T_t A_0 x \ , \quad t > 0 \ ,$$

となることは、通常の論法によって示せる（Yosida [11]. p 239）。したがって、

$$T_t x - T_s x = \int_s^t T_\sigma A_0 x \, d\sigma \ , \quad 0<s<t$$

となる。$\{x_j\} \subset D(A_0)$ を、$x_j \to 0$ かつ $A_0 x_j \to y$ とすると上の表示から

$$0 = \int_s^t T_\sigma y \, d\sigma \ , \quad 0 < s < t$$

したがって、$T_\sigma y = 0 \quad \forall \sigma > 0$ となり、(2.2) により、$y=0$。すなわち、A_0 は閉拡大 $\overline{A_0}$ をもつ。A_s は A の制限であるから、閉包 $A \subset \overline{A_0}$ をもつ。

2. $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$, $x \in X$ に対して $\mathcal{J}(\varphi)x \in D(A_s)$ かつ

$$A_s \mathcal{J}(\varphi) x = -\mathcal{J}(\varphi') x$$

となることは、定義にしたがって直接たしかめられる。上式から、$\mathcal{R} \subset D(A_s^\infty)$ がしたがう。

3. $x \in D(A_s)$ ならば、

$$\mathcal{J}(\varphi) x = \int_0^\infty \varphi(t) T_t x \, dt$$

$$A_s\mathcal{J}(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t)T_tA_sx\,dt$$

となる。ここで $\{\varphi_j\}\subset\mathcal{D}(0,\infty)$　$\varphi_j\longrightarrow\delta$ となる列をとると，x, $A_sx\in\Sigma$ なることから，

$$\mathcal{J}(\varphi_j)x\longrightarrow x\;,\quad A_s\mathcal{J}(\varphi_j)x\longrightarrow A_sx$$

がしたがう。

4は3からしたがう。

上にみたように，A_0 は閉包 $\overline{A_0}$ をもつが，それが，A_s の閉包 A と一致するか否かは，今の所あきらかではない。そこで，次の定義を採用する。

<u>定義 2.5.</u>　正則な強連続半群 $\mathcal{J}$ に対して強生成作用素 A_s の閉包 A をその生成作用素という。

<u>命題 2.6.（生成作用素の性質）</u>　正則な強連続半群 $\mathcal{J}=\{T_t\}$ が，生成作用素 A をもつとする。このとき，次のことがなりたつ。

1. 任意の $t>0$ と $x\in D(A)$ に対して，

$$T_tAx = AT_tx\,.$$

2. $A\in(A_c^\infty)$ ならば，$x\in Y$ に対して $T_\infty(t)x=T_tx$ である。

3. $A\in(A_c^\infty)$ と $\Sigma\supset Y$ は同値である。これはさらにある k に対して $\Sigma\supset Y_k$ となることと同値である。

<u>証明</u> 1. $x \in D(A_s)$ に対しては結論がなりたつことによる。

2. 命題 2.4 により $\mathcal{R} \subset D(A_s^\infty) \subset Y$ である。$x \in \mathcal{R}$ とすれば，$T_t x$ は，$t \downarrow 0$ のとき Y で x に収束する方程式 $\frac{dx}{dt} = A_\infty x$，$x(0) = x$ の解である。Y における解の一意性から，$T_t x = T_\infty(t) x$，$x \in \mathcal{R}$ である。命題 2.2 と $\mathcal{T}$ が正則なことから，$\mathcal{R}$ は X で稠密である。したがって，T_t は $T_\infty(t)$ の X での閉包になる。とくに $x \in Y$ とすれば $T_t x = \overline{T_\infty(t)} x = T_\infty(t) x$ である。

3. $A \in (A_c^\infty)$ とすると，$x \in Y$ ならば，2 より $T_t x = T_\infty(t) x \longrightarrow x$，$t \downarrow 0$ である。1 により $T_t A^n x = A^n T_t x$ が任意の整数 $n \geq 0$ と $t > 0$ と $x \in Y$ についてなりたつ。$\Sigma \supset Y$ とすると，$x \in Y$ ならば，$A^n x \in Y$ だから，$t \downarrow 0$ のとき $A^n T_t x = T_t A^n x \longrightarrow A^n x$。すなわち，$T_t x \to x$ が Y でなりたつ。このことから，$x \in Y$ に対して

$$T_\infty(t) x = \begin{cases} T_t x & t > 0 \\ x & t = 0 \end{cases}$$

によって，$T_\infty(t)$ を定めると，$T_\infty(t)$ は，A_∞ を生成作用素とする Y におけるクラス C_0 の半群であることがわかる。当然 $t > 0$ のとき $T_\infty(t)$ の閉包は T_t である。条件 $\Sigma \supset Y_k$ が $\Sigma \supset Y$ を意味するのは，あきらかである。空間 Y

は Fréchet 空間であるから，$T_\infty(t)$ がクラス C_0 であることと，局所同等連続であることとは同値である（Kōmura [6], Proposition 1.1）．とくに，ある k が存在して，

$$\| T_\infty(t)x \| \leq C \|x\|_k , \quad 0 \leq t \leq 1 , \quad x \in Y$$

となる。これから

$$\| T_t x \| \leq C \|x\|_k , \quad 0 \leq t \leq 1 , \quad x \in Y_k$$

が得られるから，$x \in Y_k$ ならば，$\lim_{t \downarrow 0} T_t x = x$ が X の位相でなりたつ。

§3 放物型半群，クラス $(s, n)_0$ の正則な強連続半群

定義 3.1. ある $s \geq 1$ と整数 $n \geq 0$ に対して正則な強連続半群 $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t>0}$ がクラス $(s, n)_0$ であるとは，$\mathcal{T}$ の生成作用素が条件 (A_c^∞, n) をみたし，さらに，$t > 0$ では T_t が $L(X)$-値 C^∞-関数であり，かつ，適当な $a, b, \ell \geq 0$ と実数 ω に対して，評価

$$(3.1) \quad \left\| \left(\frac{d}{dt}\right)^j (t^n T_t) \right\| \leq a\, b^j (j!)^s e^{\omega t} t^{-s(j+\ell)}$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \quad t > 0$$

をみたすことをいう。

定理 3.2. $s \geq 1$ とする。線形作用素 A が，クラス $(s, n)_0$ の正則な強連続半群の生成作用素であるための必要充分な条件は，A が稠密な $D(A^\infty)$ をコアとする閉作

用素であり，かつ，$\rho_{n+1}(A)$ に含まれる S-型領域 Λ_s で次の性質 (3.1)，(3.2) をもつものが存在することである：

(3.2)　$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leq C(1+|\lambda|)^k$,　$\lambda \in \Lambda_s$,

(3.3)　ある $\lambda_0 \in \Lambda_s$ で $N(R_{n+1}(\lambda_0)) = \{0\}$.

ここで Λ_s が S-型領域であるとは適当な整数 α と実数 β に対して，

$$\Lambda_s = \{\lambda = \xi + i\eta : \xi \geq -\alpha|\eta|^{1/s} + \beta\}$$

と書けることをいう。

<u>略証</u>　必要性：$\mathcal{T}$ の生成作用素を A とすると，命題 2.4 から，$Y = D(A^\infty)$ は稠密で A のコアになっている。命題 2.6 から，T_t を Y に制限した $T_\infty(t)$ は，A_∞ を生成作用素とする Y におけるクラス C_0 の半群である。[U] の Theorem 8.2 により，$R_{n+1}(\lambda)$ の存在領域と評価が得られる。系 1.5 の 2 および 3 により，$N(R_{n+1}(\lambda)) = \{0\}$ が全ての $\lambda \in \Lambda_s$ でなりたつ。

充分性：$R_{n+1}(\lambda)$ の存在領域および評価から，A が条件 (A_c^∞, n) をみたし，かつ，$T_\infty(t)$ の閉包 T_t が評価 (3.1) をみたすことが [U] の Theorem 8.1 からしたがう。条件 (3.3) と系 1.5 から $\bigcap_{t>0} N(T_t) = \{0\}$ である。$x \in D(A^\infty)$ ならば $T_\infty(t)x \longrightarrow x$ より，$\bigcup_{t>0} R(T_t)$ は X で稠密である。すなわち，$\mathcal{T} = \{T_t\}$ は，正則である。さらに，定義 2.5 の

意味での生成作用素が，Aと一致することを示そう。まず$x \in D(A^\infty)$ $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$に対して

$$A\mathcal{T}(\varphi)x = -\mathcal{T}(\varphi')x$$

がなりたつことは容易にわかる。$D(A^\infty)$が，Xで稠密なことと，Aの閉性を使えば，任意の$x \in X$と$\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$に対して，$\mathcal{T}(\varphi)x \in D(A^\infty)$，すなわち$\mathcal{R} \subset D(A^\infty)$であることがわかる。$\mathcal{T}$の強生成作用素を$A_s$とすると，今のべたことから$A_s|_{\mathcal{R}} \subset A_\infty$（$A_s|_{\mathcal{R}}$は，$A_s$の$\mathcal{R}$への制限）．命題2.4から，$\overline{A_s} = \overline{A_s|_{\mathcal{R}}} \subset \overline{A_\infty} = A$．一方$A$が$A^\infty$-適切なことから，$A_\infty \subset A_s$ したがって$A \subseteq \overline{A_s}$。以上から，$A = \overline{A_s}$。

§4．定数係数微分作用素への応用

定数係数行列微分作用素$P(D)$を考えよう：

$$P(D) = (P_{\alpha,\beta}(D)) : 1 \leq \alpha, \beta \leq m,$$

$$P_{\alpha,\beta}(D) = \sum_{|\gamma| \leq M} C_{\alpha,\beta,\gamma} D^\gamma,$$

$$D^\gamma = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\partial}{i\partial x_2}\right)^{\gamma_2} \cdots \left(\frac{\partial}{i\partial x_N}\right)^{\gamma_N},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

空間$X = \prod^m L^2(\mathbb{R}^N)$において，Fourier変換によって，$P(D)$から得られる作用素$P$を次のように定める：

$$D(P) = \{u(\xi) \in X : P(\xi)u(\xi) \in X\}$$

$$(Pu)(\xi) = P(\xi)u(\xi), \quad u \in D(P).$$

この P は、閉作用素で、$D(P^\infty)$ がコアになっていることは容易にたしかめられる。行列 $P(\xi)$ の特性根を $\lambda_j(\xi)$ $(1 \leq j \leq m)$ とおく：$\det(\lambda_j(\xi) - P(\xi)) = 0$．特性根の集合を σ とおく：$\sigma = \{\lambda_j(\xi) : 1 \leq j \leq m,\ \xi \in \mathbb{R}^N\}$.

定義 4.1. $P(D)$ が、特性根条件をみたすとは、ある正数 K が存在して次の 2 性質 (R.1), (R.2) をみたすことをいう。

(R.1) 整数 r_1, r_2, C_1, C_2 が存在して，

$$C_1|\xi|^{r_1} \leq |\lambda_j(\xi)| \leq C_2|\xi|^{r_2}$$

が、全ての $|\xi| \geq K$ と、$1 \leq j \leq m$ でなりたつ。

(R.2) $|\xi| \geq K$ ならば、特性根の重複度は一定でかつ相異なる根同志の距離は下から有界である。すなわち、相異なる m' 個の特性根 $\lambda_j(\xi)$ と正整数 $m_j > 0$ $\sum_{j=1}^{m'} m_j = m$ があって，$|\xi| \geq K$ では、

$$\det(\lambda - P(\xi)) = \prod_{j=1}^{m'} (\lambda - \lambda_j(\xi))^{m_j}$$

かつ、ある $\delta > 0$ があって

$$|\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi)| \geq \delta, \quad j \neq k$$

となる。

定理 4.2. ([U], Theorem 10.3) $s \geq 1$ とする．$P(D)$ は特性根条件をみたすとする．作用素 P が適当な正整数

nに対して クラス$(S, n)_0$の正則な強連続半群の生成作用素であるための必要充分条件は，特性根の集合σを含まないS型領域Λ_Sが存在することである。

上の定理の条件をShilovの意味の放物型の条件と照合すると，次の命題を得る。

<u>命題 4.3.</u> ([U] Proposition 10.1). $P(D)$が(R.1)をみたし，かつ特性根の集合σを含まないS型領域が存在することと，$P(D)$がShilovの意味の放物型であることとは同値である。ここでShilovの意味の放物型とは，正数a, hと実数bがあって全ての特性根に対して

$$\mathrm{Re}\lambda_j(\xi) \leqq -a|\xi|^h + b, \quad 1 \leqq j \leqq m, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

となることである。

上の定理4.2の充分性の証明の基本になるのは次の補題である。

<u>補題 4.4.</u> $P(D)$は特性根条件をみたすとする。$\Omega_R = \{\lambda : \mathrm{dist}(\lambda, \sigma) \geqq 1, |\lambda| \geqq R\}$とおく。$n, R, l$を充分大きくとると，

$$|(\lambda - P(\xi))^{-n}| \leqq C(1+|\lambda|)^l, \quad \lambda \in \Omega_R$$

と評価できる。ここで$|(\lambda - P(\xi))^{-n}|$は行列ノルムである。

References

1. Barbu, V., Differentiable distribution semi-groups, Annali della Scuola Norm. Sup. 23, 413-429 (1969).

2. Crandall, M. G. & Pazy, A., On the differentiability of weak solution of a differential equation in Banach space, J. Math. Mech. 18, 1007-1016 (1969).

3. Da Prato, G., Semigruppi di crescenza n, Ann. Sc . Norm. Sup. Pisa, 20, 753-782 (1966).

4. Hille, E. and Phillips, R. S., Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31 (1957).

5. Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, (1966).

6. Kōmura, T., Semi-groups of operators in locally convex soaces, J. Functional Analysis, 2, 258-296 (1968).

7. Krein, S. G., Linear differential equations in Banach space, (in Russian), Nauka Moskow (1967).

8. Poulsen, E. T., Evolutionsgleichungen in Banach-Raumes, Math. Zeitschr. 90, 286-309 (1965).

9. 牛島照夫, 線形作用素の半群の滑らかさについて, 数理解析研究所講究録 93, 56-75 (1970).

10. Ushijima, T., On the generation and smoothness of semi-groups of linear operators, (pre-print).

11. Yosida, K., Functional Analysis, Springer, Berlin, (1965).