数理解析研究所講究録
134巻 1972年 37-50

Banach空間におけるAccretive作用素について

広大理　劒持信幸

1. 序

この小論において，Banach空間における（一般に多価）accretive作用素のlocal boundedness，m-accretiveness，及び maximal accretiveness について論ずる。

Hilbert空間における accretive 作用素はその定義域の内実においてlocally bounded であることが知られている（Pazy [6]，Rockafellar [7]を参照）。この事実は，連続かつ逆連続な duality 作用素をもつ Banach空間においても正しいということを示そう。

次に，抽象的 Cauchy 問題

$$(E) \qquad \frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0 \quad , \qquad u(0) = a$$

を考える。ここで，未知関数 $u(t)$ は実数区間 $[0, +\infty)$ 上定義され，Banach 空間 X の中に値をもつような関数であり，

Aは X における accretive 作用素である。T. Kato [5] の結果によると，X^*（X の dual 空間）が uniformly convex であり A が X 全体を定義域にもつような一価の hemicontinuous accretive 作用素であるならば，(E) は任意に与えられた $a \in X$ に対し解をもち，さらに A は m-accretive である。この T. Kato の結果を，A が多価の locally bounded かつ maximal accretive 作用素である場合に拡張し，さらに X に対するいくらかの制限のもとで，定義域が開集合であるような maximal accretive 作用素は m-accretive であるということを示そう。

2. 記号の説明と定義

小論を通じ X を実 Banach 空間，X^* をその dual 空間とする。X 及び X^* における norm は $\|\cdot\|$ で表わし，$x^* \in X^*$ の $x \in X$ における値を $\langle x, x^* \rangle$ で表わす。

X の各点 x に対し X の部分集合 Tx を対応させる作用素 T に対し，集合 $D(T) = \{x \in X ; Tx \neq \phi\}$ をその定義域という。T が $x_0 \in X$ において locally bounded であるとは，x_0 のある近傍 U で，$T(U) = \cup\{Tx ; x \in U\}$ が X の有界集合となるものが存在することをいう。

X から X^* の中への作用素 $J : x \longrightarrow Jx = \{x^* \in X^* ;$

$\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \}$ を duality 作用素という。X^*が strictly convex ならば，J は一価の作用素であり，さらに uniformly convex ならば，J は X の各有界集合上で一様連続であることが知られている（T. Kato [4] を参照）。

X における作用素 T が accretive であるとは，$D(T)$の任意の二点 x, y と，任意の $x' \in Tx$，$y' \in Ty$ に対し $\langle x'-y', f \rangle \geqq 0$ となるような $f \in J(x-y)$ が存在することをいう。accretive 作用素 T が maximal accretive であるとは，T の真の accretive な拡張が存在しないことをいい，m-accretive であるとは，$R(I+T) = \{ x+x' ;\ x' \in Tx,\ x \in X \} = X$ となることをいう。

$B(x, r)$（resp. $B^*(x^*, r)$）によって X（resp. X^*）における中心 x（resp. x^*）半径 r の closed ball を表わす。

3. accretive 作用素の local boundedness

この節を通して，X 及び X^* は strictly convex とし，duality 作用素 J は連続かつ逆連続（従って J は X から X^* 上への位相写像）であるとする。このとき次の結果を得る。

［定理1］ T を X における（一般に多価の）accretive 作用素とする。このとき $\mathring{D}(T)$（$D(T)$の内点全体）の各点におい

て，Tは locally bounded である．

この定理を示すには，次の二つの補題を用いる。証明の方針は Rockafellar [7] による。

［補題1］ SをXの部分集合で，$(-S)\cap\mathring{S}\neq\phi$ とする。このとき，二正数 ε，δ で

$$B^*(0,\varepsilon)\subset\bigcap_{x\in B(0,\delta)}\mathrm{conv}(J(S-x))$$

となるものが存在する。ただし，$\mathrm{conv}(J(S-x))$ によって $J(S-x)$ の convex hull を表わす。

［補題2］ TをXにおける多価作用素，$0\in\mathring{D}(T)$ とする。このとき，次のような性質をもつ有界集合 S，S'，C が存在する：(1) $(-S)\cap\mathring{S}\neq\phi$ (2) $\overline{S'}=S$ ($\overline{S'}$ は S' の閉包を示す) (3) $Tx\cap C\neq\phi$ $\forall x\in S'$．

定理1の証明： $0\in\mathring{D}(T)$ として，Tが0で locally bounded であることを示せば十分である。従って $0\in\mathring{D}(T)$ とする。補題2によって，(1)，(2)，(3) を満たす有界集合 S，S'，C が存在する。$\rho=\sup\{\|x\|;x\in S\}$，$\rho'=\sup\{\|x\|;x\in C\}$

とおく。補題1によって，二正数 ε，δ が存在して

$$(4) \qquad B^*(0,\varepsilon) \subset \bigcap_{x\in B(0,\delta)} \mathrm{conv}(J(S-x))$$

とできる。このとき，$T(B(0,\delta))$ は X の有界集合であることを示せばよい。そのため，$B(0,\delta)$ の点 x，Tx の点 x' を任意にとる。T の accretiveness より，任意の $u\in S'$ と $u' \in Tu\cap C$ に対し，

$$\begin{aligned} \langle x', J(u-x)\rangle &\leqq \langle u', J(u-x)\rangle \\ &\leqq (\|u\|+\|x\|)\|u'\| \\ &\leqq (\rho+\delta)\rho' \end{aligned}$$

が成立。即ち

$$J(S'-x) \subset \{x^*\in X^* ;\ \langle x', x^*\rangle \leqq (\rho+\delta)\rho'\} \equiv F。$$

J は位相写像だから，$J(S-x)=J(\overline{(S'-x)})=\overline{J(S'-x)}$ に注意すると，$\mathrm{conv}(J(S-x))\subset F$ を得る。(4)を用いると，$B^*(0,\varepsilon)\subset F$ となり，よって $\|x'\|\leqq(\rho+\delta)\rho'/\varepsilon$ となる。これは

$$T(B(0,\delta)) \subset B\left(0, \frac{(\rho+\delta)\rho'}{\varepsilon}\right)$$

なることを示している。 (終)

注意1：Jが連続かつ逆連続であるという仮定は補題1を示すときのみ必要である。

注意2：定理1の証明方法を用いると次のことを示すことができる。Tは $\overline{D(T)}=X$ なる accretive 作用素であるとする。このとき，locally bounded となるような点が一点でも存在するなら，実は Tは X のすべての点で locally bounded となり更に X が reflexive かつ T が maximal accretive なら $D(T)=X$ となる。

注意3：定理1によると，Crandall－Pazy [3] の定理2.5 は bicontinuous な duality 作用素をもつ Banach 空間においても成立することが分かる。

4. 非線型発展方程式

Xにおける多価作用素Aに対し微分方程式

$$(5) \qquad \frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0$$

を考える。X-値関数 $u(t)$ が実数区間 Ω 上(5)の解であるとは，$u(t)$ が Ω 上連続であって，Ω のほとんどすべての点で $u(t)$ は強微分可能で(5)を満たすことをいう。この節を通じ，X^* は uniformly convex とする。

〔定理2〕 A を X における accretive 作用素で，その定義域 $D(A)$ は開集合とし，次の条件 (a), (b), (c) を満たすとする： (a) 各 $x \in D(A)$ に対し，Ax は X の閉凸集合である。(b) A は demiclosed である (i.e $x_n' \in Ax_n$, $x_n \in D(A)$ $x_n \longrightarrow x$ strongly in X, $x_n' \longrightarrow x'$ weakly in X ならば，$x \in D(A)$ かつ $x' \in Ax$ である。)。(c) 各 $x \in D(A)$ に対し x の近傍 U_x と X の有界集合 V_x が存在して，すべての $y \in U_x$ に対し $Ay \cap V_x \neq \phi$ とできる。このとき，任意に与えられた $a \in D(A)$ に対し $[0, +\infty)$ 上 (5) の解で $u(0) = a$ を満たすものが存在する。しかも，存在は a に対し一意的である。

この定理の証明には少々の準備が必要である。次の補題3は T. Kato [5] による。

〔補題3〕 $\{u_n\}$ を区間 (a, b) 上の strongly measurable X－値関数の列とし，ある定数 K に対し

$$\|u_n(t)\| \leqq K \qquad \text{a.e. } t \in (a, b)$$

とする。$V(t)$ を X の点列 $\{u_n(t)\}$ の弱集積点の全体とするとき，$1 < p < \infty$ なるある p に対し $u_n \longrightarrow u$ weakly in $L^p(a, b; X)$ ならば

$$u(t) \in \overline{\mathrm{conv}\, V(t)} \qquad \text{a.e. } t \in (a, b)$$

が成立する。

この補題3を用いて次の補題を得る。

〔補題4〕 Aを定理2におけると同じものとする。$u(t)$: $(a, b) \longrightarrow X$を連続関数，Kを正数とし；すべての$t \in (a, b)$に対し $u(t) \in D(A)$，$Au(t) \cap B(0, K) \neq \phi$とする。このとき，$(a, b)$上 strongly measurable な関数$v(t)$で

$$v(t) \in Au(t) \cap B(0, K) \qquad \text{a.a. } t \in (a, b)$$

となるものが存在する。

次に，局所解の存在及び一意性に関する補題を述べる。

〔補題5〕 Aを定理2におけると同じものとする。このとき，任意に与えられた$a \in D(A)$に対し，正数rと$[0, r)$上(5)の解$u(t)$で$u(0) = a$を満たすものが存在する。しかも存在はaに対し一意的である。

(証明) Aに対する仮定(C)によると，適当な正数R,

Kで，$B(a,R)\subset D(A)$，すべての $x\in B(a,R)$ に対し $Ax\cap B(0,K)\neq\phi$ となるものが存在する。 $r=R/K$，各自然数 n に対し $\varepsilon_n=r/n$ とおく。関数 u_n を次のように定義する。$[0,\varepsilon_n]$ 上 $u_n(t)=a$ とする。u_n に対し $(0,\varepsilon_n)$ 上 strongly measurable な関数 $v_n^{(1)}$ で

$$v_n^{(1)}(t)\in Au_n(t)\cap B(0,K)\qquad a.a.\ t\in(0,\varepsilon_n)$$

となるものをとる（このような関数は補題4により存在する）。次に $[\varepsilon_n,2\varepsilon_n]$ 上

$$u_n(t)=a-\int_{\varepsilon_n}^{t}v_n^{(1)}(s-\varepsilon_n)\,ds$$

とおく。帰納的に，$t\in[(k-1)\varepsilon_n,k\varepsilon_n]$ に対し

$$u_n(t)=a-\sum_{i=1}^{k-2}\int_{i\varepsilon_n}^{(i+1)\varepsilon_n}v_n^{(i)}(s-\varepsilon_n)\,ds-\int_{(k-1)\varepsilon_n}^{t}v_n^{(k-1)}(s-\varepsilon_n)\,ds$$

とおく（ただし，$v_n^{(k-1)}$ は $((k-2)\varepsilon_n,(k-1)\varepsilon_n)$ 上 strongly measurable な関数で，$v_n^{(k-1)}(t)\in Au_n(t)\cap B(0,K)$ a.a. $t\in((k-2)\varepsilon_n,(k-1)\varepsilon_n)$ となるようなものである）。$v_n(t)=v_n^{(i)}(t)$ if $t\in((i-1)\varepsilon_n,i\varepsilon_n)$ とおく。u_nは $[0,r]$ から $B(a,R)$ の中への連続関数で，ほとんどすべての$t\in(\varepsilon_n,r)$

に対し

$$(6)\quad \frac{du_n(t)}{dt} = -v_n(t-\varepsilon_n) \in -Au_n(t-\varepsilon_n)$$

が成立している。この様にしてつくられた列 $\{u_n\}$ は $[0,r]$ 上一様収束することを示そう。n, m を $n \geqq m$ なる二つの自然数とする。このとき，ほとんどすべての $t \in (\varepsilon_m, r)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u_n(t)-u_m(t)\|^2\right)\\
&= 2\left\langle \frac{d}{dt}(u_n(t)-u_m(t)),\ J(u_n(t)-u_m(t))\right\rangle\\
&= -2\left\langle v_n(t-\varepsilon_n)-v_m(t-\varepsilon_m),\ J(u_n(t)-u_m(t))\right\rangle\\
&\leqq -2\left\langle v_n(t-\varepsilon_n)-v_m(t-\varepsilon_m),\ J(u_n(t)-u_m(t))\right.\\
&\qquad \left. -J(u_n(t-\varepsilon_n)-u_m(t-\varepsilon_m))\right\rangle
\end{aligned}$$

が成立。この不等式は(6)と A の accretiveness より得られる。上の不等式を (ε_m, t) 上で積分すると，

$$\begin{aligned}
(7)\qquad &\|u_n(t)-u_m(t)\|^2\\
&\leqq \|u_n(\varepsilon_m)-a\|^2 + 4K\int_{\varepsilon_n}^{r}\|J(u_n(s)-u_m(s))-J(u_n(s-\varepsilon_n)\\
&\qquad -u_m(s-\varepsilon_m))\|ds
\end{aligned}$$

がすべての $t \in [0,r]$ に対し成立する。一方，全ての $t \in [\varepsilon_m, r]$ に対し，

$$\|(u_n(t)-u_m(t))-(u_n(t-\varepsilon_n)-u_m(t-\varepsilon_m))\|$$
$$\leqq \|u_n(t)-u_n(t-\varepsilon_n)\|+\|u_m(t)-u_m(t-\varepsilon_m)\|$$
$$\leqq K(\varepsilon_n+\varepsilon_m)。$$

よって，Jが $B(a, R)$ 上一様連続なることに注意すると，(7)の右辺は，$n, m \longrightarrow \infty$ のとき，0に収束する。即ち，$\{u_n\}$ はある $[0, r]$ 上連続関数 u に一様収束する。明らかに $u(0)=a$ をみたす。(6)によると，$\|du_n(t)/dt\| \leqq K$ a. a. $t \in (0, r)$。従って，$1<p<\infty$ なる p に対し，適当な部分列 $\{u_{n_j}\}$ をとると，$du_{n_j}/dt \longrightarrow v$ weakly in $L^p(0, r; X)$ となる様にできる。このとき，$du/dt = v$ である。補題3及び A に対する仮定(a)，(b)を用いると，

$$\frac{du(t)}{dt} = v(t) \in -Au(t) \quad \text{a. a. } t \in (0, r)$$

を得る。即ち u は $u(0)=a$ をみたす $[0, r]$ 上(5)の解である。存在の一意性は A の accretiveness より明らかである　(終)

定理2の証明：局所解の存在が補題5により示されたが，この解が無限に延長され得ることは，Brezis - Pazy [1] の Lemma 2.2，A についての仮定(b)，(c)及び $D(A)$ が開集合であることより容易にわかる。　(終)

5. accretive 作用素の m-accretiveness

Hilbert 空間においては，maximal accretiveness と m-accretiveness は同一の概念であるが，一般 Banach 空間においては異なる。一般に m-accretive ならば常に maximal accretive であるが，逆は成立しない。（反例については，Calvert [2] を参照）

［定理3］ X^* を uniformly convex，A を定理2におけると同じものとする。このとき，A は m-accretive である。

（証明） Cauchy 問題

$$\frac{du(t)}{dt} + (I+A)u(t) \ni b \quad , \quad u(0) = a$$

は，定理2によると，任意に与えられた $b \in X$ と $a \in D(A)$ に対し，$[0, +\infty)$ 上で解 $u(t)$ をもつ。T. Kato [5] の Lemma 6.2 によると，$t_n \to +\infty$ なる数列 $\{t_n\}$ で $n \to \infty$ のとき $u(t_n) \longrightarrow u_0$ strongly in X，$du(t_n)/dt \longrightarrow 0$ strongly in X となる様なものが存在する。A は demiclosed だから $(I+A)u_0 \ni b$ である。即ち $R(I+A) = X$.（終）

最後に定理3より得られる系を述べよう。

〔系1〕 X^*, A を定理3におけると同じもの, B を X における m-accretive 作用素で, $D(B) \subset D(A)$ とする。このとき, $A+B$ は m-accretive である。

〔系2〕 X^* を uniformly convex, J を連続かつ逆連続, A を $D(A)$ が開集合であるような accretive 作用素とする。このとき, A が m-accretive であるための必要十分条件は A が maximal accretive となることである。

References

[1] H. Brezis and A. Pazy, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, Israel J. Math., 8 (1970), 367〜383.

[2] B. Calvert, Maximal accretive is not m-accretive, Boll. Un. Mat. Italiana, S.4, 3 (1970), 1042〜1044.

[3] M. Crandall and A. Pazy, Semi-group of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Functional Anal., 3 (1969), 376〜418.

[4] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508~520.

[5] T. Kato, Accretive operators and evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Nonlinear Functional Anal., Chicago, Amer. Math. Soc., 1(1970) 138~161.

[6] A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions in Hilbert spaces, C. I. M. E., Problems in non-linear analysis, (1971), 343~430.

[7] R. T. Rockafellar, Local boundedness of nonlinear monotone operators, Michigan Math. J., 16 (1969), 397~407.