

2

On discrete series

Tata Institute

M. S. Narasimhan

§. 1. 準備

G を単連結複素半単純リー群 G_c の一つの非コンパクト real form とし K をその極大^{コンパクト}部分群とする。 G のハール測度に関する G 上の自乗可積分函数のなすヒルベルト空間を $L_2(G)$ で表わせば G の元の左移動により左正則表現が得られる。 G の既約ユニタリー表現 π が $L_2(G)$ の部分表現として実現されるとき π は discrete class とよばれ, discrete classes の集合 \mathcal{E}_d を discrete series という。

補題 1. 1. (Harish-Chandra)

$$\mathcal{E}_d \neq \emptyset \iff \text{rank } G = \text{rank } K.$$

以下 $\text{rank } G = \text{rank } K$ と仮定し K に含まれる G のカルタン部分群を T とする。 G, K, T のリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{t}$ さらにそれらの複素化をそれぞれ $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{t}_c$ で表わす。

$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の整型式の全体を \mathfrak{F} とし, キリング形式により \mathfrak{F} 上に定義される内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とかく。 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の \mathfrak{F} に関する root の全体は \mathfrak{F} に含まれ さらに \mathfrak{F} に辞書式順序を任意に導入するとき 正のルートの和の半分 ρ は又 \mathfrak{F} に属する。 正のルート全体を P とかけ, コンパクトルート (即ちルートベクトルが $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ に属するもの) 全体を P_k とし, $P_n = P - P_k$ とおく。 P_n の元は非コンパクトルートと呼ばれる。

$$\mathfrak{F}' = \{ \lambda \in \mathfrak{F} ; \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \neq 0 \ (\alpha \in P) \},$$

$$\mathfrak{F}'_0 = \{ \lambda \in \mathfrak{F}' ; \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle > 0 \ (\alpha \in P_k) \}$$

とおくとき次が成立する。

補題 1.2. (Harish-Chandra)

Bijection map

$$\mathfrak{F}'_0 \ni \lambda \longmapsto \pi_\lambda \in \mathcal{E}_d$$

が存在して π_λ の指標は G の tempered distribution $\Theta_{\omega(\lambda+\rho)}$ で与えられる。

§ 2. 調和形式と discrete series

本節では等質空間 G/K が不変複素構造をもつと仮定し, 最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{F}'_0$ をもつ K の既約表現 τ_λ に associate

4

した G/K 上の複素解析的ベクトルバンドルを E_λ で表わす。
 このとき E_λ に値をもつ $(0, q)$ 型の C^∞ -級微分形式
 のなすベクトル空間 $C^{0,q}(E_\lambda)$ を考えると

Dolbeault complex

$$\cdots C^{0,q}(E_\lambda) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^{0,q+1}(E_\lambda) \longrightarrow \cdots$$

が得られる。 $\bar{\partial}$ の formal adjoint operator を ∂^* とし

$$C^+ = \sum_{q:\text{even}} C^{0,q}(E_\lambda)$$

$$C^- = \sum_{q:\text{odd}} C^{0,q}(E_\lambda)$$

とおき、微分作用素

$$\bar{\partial} + \partial^* : C^+ \longrightarrow C^- \longrightarrow C^+$$

を考える。 E_λ に値をもつ自乗可積分な $(0, q)$ 型の
 微分形式のなすヒルベルト空間を $L_2^{0,q}(E_\lambda)$ とし $L_2 = \sum_q L_2^{0,q}(E_\lambda)$
 と定義する。

$$H^+ = \{ u \in C^+ \cap L_2 \ ; \ (\bar{\partial} + \partial^*)u = 0 \},$$

$$H^- = \{ u \in C^- \cap L_2 \ ; \ (\bar{\partial} + \partial^*)u = 0 \}$$

とおき、集合 $\{ \alpha \in P_n \ ; \ \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle > 0 \}$ の元の個数を g_λ
 とかく。

$$H_2^{0,q}(E_\lambda) = \{ u \in C^{0,q}(E_\lambda) \cap L_2 \ ; \ (\bar{\partial} + \partial^*)u = 0 \}$$

とおき、 $H_2^{0,q}(E_\lambda)$, H^+ , H^- 上に自然に定義される G のユニタリ
 表現をそれぞれ π_λ^q , π^+ , π^- とするとき次が成立する。

定理 2.1 (Narasimhan - Okamoto)

1) $(-1)^{\delta_\Lambda}$ の符号を ε_Λ とかくとき

$$\pi^{\varepsilon_\Lambda} = \pi_\Lambda^{\delta} \oplus \pi^{-\varepsilon_\Lambda}$$

2) Λ が "sufficiently regular" なるとき

$$H_2^{0,\delta}(E_\Lambda) \neq \{0\} \iff \delta = \delta_\Lambda$$

で、かつ、

π_Λ^{δ} の指標は $\Theta_{w(\Lambda+\rho)}$ である。

系 2.1. discrete class の表現はすべて H^+ 又は H^- の部分表現として得られる。

§ 3. ディラック作用素

E を n 次元実内積ベクトル空間とし、その内積から定義される Clifford algebra を cE とする。偶数個の積及び奇数個の積で張られる部分空間を c^+E 及び c^-E とすると明らかに、 $(c^+E)(c^-E) = (c^-E)(c^+E) \subset c^-E$, $(c^+E)(c^+E) \subset c^+E$ であり、従って特に c^+E は部分環である。以下 n は偶数と仮定し $n=2m$ とおく。このとき $cE \otimes \mathbb{C}$ は単純環であり、その極小左イデアルの \rightarrow を L とすると $cE \otimes \mathbb{C}$ のすべての既約な左加群はすべて L と同型である。

この $cE \otimes \mathbb{C}$ -加群を $c^+E \otimes \mathbb{C}$ に制限すると 二つの同値でない既約な加群に分れ その分解を $L = L^+ \oplus L^-$ とする。このとき $E \subset L^+ \subset L^-$ である。 $u \in E u^{-1} = E$ であるような c^+E の unit u で "長さ" が "1" であるものが

$$\rho(u) : E \ni x \longrightarrow u x u^{-1} \in E$$

が 特殊直交変換であるようなもののなす群を $\text{Spin}(E)$ とかく。 このとき

$$\text{Spin}(E) \ni u \longrightarrow \rho(u) \in \text{SO}(E)$$

は 二葉の covering map である。 $\text{Spin}(E) \subset c^+E$ であるから L^+, L^- は 共に $\text{Spin}(E)$ -module と考えられるが、 L^+, L^- は $\text{Spin}(E)$ -module としても尚 既約である。 これらを それぞれ ρ_+, ρ_- で表わす。 さて、 M を向きづけられたリーマン多様体とし $T(M)$ をその実接バンドルとする。 M 上の $\text{Spin}(E)$ -主バンドル P (ただし $\dim E = \dim M = 2m$ とする) が存在して $T(M)$ が表現 ρ の随伴バンドルとなっているとき M は スピン構造 をもつという。

さて、 $M = G/K$ を 非コンパクト型の対称リーマン空間とし $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を それぞれ G, K のリー環とする。 §1 と同様に G は 単連結な複素化 $G_{\mathbb{C}}$ をもち K は G の極大^{コンパクト}部分群とし、さらに $\text{rank } G = \text{rank } K$ と仮定する。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を カルタン分解 とするとき M のリーマン計量は Killing 形式の ρ

Λ の制限によって与えられていると仮定する。このとき

$\text{Ad}(K) \subset \text{SO}(\rho)$ であるが K の適当な二葉の covering group \tilde{K} を考えることにより

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K} & \longrightarrow & \text{Spin}(\rho) \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ K & \longrightarrow & \text{SO}(\rho) \end{array}$$

なる可換図形が得られ従って $M = G/K$ はスピノ構造をもつ。

さて任意の $\lambda \in \mathfrak{h}_0'$ に対し $\lambda + \rho_n$ ($\rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \rho_n} \alpha$) を最高ウェイトとする \tilde{K} の表現を $\tilde{\tau}_{\lambda + \rho_n}$ としその随伴バンドルを $E_{\lambda + \rho_n}$ とかく。 $\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^-$ をそれぞれ ρ_+, ρ_- の随伴バンドルとしテンソル積 $\mathcal{L}^+ \otimes E_{\lambda + \rho_n}, \mathcal{L}^- \otimes E_{\lambda + \rho_n}$ を考えれば表現

$$\tilde{K} \ni k \longmapsto \rho_{\pm}(k) \otimes \tilde{\tau}_{\lambda + \rho_n}(k)$$

は $\tilde{K} \rightarrow K$ の kernel 上で trivial であることが証明でき従って K の表現に随伴していると考えられる。

さて $\text{Spin}(E)$ 構造によりリーマン接続から自然に定義される共変微分

$$C^\infty(\mathcal{L}^\pm \otimes E_{\lambda + \rho_n}) \longrightarrow C^\infty(T^*(M) \otimes \mathcal{L}^\pm \otimes E_{\lambda + \rho_n})$$

と Clifford algebra の積から自然に定義されるバンドル準同型

$$T^*(M) \otimes \mathcal{L}^\pm \longrightarrow \mathcal{L}^\pm$$

8

を合成することにより 一階の微分作用素

$$C^\infty(\mathcal{L}^\pm \otimes E_{\lambda+\rho_n}) \xrightarrow{D^\pm} C^\infty(\mathcal{L}^\mp \otimes E_{\lambda+\rho_n})$$

が得られ これを Dirac 作用素という。 D^\pm の kernel の元で自乗可積分なもの全体を \mathcal{L}_Λ^\pm とする。

$$W = N_{G_c}(T) / Z_{G_c}(T),$$

$$W_G = N_G(T) / Z_G(T)$$

とおくとき W, W_G は \mathcal{F}' に自然に働き $W \rightarrow W/W_G$ の自然な section W^1 が存在して

$$W^1 \times D \ni (s, \lambda) \mapsto s(\lambda + \rho) - \rho \in \mathcal{F}'_0$$

($E \in \mathcal{L}$, D は dominant な整形式全体) なる bijection が定義される。 $\Lambda \in \mathcal{F}'_0$ に対し $\Lambda = s(\lambda + \rho) - \rho$ ($(s, \lambda) \in W^1 \times D$) なるとき, $s = s_\Lambda$, $\lambda = \lambda_\Lambda$ とかく。 任意の $s \in W$ に対し 集合 $s(-\rho) \cap \rho$ の元の個数が偶数, 奇数に従って 2kZ" され $j(s) = +$, $j(s) = -$ で表わす。 このとき 次の消滅定理が成立する。

定理 (R. Parthasarathy)

すべての $\alpha \in P_n$ に対して

$$\langle s_\Lambda \lambda_\Lambda, \alpha \rangle \neq 0$$

たるとき

$$x_{j\Lambda}^j = \{0\} \quad \text{if } j \neq j(S_\Lambda).$$

(宏島大理 岡本清郷)