数理解析研究所講究録
134巻 1972年 18-36

ある種の時間依存的な非線形発展方程式について

電気通信大　渡辺 二郎

§1. 定理

Hを実ヒルベルト空間，φをHから$(-\infty, +\infty]$への下半連続proper凸関数とする。φがproperであるとは，φのeffective domain $\{u \in H \mid \varphi(u) = +\infty\}$が空でないことである。$H$から$H$への多価写像$\partial\varphi$を次のように定義する：

$$\partial\varphi(u) = \{w \in H \mid \varphi(v) \geqq \varphi(u) + (w, v-u)(\forall v \in H)\}.$$

その定義域は$D(\partial\varphi) = \{u \in H \mid \partial\varphi(u) \neq \phi\}$である。

次の(I)－(V)を仮定する（[4]，[1]参照）。

(I)　$T > 0$とする．各$t \in [0, T]$に対して，Hから$(-\infty, +\infty]$への下半連続proper凸関数φ^tが与えられ，φ^tのeffective domain Dはtに無関係である。

(II)　各$r > 0$に対して，C_r, $C_r' > 0$が存在して

$$|\varphi^s(u) - \varphi^t(u)| \leqq |s-t| \cdot [C_r \cdot \varphi^t(u) + C_r']$$

$$(0 \leqq \forall s, \forall t \leqq T, \ \|u\| \leqq r \text{ なる } \forall u \in D).$$

(III) ある $b\in D$ が存在して，$b\in D(\partial\varphi^t)$ ($a.a.\ t\in[0,T]$) かつ $\|\partial\varphi^t(b)^\circ\|$ は $0\leqq t\leqq T$ で可積分とする．ただし，$\partial\varphi^t(b)^\circ$ は閉凸集合 $\partial\varphi^t(b)$ の中のノルム最小の元を表わす。

(IV) f は $[0,T]\times H$ から H への連続写像であり，$[0,T]\times H$ の有界集合の f による像は H で有界である．

(V) ある実数 c_0 が存在して

$$(f(t,u)-f(t,v),\ u-v)\leqq c_0\|u-v\|^2\quad(\forall u,\forall v\in H).$$

定理．(I)－(V) を仮定する．任意の $a\in D$ に対して，次の i), ii) をみたす $u\in C([0,T];H)$ と $y\in L^2(0,T;H)$ が一意的に存在する：

i) $u(t)\in D$ ($\forall t\in(0,T]$)，$u(t)\in D(\partial\varphi^t)$ ($a.a.\ t\in[0,T]$) かつ $y(t)\in\partial\varphi^t(u(t))$ ($a.a.\ t\in[0,T]$).

ii) $u(t)+\int_0^t y(\sigma)d\sigma=a+\int_0^t f(\sigma,u(\sigma))d\sigma$ $(0\leqq\forall t\leqq T)$.

注意1．定理の u は

$$u'+\partial\varphi^t(u)\ni f(t,u)\ (0\leqq t\leqq T),\quad u(0)=a$$

の genuine solution である（[5] をみよ）．

注意2．(I)－(V) を仮定する．任意の $a\in\overline{D}$ (D の閉包)

に対して，定理の i) と次の ii) をみたす $u \in C([0,T];H)$ と $[0,T]$ 上の強可測関数 y が一意的に存在することを証明できる：

ii) 任意の $s \in (0,T]$ に対して $y \in L^2(s,T;H)$ かつ

$$\begin{cases} u(t) + \int_s^t y(\sigma)d\sigma = u(s) + \int_s^t f(\sigma, u(\sigma))d\sigma & (0 < {}^\forall s \leqq {}^\forall t \leqq T) \\ u(0) = a. \end{cases}$$

§2. $\partial\varphi$ の吉田近似

H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続 proper 凸関数 φ と $\partial\varphi$ の近似に関する基本的事項を要約する．これらは本質的に Moreau [6] により得られたものである．

$\partial\varphi$ は monotone であることは容易にわかる．

$$\Phi_\lambda(u,v) = \varphi(v) + \|u-v\|^2/(2\lambda) \quad ({}^\forall\lambda>0, {}^\forall u, {}^\forall v \in H)$$

とおく．各 $\lambda > 0$ と各 $u \in H$ に対して関数 $v \to \Phi_\lambda(u,v)$ が最小値をとる点が一意的に存在する．この点を $J_\lambda^\varphi u$ とかく：

(2.1) $\Phi_\lambda(u; J_\lambda^\varphi u) \leqq \Phi_\lambda(u,v) \quad (\forall\lambda>0, \forall u, \forall v \in H).$

(2.1) から次の (2.2) を得るのは容易である：

(2.2) $(\partial\varphi)_\lambda u \equiv (u - J_\lambda^\varphi u)/\lambda \in \partial\varphi(J_\lambda^\varphi u) \quad ({}^\forall\lambda>0, {}^\forall u \in H).$

したがって $\partial\varphi$ は極大 monotone であり $J_\lambda^\varphi = (I + \lambda\cdot\partial\varphi)^{-1}$ $(\lambda > 0)$ である．J_λ^φ が縮小的であることと $(\partial\varphi)_\lambda$ が monotone であることはよく知られている．

(2.3) $\varphi_\lambda(u) = \varphi(J_\lambda^\varphi u) + \lambda\cdot\|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2/2 \quad (\forall\lambda>0, \forall u\in H)$

とおく。(2.2)から，任意の $\lambda>0$，u，$v\in H$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\Phi_\lambda(u,v) - \varphi_\lambda(u) \\
(2.4)\quad &= \varphi(v) - \varphi(J_\lambda^\varphi u) - (v - J_\lambda^\varphi u, (\partial\varphi)_\lambda u) + \frac{\|v - J_\lambda^\varphi u\|^2}{2\lambda} \\
&\geqq \|v - J_\lambda^\varphi u\|^2/(2\lambda).
\end{aligned}
$$

Hから $(-\infty, +\infty]$ への関数 ψ の共役 ψ^* を

$$\psi^*(u) = \sup\{(u,v) - \psi(v) \mid v\in H\} \quad (\forall u\in H)$$

により定義する．下半連続proper凸関数 φ の共役 φ^* は下半連続proper凸関数である．u，$v\in H$ に対して

(2.5) $v\in\partial\varphi(u) \Longleftrightarrow \varphi(u) + \varphi^*(v) = (u,v)$

はよく知られている。また，$(\varphi_\lambda)^*(u) = \varphi^*(u) + \lambda\cdot\|u\|^2/2$ $(\lambda>0,\ u\in H)$ は容易に確めることができる。したがってすべての $\lambda>0$ と $u\in H$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\varphi_\lambda(u) + (\varphi_\lambda)^*((\partial\varphi)_\lambda u) \\
&= \varphi(J_\lambda^\varphi u) + \varphi^*((\partial\varphi)_\lambda u) + \lambda\cdot\|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2 \\
&= (J_\lambda^\varphi u, (\partial\varphi)_\lambda u) + \lambda\cdot\|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2 \\
&= (u, (\partial\varphi)_\lambda u).
\end{aligned}
$$

ゆえに(2.5)から $(\partial\varphi)_\lambda u \in \partial(\varphi_\lambda)u$．したがって

$$
\begin{aligned}
&0 \leqq \varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) - (v-u, (\partial\varphi)_\lambda u) \\
(2.6)\quad &\leqq (v-u, (\partial\varphi)_\lambda v - (\partial\varphi)_\lambda u) \\
&\leqq \|v-u\|^2/\lambda \quad (\forall\lambda>0, \forall u, \forall v\in H).
\end{aligned}
$$

ゆえに φ_λ は $u\in H$ において微分可能（Fréchet の意味）であり，その Fréchet 微分係数は $(\partial\varphi)_\lambda u$ である．したがって $\partial(\varphi_\lambda)u=\{(\partial\varphi)_\lambda u\}$． 今後，$(\partial\varphi)_\lambda$ の代りに $\partial\varphi_\lambda$ とかく．

§3. 関数 $t\to\partial\varphi_\lambda^t$ の連続性

補題 3.1. φ^1 と φ^2 は H から $(-\infty,+\infty]$ への下半連続 proper 凸関数とする．このとき任意の $\lambda>0$ と $u\in H$ に対し

$$\begin{aligned}&\varphi_\lambda^1(u)-\varphi_\lambda^2(u)\\ &\leqq \varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2}u)-\varphi^2(J_\lambda^{\varphi^2}u)-\frac{\lambda}{2}\|\partial\varphi_\lambda^1(u)-\partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2.\end{aligned}$$

証明. $[\varphi_\lambda^1(u)-\varphi_\lambda^2(u)]-[\varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2}u)-\varphi^2(J_\lambda^{\varphi^2}u)]$

$$\begin{aligned}&=\varphi^1(J_\lambda^{\varphi^1}u)-\varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2}u)+\frac{\lambda}{2}\left(\|\partial\varphi_\lambda^1(u)\|^2-\|\partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2\right)\\ &=\varphi^1(J_\lambda^{\varphi^1}u)-\varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2}u)-(\partial\varphi_\lambda^1u,\ J_\lambda^{\varphi^1}u-J_\lambda^{\varphi^2}u)+\\ &\quad+\frac{\lambda}{2}\left[\|\partial\varphi_\lambda^1(u)\|^2-\|\partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2-2(\partial\varphi_\lambda^1(u),\partial\varphi_\lambda^1(u)-\partial\varphi_\lambda^2(u))\right]\\ &\leqq-\frac{\lambda}{2}\|\partial\varphi_\lambda^1(u)-\partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2.\end{aligned}$$

補題 3.2. φ^1 と φ^2 は H から $(-\infty,+\infty]$ への下半連続 proper 凸関数とする．ある $x\in H$，ある $\delta>0$，ある $\varepsilon>0$，ある $\varepsilon'>0$ とある $\eta\in(0,1)$ に対して

$$\begin{cases}\text{i)}\ \|u-J_\lambda^{\varphi^1}x\|\leqq\delta \text{ なる } \forall u\in H \text{ に対して}\\ \qquad \varphi^2(u)\geqq(1-\eta)\varphi^1(u)-\varepsilon,\\ \text{ii)}\ \varphi^2(J_\lambda^{\varphi^1}x)\leqq\varphi^1(J_\lambda^{\varphi^1}x)+\varepsilon',\end{cases}$$

iii) $\delta^2/(2\lambda) \geqq \varepsilon + \varepsilon' + \eta \cdot \varphi^1_\lambda(x) \equiv \alpha$

がなりたつならば

$$\|\partial\varphi^1_\lambda(x) - \partial\varphi^2_\lambda(x)\|^2 \leqq 2\alpha/\lambda.$$

証明. $i=1, 2$ と $u \in H$ に対して

$$\Phi^i(u) = \varphi^i(u) + \|u-x\|^2/(2\lambda), \quad x_i = J^{\varphi^i}_\lambda x$$

とおく. (2.3) と (2.4) から

(3.1) $\Phi^i(u) \geqq \Phi^i(x_i) + \|u - x_i\|^2/(2\lambda) \quad (i=1,2; u \in H).$

i) と ii) から

(3.2) $\Phi^2(u) \geqq (1-\eta)\Phi^1(u) - \varepsilon \quad (\forall u \in H : \|u - x_1\| \leqq \delta),$

(3.3) $\Phi^2(x_1) \leqq \Phi^1(x_1) + \varepsilon'.$

$\|x_1 - x_2\| \leqq \delta$ を証明する. $\|x_1 - x_2\| > \delta$ を仮定して矛盾を導く. $\theta = \delta/\|x_1 - x_2\|$, $x_\theta = (1-\theta)x_1 + \theta x_2$ とおく. $0 < \theta < 1$, $\|x_\theta - x_1\| = \delta$ である. (3.1), (3.2), (3.3) から

$$\begin{aligned}(1-\eta)\Phi^1(x_1) - \varepsilon &\leqq (1-\eta)\Phi^1(x_\theta) - \varepsilon \leqq \Phi^2(x_\theta)\\ &\leqq (1-\theta)\Phi^2(x_1) + \theta\Phi^2(x_2)\\ &\leqq (1-\theta)[\Phi^1(x_1)+\varepsilon'] + \theta\left[\Phi^1(x_1) + \varepsilon' - \frac{\|x_1-x_2\|^2}{2\lambda}\right].\end{aligned}$$

これと iii) から

$$\frac{\delta^2}{2\lambda\theta} = \frac{\theta}{2\lambda}\|x_1 - x_2\|^2 \leqq \varepsilon + \varepsilon' + \eta \cdot \Phi^1(x_1) \leqq \frac{\delta^2}{2\lambda}.$$

ゆえに $\theta \geqq 1$. 矛盾. ゆえに $\|x_1 - x_2\| \leqq \delta$.

(3.1), (3.2), (3.3) から

$$\Phi^2(x_2)+\varepsilon \geqq (1-\eta)\Phi^1(x_2) \geqq (1-\eta)\left[\Phi^1(x_1)+\|x_1-x_2\|^2/(2\lambda)\right]$$

および

$$\Phi^1(x_1)+\varepsilon' \geqq \Phi^2(x_2)+\|x_1-x_2\|^2/(2\lambda)$$

を得る．したがって

$$\varepsilon+\varepsilon'+\eta\cdot\Phi^1(x_1) \geqq \frac{2-\eta}{2\lambda}\cdot\|x_1-x_2\|^2 \geqq \frac{1}{2\lambda}\cdot\|x_1-x_2\|^2.$$

したがって

$$\|\partial\varphi^1_\lambda(x)-\partial\varphi^2_\lambda(x)\|^2=\|x_1-x_2\|^2/\lambda^2 \leqq 2\alpha/\lambda.$$

命題3.3. §1の(I)と次の(III′)を仮定する：

(III′) $h(s,t)$ は $0\leqq s,\ t\leqq T$ 上の非負値関数で，各 $t\in[0,T]$ に対して $s\to h(s,t)$ は $[0,T]$ で連続であり，$h(t,t)=0$ $(0\leqq t\leqq T)$ をみたす．また，各 $r>0$ に対して C_r と C_r' が存在して，

$$|\varphi^s(u)-\varphi^t(u)|\leqq h(s,t)\cdot[C_r\cdot\varphi^t(u)+C_r']$$

$$(0\leqq\forall s,\ \forall t\leqq T,\ \|u\|\leqq r \text{ なる } \forall u\in D).$$

このとき各 $x\in H$ と各 $\lambda>0$ に対して，$t\to\partial\varphi^t_\lambda(x)$ は $[0,T]$ において連続である．

さらに，もしある定数 $C>0$ と $\alpha\in(0,1]$ が存在して

(3.4) $h(s,t)\leqq C\cdot|s-t|^\alpha$ $(0\leqq s,\ t\leqq T)$

であるならば，$t\to\partial\varphi^t_\lambda(x)$ は $[0,T]$ において $\alpha/2$ Hölder 連続である．

証明. $t\in[0,T]$ を1つとって固定し, $x_t=J_\lambda^{\varphi^t}x$ とかく. $r>\|x_t\|$ とする. (II) から

$\varphi^s(u)\geqq[1-c_r\cdot h(s,t)]\cdot\varphi^t(u)-c_r'\cdot h(s,t)$
$(0\leqq s,t\leqq T,\ u\in D:\|u\|\leqq r)$

かつ

$\varphi^s(x_t)\leqq\varphi^t(x_t)+h(s,t)\cdot[c_r\cdot\varphi^t(x_t)+c_r']$.

したがって補題3.2により, s が十分 t に近いとき

$$(3.5)\quad \begin{aligned}&\|\partial\varphi_\lambda^s(x)-\partial\varphi_\lambda^t(x)\|^2\\&\leqq(4/\lambda)\cdot h(s,t)\cdot[c_r\cdot\varphi^t(x_t)+c_r'+\frac{\lambda}{4}c_r\cdot\|\partial\varphi_\lambda^t(x)\|^2].\end{aligned}$$

したがって $s\to\partial\varphi_\lambda^s(x)$ は $s=t$ において連続である. t は任意であったからこれは $0\leqq s\leqq T$ で連続である.

したがって, r として次のようにとれる:

$$\max_{0\leqq t\leqq T}\|x_t\|=\max_{0\leqq t\leqq T}\|x-\lambda\cdot\partial\varphi_\lambda^t(x)\|<r.$$

したがって, (2.3) と補題3.1から $\sup\{\varphi^t(x_t)\,|\,0\leqq t\leqq T\}<\infty$. したがって, ある $M>0$ が存在して, (3.5) により, 各 $t\in[0,T]$ に対して s が十分 t に近いとき

$$(3.6)\quad \|\partial\varphi_\lambda^s(x)-\partial\varphi_\lambda^t(x)\|\leqq M\cdot h(s,t)^{1/2}.$$

h が (3.4) をみたすとき, (3.6) は $t\to\partial\varphi_\lambda^t(x)$ が $0\leqq t\leqq T$ において $\alpha/2$-Hölder 連続であることを示す.

§4. 定理の証明

§1の(I)−(V)を仮定する．命題3.3と $u \to \partial\varphi_\lambda^t(u)$ のLipschitz連続性により，各 $\lambda > 0$ に対して，$[t, u] \to f(t,u) - \partial\varphi_\lambda^t(u)$ は $[0,T]\times H$ の上で連続であり，$[0, T]\times H$ の有界集合をHの有界集合に写像し，かつ(V)により

$$([f(t,u) - \partial\varphi_\lambda^t(u)] - [f(t,v) - \partial\varphi_\lambda^t(v)], u - v)$$
$$\leqq c_0 \cdot \|u - v\|^2 \qquad (\forall u, \forall v \in H)$$

をみたすから，任意の $a \in D$ に対して

$$(4.0)\begin{cases} u'(t) + \partial\varphi_\lambda^t(u(t)) = f(t, u(t)), & 0 \leqq t \leqq T \\ u(0) = a \end{cases}$$

の解 $u_\lambda \in C^1([0,T]; H)$ が一意的に存在する([1]をみよ)．

簡単のために，$y_\lambda(t) = \partial\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ とかく．

補題4.1　$\sup\{\|u_\lambda(t)\| \mid \lambda > 0, 0 \leqq t \leqq T\} < \infty$.

証明．

$u_\lambda'(t) + y_\lambda(t) = f(t, u_\lambda(t))$ $(0 \leqq t \leqq T)$, $u_\lambda(0) = a$ から容易に，すべての $t \in [0, T]$ に対して

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - b\|^2$$
$$= (f(t,u_\lambda) - y_\lambda, u_\lambda - b)$$
$$= ([f(t,u_\lambda) - f(t,b)] - [y_\lambda - \partial\varphi_\lambda^t(b)], u_\lambda - b) +$$

$$+(f(t,b)-\partial\varphi_\lambda^t(b),\ u_\lambda-b)$$

$$\leqq c_0\|u_\lambda(t)-b\|^2+(\|f(t,b)\|+\|\partial\varphi_\lambda^t(b)\|)\cdot\|u_\lambda(t)-b\|.$$

したがって，ほとんどすべての $t\in[0,T]$ に対して

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)-b\|\leqq c_0\cdot\|u_\lambda(t)-b\|+\|f(t,b)\|+\|\partial\varphi_\lambda^t(b)\|.$$

したがって，すべての $t\in[0,T]$ に対して

$$\|u_\lambda(t)-b\|\leqq e^{c_0t}\|a-b\|+\int_0^t e^{c_0(t-\sigma)}(\|f(\sigma,b)\|+\|\partial\varphi_\lambda^\sigma(b)\|)d\sigma.$$

よく知られているように，$\|\partial\varphi_\lambda^\sigma(b)\|\leqq\|\partial\varphi^\sigma(b)^\circ\|$ であるから(III)により，上の不等式の右辺は $0\leqq t\leqq T$，$\lambda>0$ において有界である。したがって $\|u_\lambda(t)\|$ もそうである。

補題4.2　BがHの有界集合ならば，$\{J_\lambda^{\varphi^t}u \mid 0\leqq t\leqq T,\ 0<\lambda\leqq 1,\ u\in B\}$ は有界である.

証明．$\|J_\lambda^{\varphi^t}u\|\leqq\|J_\lambda^{\varphi^t}v\|+\|u-v\|$ であるから，補題の証明のためには，ある $v\in B$ に対して $\{J_\lambda^{\varphi^t}v \mid 0\leqq t\leqq T,\ 0<\lambda\leqq 1\}$ が有界であることを示せば十分である.

v をBの任意の元とする。$t\in[0,T]$ と $\lambda>0$ に対して

$$\|v-J_\lambda^{\varphi^t}v\|^2-\|v-J_1^{\varphi^t}v\|^2$$
$$\leqq 2\cdot(v-J_\lambda^{\varphi^t}v,\ (v-J_\lambda^{\varphi^t}v)-(v-J_1^{\varphi^t}v))$$
$$=2\lambda\cdot(\partial\varphi_\lambda^t(v),\ J_1^{\varphi^t}v-J_\lambda^{\varphi^t}v)$$
$$\leqq 2\lambda\cdot(\partial\varphi_1^t(v),\ J_1^{\varphi^t}v-J_\lambda^{\varphi^t}v)$$

$$= 2\lambda(v - J_1^{\varphi^t}v, (v - J_\lambda^{\varphi^t}v) - (v - J_1^{\varphi^t}v))$$
$$\leqq 2\lambda \| v - J_1^{\varphi^t}v\| \cdot \| v - J_\lambda^{\varphi^t}v\|$$
$$\leqq \frac{1}{2}\| v - J_\lambda^{\varphi^t}v\|^2 + 2\lambda^2 \| v - J_1^{\varphi^t}v\|^2.$$

また，(II)と命題3.3から，$t \to J_1^{\varphi^t}v$ は $[0, T]$ において連続であるから

$$\sup_{\substack{0\leqq t\leqq T\\ 0<\lambda\leqq 1}} \| v - J_\lambda^{\varphi^t}v\|^2 \leqq \sup_{\substack{0\leqq t\leqq T\\ 0<\lambda\leqq 1}} 2(1+2\lambda^2)\| v - J_1^{\varphi^t}v\|^2 < \infty.$$

したがって $\{J_\lambda^{\varphi^t}v \mid 0\leqq t\leqq T, 0<\lambda\leqq 1\}$ は有界である。

補題4.3. $\sup\{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \mid 0\leqq t\leqq T,\ 0<\lambda\leqq 1\} < \infty.$

証明. 補題4.1と補題4.2により，正数 r が存在して，すべての $s, t \in [0, T]$，$\mu \in (0, 1]$，$\lambda > 0$ に対して，$r > \| J_\mu^{\varphi^t} u_\lambda(s)\|$ がなりたつ.

$\lambda > 0$，$u \in H$ とする. $r > \| J_\lambda^{\varphi^s}u\|$ $(0\leqq s\leqq T)$ ならば，補題3.1と(II)により，(2.3)をもちいて

$$|\varphi_\lambda^t(u) - \varphi_\lambda^s(u)|$$
$$\leqq \max\{\varphi^t(J_\lambda^{\varphi^s}u) - \varphi^s(J_\lambda^{\varphi^s}u), \varphi^s(J_\lambda^{\varphi^t}u) - \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t}u)\} \tag{4.1}$$
$$\leqq |t-s|[c_r \cdot \max\{\varphi^s(J_\lambda^{\varphi^s}u), \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t}u)\} + c_r']$$
$$\leqq |t-s|[c_r \cdot \max\{\varphi_\lambda^s(u), \varphi_\lambda^t(u)\} + c_r'].$$

したがって，とくに，$t \to \varphi_\lambda^t(u)$ は連続である. (2.6)と

(4.1)から

$$|\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))| \leqq |\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))|+|\varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))|$$
$$\leqq |(y_\lambda(s), u_\lambda(s)-u_\lambda(t))|+\|u_\lambda(s)-u_\lambda(t)\|^2/\lambda +$$
$$+|t-s|[c_r\cdot \max\{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)), \varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))\}+c_r'].$$

したがって，u_λの 1回連続強微分可能性と $\sup\{\|y_\lambda(s)\| \mid 0\leqq s\leqq T\}<\infty$とから，$t\to\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ の連続性，さらにリプシッツ連続性がわかる。(2.6)をもちいて

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi_\lambda^t(u_\lambda(s))\Big|_{s=t} = (y_\lambda(t), u_\lambda'(t))$$
$$=(f(t,u_\lambda(t))-u_\lambda'(t), u_\lambda'(t)) \leqq \frac{1}{4}\|f(t,u_\lambda(t))\|^2$$

最後の辺は，(IV)と補題4.1により，t，λに無関係な定数 $C>0$でおさえられる．したがって，(4.1)をもちいて

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$$
$$\leqq \overline{\lim_{s\to t}}\frac{\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(s))}{s-t}+\lim_{s\to t}\frac{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(s))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))}{s-t}$$
$$\leqq c_r\cdot\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))+c_r'+C.$$

この不等式から，$t\to\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ の絶対連続性をもちいて

$$\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \leqq e^{c_r\cdot t}\varphi_\lambda^0(a)+(c_r'+C)\int_0^t e^{c_r\cdot(t-\sigma)}d\sigma$$

が導かれるが，$\varphi_\lambda^0(a)\leqq\varphi^0(a)<\infty$であるから，上の不等式の右辺は $0\leqq t\leqq T$，$\lambda>0$で有界である．証明おわり．

補題4.4. $\sup\{\int_0^T \|y_\lambda(t)\|^2 dt \mid 0<\lambda\leqq 1\}<\infty$.

証明. rは補題4.3の証明のrと同じものとする. $T'\in(0,T)$と$\lambda\in(0,1]$に対して

$$(4.2)\quad \int_0^{T'}(y_\lambda(t), f(t,u_\lambda)-y_\lambda(t))dt$$

$$=\int_0^{T'}(y_\lambda(t), u_\lambda'(t))dt$$

$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))]dt$$

$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\Big\{\Big(\int_{T'}^{T'+h}-\int_0^h\Big)\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))dt-$$

$$-\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))]dt\Big\}$$

$$=\varphi_\lambda^{T'}(u_\lambda(T'))-\varphi_\lambda^0(a)-$$

$$-\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))]dt.$$

(4.1)とFatouの補題により

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^{T'}[\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h))-\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))]dt$$

$$(4.3)\quad \leqq \varliminf_{h\downarrow 0}\int_0^{T'}[c_r\cdot\max\{\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h)),\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))\}+c_r']dt$$

$$\leqq\int_0^{T'}[c_r\cdot\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))+c_r']dt.$$

(4.2)と(4.3)と補題4.3により, ある定数$C>0$が存在して

$$(4.4)\quad \int_0^T\|y_\lambda(t)\|^2dt-\int_0^T(y_\lambda(t), f(t,u_\lambda(t)))dt$$

$$\leqq-\varphi_\lambda^T(u_\lambda(T))+\varphi_\lambda^0(a)+C.$$

ところでφ^TはHの各有界集合上で下から有界であるから

(2.3)をもちいて

$$\inf\{\varphi_\lambda^T(u_\lambda(T)) \mid 0<\lambda\leqq 1\} \geqq \inf\{\varphi^T(J_\lambda^{\varphi^T} u_\lambda(T)) \mid 0<\lambda\leqq 1\} > -\infty.$$

また，$\varphi_\lambda^0(a)\leqq\varphi^0(a)<\infty$ であるから，(4.4)からただちに $\int_0^T \|y_\lambda(t)\|^2 dt$ が $0<\lambda\leqq 1$ において有界であることがわかる。

定理の証明．存在．$\lambda,\ \mu>0$ とする。

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 = 2(u_\lambda'(t)-u_\mu'(t),\ u_\lambda(t)-u_\mu(t))$$
$$= 2([f(t,u_\lambda)-f(t,u_\mu)]-[y_\lambda(t)-y_\mu(t)],\ u_\lambda(t)-u_\mu(t))$$
$$\leqq 2c_0\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 - 2(y_\lambda(t)-y_\mu(t),\ \lambda y_\lambda(t)-\mu y_\mu(t))$$
$$= 2c_0\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 - (\lambda+\mu)\|y_\lambda(t)-y_\mu(t)\|^2 -$$
$$- (\lambda-\mu)(\|y_\lambda(t)\|^2-\|y_\mu(t)\|^2)$$

と $u_\lambda(0)=u_\mu(0)=a$ から，すべての $t\in[0,T]$ に対して

$$(4.5)\quad e^{-2c_0 t}\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2+(\lambda+\mu)\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)-y_\mu(s)\|^2 ds$$
$$\leqq (\mu-\lambda)\int_0^t e^{-2c_0 s}(\|y_\lambda(s)\|^2-\|y_\mu(s)\|^2)\,ds.$$

したがって，$\lambda\downarrow 0$ のとき $\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)\|^2 ds$ は非減少であるが，補題4.4により

$$\sup_{0<\lambda\leqq 1}\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)\|^2 ds \leqq \sup_{0<\lambda\leqq 1}\int_0^T \|y_\lambda(s)\|^2 ds < \infty$$

であるから，$\lambda\downarrow 0$ のとき $\int_0^t e^{-2c_0 s}\|y_\lambda(s)\|^2 ds$ はある有限

な数に収束する．したがって，(4.5)から，ある $u \in C([0,T];H)$ が存在して $C([0,T];H)$ において $u_\lambda \to u\ (\lambda \downarrow 0)$．また，ある $y \in L^2(0,T;H)$ が存在して $L^2(0,T;H)$ において $y_\lambda \to y\ (\lambda \downarrow 0)$．

このとき，$\lambda_n \downarrow 0$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} y_{\lambda_n}(t) = y(t)$ a.e. このことと $y_{\lambda_n}(t) = \partial\varphi^t_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t))$ と $u_{\lambda_n}(t) \to u(t)\ (n \to \infty)$ から，ほとんどすべての t に対して

(4.6) $\quad u(t) \in D(\partial\varphi^t) \quad$ と $\quad y(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$

が得られる([2] Theorem 2.3.(c))．$D(\partial\varphi^t)$ は D の稠密な部分集合であるから([7])，$\overline{D(\partial\varphi^t)} = \overline{D}$．したがって，(4.6)と u の連続性から，$u(t) \in \overline{D(\partial\varphi^t)}$ がすべての $t \in [0,T]$ に対して得られる．これから

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) = u(t) \quad (0 \leqq t \leqq T)$$

が得られる．なぜならば，$u(t)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u_\varepsilon \in D(\partial\varphi^t)$，$\|u_\varepsilon - u(t)\| \leqq \varepsilon$，をとれば

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \|J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) - u(t)\| \\
&\leqq \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \left(\|J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) - J_\lambda^{\varphi^t} u_\varepsilon\| + \|J_\lambda^{\varphi^t} u_\varepsilon - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon - u(t)\| \right) \\
&\leqq \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \left(\|u_\lambda(t) - u_\varepsilon\| + \lambda \|\partial\varphi^t(u_\varepsilon)^\circ\| + \varepsilon \right) \\
&\leqq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

がなりたつからである．したがって，φ^t の下半連続性，

(2.3) と補題4.3により

$$\varphi^t(u(t)) \leqq \varliminf_{\lambda\downarrow 0} \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t)) \leqq \varliminf_{\lambda\downarrow 0} \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) < \infty.$$

したがって，すべての $t\in[0,T]$ に対して $u(t)\in D$. i) がなりたつことがわかった．

u_λ が(4.0)の解であることから，各 $t\in[0,T]$ に対して

$$u_\lambda(t) + \int_0^t y_\lambda(\sigma)\,d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u_\lambda(\sigma))\,d\sigma.$$

上の式において，$\lambda\downarrow 0$ のときの極限をとれば，ii) がなりたつことがわかる．

一意性．$u_i\in C([0,T];H)$ と $y_i\in L^2(0,T;H)$ が i) と ii) をみたすとする $(i=1,2)$．このとき

$$\begin{cases} u_i'(t) + y_i(t) = f(t, u_i(t)) \quad a.e. \\ u_i(0) = a \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

がなりたつから，ほとんどすべての t に対して

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 \\ &= (f(t,u_1) - y_1(t) - f(t,u_2) + y_2(t),\ u_1(t)-u_2(t)) \\ &\leqq c_0\|u_1(t)-u_2(t)\|^2. \end{aligned}$$

したがって

$$e^{-2c_0t}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 \leqq \|u_1(0)-u_2(0)\|^2 = 0$$

ゆえに $u_1(t)=u_2(t)$ $(0\leqq t\leqq T)$．証明おわり．

§5. 摂動

§1 の (I), (II), (III) を仮定する. $[0,T]\times D$ から H への写像 f と $a\in D$ が与えられたとき, コーシー問題

$$(5.1)\quad \begin{cases} u'(t)+\partial\varphi^t(u(t))\ni f(t,u(t)) & (0\leqq t\leqq T) \\ u(0)=a \end{cases}$$

を考える. H が可分のとき (5.1) は次の仮定のもとで解ける.

f に対して, 次の性質をもつ近似列 $\{f_n\}$ が存在すると仮定する:

(IV_n) 各 f_n は (IV) の f の性質をもつ.

(V_n) 各 f_n は (V) の f の性質をもつ. ただし (V) における c_0 を γ_n に代えるものとする.

(VI) 各 $r>0$ と (II) の c_r と c_r' に対して

$\|f_n(t,u)\|^2\leqq c_r\cdot\varphi^t(u)+c_r'$ $(\forall t, \forall n, \forall u\in D: \|u\|\leqq r)$.

(VII) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\gamma_\varepsilon\geqq 0$ が存在して

$(f_n(t,u)-f_n(t,v), u-v)\leqq\varepsilon(u_1-v_1, u-v)+\gamma_\varepsilon\cdot\|u-v\|^2$

$(\forall t, \forall n, \forall u,v\in D(\partial\varphi^t), \forall u_1\in\partial\varphi^t(u), \forall v_1\in\partial\varphi^t(v))$.

(VIII) 各実数 r に対して, f_n は f に $\{(t,u)\in[0,T]\times D \mid \varphi^t(u)\leqq r\}$ において一様収束する.

(IX) $\lim_{n\to\infty}u_n=u\in D$ かつ $\mathrm{weak}\lim_{n\to\infty}f_n(t,u_n)=v$ ならば, $f(t,u)=v$.

・

Hが可分のとき，以上の仮定のもとで，任意の $a \in D$ に対して，$u \in C([0,T];H)$ と $y \in L^2(0,T;H)$ で

i) $u(t) \in D$ $(\forall t \in [0,T])$, $y(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ (a.a. t).

ii) $u(t) + \int_0^t y(\sigma)d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u(\sigma))d\sigma$ $(\forall t \in [0,T])$.

をみたすものが一意的に存在することを証明することができる．

これは，たとえば，変動境界をもつ領域における非線形熱方程式に関する Dirichlet 境界条件 0 のもとでの初期値問題の解の存在の証明に応用することができる（[3] 参照）．

文献

[1] F.E. Browder, Non-linear equations of evolution, Ann. of Math. 80 (1964), 485-523.

[2] M.G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Functional Anal. 3 (1969), 376-418.

[3] H. Fujita, The penalty method and some nonlinear initial value problems, to appear.

[4] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 508-520.

[5] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 493-507.

[6] J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 273-299.

[7] J. Watanabe, On nonlinear semigroups generated by cyclically dissipative sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 18 (1971), 127-137.