

局所凸空間における半群の生成について

東京都立大学 理学部

大内 忠

局所凸空間における半群の生成を, T. Komura [2] とは異なり, 本方法で, より簡単な形で与える.

$X$  を locally convex Hausdorff space とする.  $L(X)$  を  $X$  から  $X$  への sequentially complete continuous linear map の全体とする.

定義  $\{T_t; t \geq 0\} \subset L(X)$  が, 次の (i) ~ (iii) を満たす時半群と呼ばれる.

(i)  $T_{t+s} = T_t T_s \quad (t, s \geq 0)$

(ii)  $T_0 = I$

(iii)  $\lim_{t \rightarrow s} T_t x = T_s x \quad \text{for } \forall x \in X$

$T_t$  の生成作用素  $A \in$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t - I}{t} x$  が存在する  $x$  に対して, その極

限として  $Ax$  と定義する.

半群  $T_t$  が *equicontinuous* とは 任意の連続セノル  $\epsilon$  に対して ある連続セノル  $\delta$  があって

$$\sup_{0 \leq t < \delta} p(T_t x) \leq \epsilon(x) \text{ が成り立つことである.}$$

また半群  $T_t$  が *locally equicontinuous* とは

$$\sup_{0 \leq t < \delta} p(T_t x) \leq \epsilon(x) \text{ が成り立つこと, かつ}$$

ち compact interval 上で 同等連続のことである.

*equicontinuous semi groups* に対しては L. Schwartz [3], H. Komatsu [1], K. Yosida [4] の結果があり, 生成作用素  $A$  の *resolvent* をもちいて半群を描成しており, 本質的には Banach space と同様の技法が用いられている.

*locally equicontinuous semi-groups* に対しては Banach space の時の技法が  $A$  の *resolvent* が存在しないため用いられず, T. Komura [2] において, <sup>必ず</sup>この難点を *generalized resolvent* を用いて切り抜けている.

しかし, 彼女の方法はまた簡単とは思えないし, *generalized resolvent* なる概念は複雑であるように思われる. ここにおいては, 別の概念 (*asymptotic resolvent*) を導入することにより, より簡易化しよう.

定義  $\{R(\lambda) ; \lambda > \omega\} \subset L(X)$  が次の条件 (i)~(iii) を満たす時  $A$  の漸近的  $L$  ソルベントといわれる

(i)  $\forall x \in X$   $R(\lambda)x$  は  $C^\infty$  function

(ii)  $R(\lambda)X \subset D(A)$   $R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$   
 $R(\lambda)A = AR(\lambda)$

(iii)  $R(\lambda)(\lambda - A) = (\lambda - A)R(\lambda) = I + S(\lambda)$

ここで  $S(\lambda) \in L(X)$  であつ、任意の連続 semi norm

$p$  に対し、ある連続 semi norm  $q$  があり、ある  $a > 0$  に対し

$$p\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} S(\lambda)x\right) \leq a^k e^{-a\lambda} q(x) \text{ を満たす.}$$

よつて locally equicontinuous semi groups に対応する Hille-Yosida の定理は次の形で行われる。

定理  $A$  が locally equicontinuous semi group の生成作用素であるための必要十分条件は

(i)  $A$  は densely defined closed operator

(ii)  $A$  は漸近的  $L$  ソルベント  $R(\lambda) \in \mathcal{L}X$

$$\left\{ \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda) ; \lambda > \omega, n=0,1,2,\dots \right\} \text{ が}$$

equicontinuous.

## Remarks

- (i):  $T_t$  が equi continuous の時は  $S(\lambda) \equiv 0$ , また locally equi continuous の時は, 例えは  $S(\lambda) = e^{-a\lambda} S(SFL(X))$  ととれる. 他にも  $S(\lambda)$  のとり方はいろいろある.
- (ii)  $A$  から  $T_t$  を構成する時は, 逆 Laplace 変換を用いる, Yosida 近似的方法で作る. 従って, 実軸上に  $\infty$  に発散する点においてのみ漸近的レゾルベントが存在するよう に formulate できる. (もちろん, 漸近的レゾルベントの定義を少し変えればならないか)
- (iii) 漸近的レゾルベントの概念を用いて, 今迄を群について知られている公式, 例えは exponential formula など, いろいろかえかて来る.
- 詳細は, いろいろどこかに発表する予定である.

## References

- [1] H. Komatsu. Semi-groups of operators in locally convex spaces. J. Math. Soc. Japan 16 (1964) 230-262.
- [2] T. Komura. Semi-groups of operators in locally convex spaces. J. Functional Analysis 2. (1968) 258-296.

- [3] L. Schwartz. Lectures on Mixed problems in partial differential equations and the representation of semi groups. Tata institute of Fundamental Research 1958
- [4] K. Yosida. Functional Analysis. Springer, Berlin, 1965.