数理解析研究所講究録
134巻 1972年 6-14

非線型拡散方程式の半群的取扱いについて

東大・理　小西芳雄

§1. 序

拡散係数 D が濃度 $u=u(t,x)$ に依存する，等方性をもつ媒質に於ける拡散現象は次の方程式により支配される：

$$(1.1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}[D(u)\operatorname{grad}u] \quad ,$$

即ち，$\beta(u)=\int_0^u D(r)dr$ と置くことにより，

$$(1.1)'\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\Delta\beta(u) \quad .$$

物理学への応用を考慮に入れるならば，特に興味ある場合として $\beta(u)=u^n$ が挙げられよう（Ames [1]）；この時 (1.1), (1.1)' は一般に $u=0$ で縮退していることに注意する —— このために解の滑らかさがくずれる（Олейник-Калашников-Юй-Линь [12]，Aronson [2]；数値実験は Graveleau-Jamet [7]，Richtmyer-Morton [13]）.

次に取扱うのは次の形の方程式である：

(1, 2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \beta(u) \quad .$$

本稿の目的は (1, 1)′, (1, 2) が非線型半群の理論の枠内で考察することが一部可能であることを報告することである。猶, (1, 1), (1, 1)′ の研究として, Brezis [3], Lions [11] の結果があり, 最近の Brezis [4], [5] の論文では, (1, 1)′ をヒルベルト空間 $H^{-1}(\Omega)$ で考え, "劣微分" の理論を使い, "高村理論" の美しい応用を示した。一方境界が時間とともに動く場合の (1, 2) の研究は Fujita [6] に見られる。

§2. 保順序半群について

X をバナッハ束とする。Sato [14] に従って汎函数 σ を

$$\sigma(f, g) = \inf_{\substack{b \in [0, +\infty) \\ k \in X,\ f \wedge |k| = 0}} \tau(f, (g+k) \vee (-bf))$$

$f \geq 0,\ g \in X$ により定義する; 但し $\tau(f, g) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}(\|f + \varepsilon g\| - \|f\|)$. X に定義域 D(A) と値域 R(A) をもつ (非線型, 多価) 作用素 A が <u>dispersive (s)</u> (Konishi [8], cf. Sato [15]) であるとは次の条件が成立することとする:

$$\sigma((f-g)^+, Af - Ag) \leq 0 \quad \forall f, \forall g \in D(A).$$

$R(I - \lambda A) \supset \overline{D(A)}$ (λ: 十分小 > 0) を満たす dispersive (s) 作用素 A は次の"指数公式"により与えられる <u>保順</u>

序半群 $\{\exp(tA);t\geqq 0\}$ ($\overline{D(A)}$ 上の) を"生成"する:

$$\exp(tA)f=\lim_{n\to\infty}\{I-(t/n)A\}^{-n}f\ ,\ f\in\overline{D(A)},\ t\geqq 0.$$

以上証明等詳細は Konishi [8] 参照.

§3. $\partial u/\partial t=\Delta\beta(u)$ について

以下Ωをユークリッド空間の有界領域とし，境界は滑らかであると仮定する。βを $D(\beta)=[0,a)$ $(0<a\leq\infty)$, $\beta(0)=0$, $\lim_{r\uparrow a}\beta(r)/r=+\infty$ $(0<a<\infty)$, >0 $(a=\infty)$ なる条件を満たす単調増加函数とする。このβに対し $L^1(\Omega)$の中の作用素 β_1 を次の様に定義する:

$$D(\beta_1)=\{f\in L^1(\Omega)\,;\ f(x)\in D(\beta)\ \text{a.e.}\ x\ 且\ \beta(f(\cdot))\in L^1(\Omega)\}$$

$$(\beta_1 f)(x)=\beta(f(x))\qquad x\in\Omega\ ,\quad f\in D(\beta_1)\ .$$

次にΔ_1を定義域として$W_0^{1,1}(\Omega)\cap W^{2,1}(\Omega)$をもつラプラシアンの最小閉拡張とする。この時

定理1 (i) $L^1(\Omega)$の中の作用素 $\Delta_1\beta_1$ (Δ_1とβ_1の積) は dispersive (s) で且 $R(I-\lambda\Delta_1\beta_1)\supset L^1(\Omega)^+$,$\forall\lambda>0$.

(ii) $\Delta_1\beta_1$は $\{f\in L^1(\Omega)\,;\ 0\leq f(x)\leq a\ \ \text{a.e.}\ x\in\Omega\}$ 上の保順序半群 $\{\exp(t\Delta_1\beta_1)\,;\ t\geq 0\}$ を生成し且 $\exp(t\Delta_1\beta_1)$ $(t\geq 0)$ は sub-Markov である:即ちもし非負函数(定数) e ($e(x)<a$ a.e. $x\in\Omega$) に対し

$0 \leq u_0 \leq e$ ならば　$\exp(t\Delta_1\beta_1)u_0 \leq e$, $\forall t \geq 0$.

(iii) さらに β が局所ヘルダー連続な函数という仮定の下で,
$u(t) = \exp(t\Delta_1\beta_1)u_0$, $t \geq 0$, $u_0 \in D(\Delta_1\beta_1)$ は
(1,1)′と形式的に同じ方程式の解である:

$$(d/dt)(\Delta_1^{-1}u) = \beta_1 u \qquad \text{a.e. on } (0, +\infty)$$
$$u(0) = u_0$$

以上証明は Konishi [10] 参照.

§4. $\partial u/\partial t = \Delta u - \beta(u)$ について

[4-1]

β を $D(\beta) = R$, $\beta(0) = 0$ なる非減少函数とする。この β に対し β_0 なる $C_0(\overline{\Omega}) = \{f ; \overline{\Omega}$ で連続, 境界で $0\}$ の作用素を定義する:

$$D(\beta_0) = C_0(\overline{\Omega})$$
$$(\beta_0 f)(x) = \beta(f(x)) \quad , \quad f \in D(\beta_0) .$$

次に Δ_0 として 定義域を $\{f \in C_0(\overline{\Omega})$; $f \in W^{2,q}(\Omega)$, 且 $\Delta f \in C_0(\overline{\Omega})\}$ $(n < q < \infty)$ とするラプラシアンをとる。(これが q に依らないことは簡単に示せる)。

<u>定理2.</u> (i) $C_0(\overline{\Omega})$ の作用素 $\Delta_0 - \beta_0$ は dispersive(s) で $R(I - \lambda(\Delta_0 - \beta_0)) = C_0(\overline{\Omega})$, $\forall\lambda > 0$.

(ii) $\Delta_0 - \beta_0$ は $C_0(\overline{\Omega})$ 上の保順序半群 $\{\exp t(\Delta_0 - \beta_0)\}; t \geq 0\}$

を生成する。

[4-2]

β を $D(\beta) \ni 0$ なる R の m-accretive 作用素とする。この β に対し β_p なる $L^p(\Omega)$ $(1<p<+\infty)$ の作用素 β_p を定義する:

$D(\beta_p) = \{ f \in L^p(\Omega)\ ;\ \exists g \in L^p(\Omega)$ s.t. $g(x) \in \beta(f(x))$ a.e. $x \in \Omega \}$,

$\beta_p f = \{ g \in L^p(\Omega)\ ;\ g(x) \in \beta(f(x))$ a.e. $x \in \Omega \}$.

Δ_p は定義域を $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ とするラプラシアン.

<u>定理3</u>. (i) $L^p(\Omega)$ の作用素 $\Delta_p - \beta_p$ は dispersive(S) で $R(I - \lambda(\Delta_p - \beta_p)) = L^p(\Omega)$, $\forall \lambda > 0$.

(ii) $\Delta_p - \beta_p$ は $L^p(\Omega)$ 上の保順序半群 $\{\exp\{t(\Delta_p - \beta_p)\}\ ;\ t \geq 0\}$ を生成する。

(iii) $u(t) = \exp\{t(\Delta_p - \beta_p)\} u_0$, $t \geq 0$, $u_0 \in D(\Delta_p) \cap D(\beta_p)$ は次を満たす一意な解である:

$$\frac{du}{dt} \in \Delta_p u - \beta_p u \qquad \text{a.e. on } (0, \infty)$$

$$u(0) = u_0$$

[4-3]

β を $D(\beta) = [0, a)$ $(0 < a \leq +\infty)$, $\beta(0) = 0$, $\lim_{r \uparrow a} \beta(r) = \infty$ $(0 < a < +\infty)$ なる非減少函数とし, β_1, Δ_1 なる $L^1(\Omega)$ の作用素を[4-2], §3と同様に定義する。

定理4. (i) $L^1(\Omega)$の作用素$\Delta_1-\beta_1$はdispersive(S)で
$R(I-\lambda(\Delta_1-\beta_1))\supset L^1(\Omega)^+$, $\forall\lambda>0$.
(ii) $\Delta_1-\beta_1$は$\{f\in L^1(\Omega)\,;\,0\le f(x)\le a\ \ \text{a.e. } x\in\Omega\}$上の保順序半群$\{\exp\{t(\Delta_1-\beta_1)\};\ t\ge 0\}$を生成する.
(iii) $u(t)=\exp\{t(\Delta_1-\beta_1)\}u_0$, $t\ge 0$, $u_0\in\{f\in L^1(\Omega);\ 0\le f(x)\le a\ \ \text{a.e. } x\in\Omega\}$は次の方程式の一意な解である:

$$\frac{du}{dt}=\Delta_1 u-\beta_1 u \qquad \text{a.e. on } (0,\infty)$$
$$u(0)=u_0$$

以上証明はKonishi [9], [10] 参照.
註(1) 定理3で$p=2$のとき, Brezis [4]により一般の$u_0\in L^2(\Omega)$に対しても$u(t)=\exp\{t(\Delta_2-\beta_2)\}u_0$は

$$\frac{du}{dt}\in\Delta_2 u-\beta_2 u \qquad \text{a.e. on } (0,+\infty)$$
$$u(0)=u_0$$

の一意な解であることが云え, 従って $1<p<2$ なるpに対しても領域の有界性より同じような"smoothing effect"が証明される. では$2<p<+\infty$なるものに対してはどうか? (cf. Brezis [5]の一Remark) —— 筆者に証明出来た事はβが一価で$D(\beta)=R$ $\beta(0)=0$, $u_0\in L^p(\Omega)^+$のもとで

$$u(t)\in\bigcap_{\substack{1<q<\infty\\0<\alpha<1}}D\left((-\Delta_q)^\alpha\right)$$

という事で，「$u(t)$はかなりよくなる」という事だけである。もっと一般の条件の下で，$u(t) \in D(\Delta_p) \cap D(\beta_p)$ あるいは $u(t) \in W^{2,p}(\Omega)$ だけでも証明したいところである。このように $\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni 0$ （φは lower semi-continuous proper convex ）に関するヒルベルト空間での結果を L^pでも平行に述べ得るかは今のところ不明である。

注(四) 定理2は Webb [16] の著しい結果を使っても証明される。

References

[1] W.F. Ames: Nonlinear partial differential equations in engineering. Academic press, New York-London (1965).

[2] D.G. Aronson: Regularity properties of flows through porous media. SIAM J. Applied Math., 17, 461-467 (1969).

[3] H. Brezis: On some degenerate nonlinear parabolic equations. Nonlinear Functional Analysis. p.28-38 Proc. Symp. Pure Math. 18. AMS (1970)

[4] H. Brezis: Propriétés régularisantes de certains semi-groupes nonlinéaires, Israel J. Math. (to appear)

[5] H. Brezis. Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations (to appear).

[6] H. Fujita : The penalty method and some nonlinear initial value problems (to appear).

[7] J.L. Graveleau and P. Jamet : A finite difference approach to some degenerate nonlinear parabolic equations. SIAM J. Appl. Math., 20, 199–223 (1971).

[8] Y. Konishi : Nonlinear semi-groups in Banach lattices. Proc. Japan Acad., 47, 24–28 (1971).

[9] Y. Konishi : A remark on perturbation of m-accretive operators in Banach space. Proc. Japan Acad., 47, 452–455 (1971).

[10] Y. Konishi : Some examples of nonlinear semi-groups in Banach lattices (pre-print).

[11] J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. (本).

[12] О.А. Олейник, А.С. Калашников и Чжоу Юй-Линь : Задача Коши и краевые задача для уравнений типа нестационарной фильтрации. Известия Акад. Наук, 22, 667–702 (1958).

[13] R.D. Richtmyer and K.W. Morton : Difference Methods for

Initial-Value Problems. (本)
[14] K. Sato : On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices, J. Math. Soc. Japan, 20, 423–436 ((1968).
[15] K. Sato : A note on nonlinear dispersive operators (to appear)
[16] G. F. Webb : Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces (to appear).