数理解析研究所講究録
136巻 1972年 119-132

Stokes作用素等の分数巾の定義域について

東大理　　森本浩子
藤田　宏

§1. 記号と結果

ΩはR^3の有界領域で、その境界$\partial\Omega$は滑らかとする。$L_p(\Omega)$は、Ω上で定義されたp乗可積分な実函数を成分とするベクトル全体、$W_p^l(\Omega)$は、l階までの微分が$L_p(\Omega)$に属するようなベクトル函数全体とする。$D_\sigma(\Omega)$はΩにコンパクトな台を持つ無限回微分可能な実ベクトル函数φで、$\mathrm{div}\,\varphi=0$をみたすもの全体とする。さらに、$H_\sigma(\Omega)$は、$D_\sigma(\Omega)$の$L_2(\Omega)$での閉包、$H_\sigma^1(\Omega)$は$D_\sigma(\Omega)$の$W_2^1(\Omega)$での閉包とする。$L_2(\Omega)$から$H_\sigma(\Omega)$への正射影をPであらわす。$D_\sigma(\Omega)$で定義された作用素$-P\Delta$は、ヒルベルト空間$H_\sigma(\Omega)$で正定値対称作用素である。$-P\Delta$のFriedrichs拡張をAであらわし、Stokes作用素と呼ぶ。Aは正定値自己共役作用素である。$f\in L_2(\Omega)$としよう。$Au=Pf$は、次に同値である。

$$\begin{cases} \Delta u - \nabla p = -f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

但し pはあるスカラー函数である。作用素Sの定義域を$D(S)$であらわすことにすれば，$D(A) = W_2^2(\Omega) \cap H_\sigma^1(\Omega)$が知られている。（Agmon-Douglis-Nirenberg [1]，Cattabriga [2]，Ladyzhenskaya [8]）

本稿では，Aの分数巾A^α（$0<\alpha<1$）の定義域$D(A^\alpha)$の特徴付けを，Dirichlet境界条件のもとでの$B = -\Delta$のそれに関連して与える（定理1.2）。但し，$D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$，ここに$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$は$C_0^\infty(\Omega)$（ベクトル函数）の$W_2^1(\Omega)$における閉包である。定理1.2の結果は，§4で示すように，ナビエ-ストークス方程式の研究に有用である。定理1.2は，すでにFujita-Morimoto [3]で証明されているが，今回は問題を一般化した形での証明を試みる（補題2.3）。この補題は，$D(B^\alpha)$の特徴付けに関する既知の結果（Fujiwara [5]，Grisvard [6]等による）の一部を証明するのにも役立つ。読者の便宜のために，定理の形でのべておこう。

<u>定理1.1</u>

$$D(B^\alpha) = W_2^{2\alpha}(\Omega), \qquad \tfrac{1}{4} > \alpha > 0,$$
$$D(B^\alpha) = \{u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Omega);\ \rho^{-\frac{1}{2}} u \in L_2(\Omega)\}, \qquad \alpha = \tfrac{1}{4},$$

$$D(B^\alpha) = \{ u \in W_2^{2\alpha}(\Omega)\ ;\ u|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad 1 > \alpha > \frac{1}{4},$$

但し，$\rho(x)$は点xの$\partial\Omega$からの距離をあらわす。

我々の主要な結果は、次の定理である。

<u>定理 1.2</u>

$$D(A^\alpha) = D(B^\alpha) \cap H_\sigma, \qquad 1 > \alpha > 0.$$

<u>注意 1.3</u>

次の不等式をみたす正定数C_αが存在する。

$$\frac{1}{C_\alpha}\|B^\alpha u\| \leq \|A^\alpha u\| \leq C_\alpha \|B^\alpha u\|$$

$$(u \in D(A^\alpha) = D(B^\alpha) \cap H_\sigma).$$

上の二つの定理とソボレフの埋蔵定理を用いて，

<u>系 1.4</u>

$$D(A^\gamma) \subset C(\bar{\Omega}), \qquad \gamma > \frac{3}{4},$$

$$D(A^\theta) \subset W_p^1(\Omega), \qquad 1 > \theta > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{5}{6} - \frac{2\theta}{3},$$

特に $D(A^{\frac{5}{8}}) \subset W^1_{\frac{12}{5}}(\Omega)$。

§2．部分空間の補間空間に関する一補題．

我々は実補間法を用いる。たとえば，Lions-Peetre [11]を参照されたい。X, Y, Zはバナッハ空間とし，分離公理をみたす線型位相空間$\mathfrak{X}$が存在して，X, Y, Zは$\mathfrak{X}$に含まれ，かつ埋込みは連続であるとする。これを$X \subsetneqq \mathfrak{X}$などと書くことがある。

定義によれば．$a \in S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ は $u : (0, \infty) \to \mathcal{X}$ で $\int_0^\infty \|t^{1-\alpha} u(t)\|_X^2 \frac{dt}{t} < +\infty$，$\int_0^\infty \|t^{-\alpha} u(t)\|_Y^2 \frac{dt}{t} < +\infty$ をみたす u によって $a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$ とあらわされる。平均空間 $S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ を $[X, Y]_{1-\alpha}$ と書くことにしよう。$X \cap Y$，$X+Y$ には次のノルムを入れて，バナッハ空間とみなす。

$$\|u\|_{X \cap Y} = \max(\|u\|_X, \|u\|_Y)$$

$$\|u\|_{X+Y} = \inf_{u=x+y} (\|x\|_X + \|y\|_Y)$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ は．X から Y への有界線型作用素全体とする。
平均空間に対して．次の補間定理が成立つ。

<u>定理 2.1</u>（Lions-Peetre [11]）

X_i, Y_i $(i = 0, 1)$ は．バナッハ空間で $X_i \subsetneqq \mathcal{X}$，かつ $Y_i \subsetneqq \mathcal{X}$ とする。このとき $T \in \mathcal{L}(X_0, Y_0) \cap \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ ならば $T \in \mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)$ でかつ作用素ノルムは次の不等式をみたす。

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, Y_1)}^{\theta}$$

$$(1 > \theta > 0).$$

<u>定理 2.2</u>（Lions-Peetre [11]）

X，Y は上にのべたバナッハ空間の組とする。この時

$$\left[[X, Y]_{\theta_0}, [X, Y]_{\theta_1} \right]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$$

但し $0<\theta<1$ 。

部分空間の補間空間に関して、次の補題が成立つ。

補題 2.3

Kは $\mathcal{H}$ で定義された線型作用素で 次の性質を持つとする。

i) $K \in \mathcal{L}(X, X\cap Z) \cap \mathcal{L}(Y, Y\cap Z)$

ii) $K\varphi = \varphi$ for $\varphi \in (X+Y)\cap Z$.

このとき

$$[X, Y]_\theta \cap Z = [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta$$

証明

$[X,Y]_\theta \cap Z \supsetneqq [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta$ は明らかである。従って逆むきの包含関係を導けばよい。仮定 i) と定理2.1 により、$K \in \mathcal{L}([X,Y]_\theta, [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta)$ である。ところが ii) より $\varphi \in [X,Y]_\theta \cap Z$ に対しては $K\varphi = \varphi$ が成立つ。故に $[X,Y]_\theta \cap Z \subsetneqq [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta$.

証明終り

注意 2.4

この補題は 他の補間法による補間空間についても成立つことは明らかである。

問題 2.5

補題 2.3 に関連して、次の等号が成立つ条件を調べよ。

$$[X, Z]_\theta \cap [Y, Z]_\theta = [X \cap Y, Z]_\theta .$$

たとえば X, Y が、ヒルベルト空間 Z で定義された正定値自己共役作用素 A, B の定義域で、かつ A, B が可換であれば 等号が成立つ (Lions-Magenes [10] Chap 1)。 バナッハ空間の場合、閉作用素 A, B にある種の可換性を仮定すれば等号が成立つことも知られている (Muramatsu [12])。

補題 2.3 の応用として $D(B^\alpha)$ $(1 > \alpha > \frac{1}{2})$ の特徴付けをおこなうことが出来る。 まず、次の補題をのべておこう。これは Lions [9] の定理の特別な場合である。

<u>補題 2.6</u>

H はヒルベルト空間, S は H における正定値自己共役作用素とする。 このとき $D(S^\alpha) = [D(S), H]_{1-\alpha}$ が成立つ。

この補題と定理 2.2 によれば $D(B^{1-\theta}) = [D(B), D(B^{1/2})]_{2\theta}$, 但し $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$。 $D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $D(B^{1/2}) = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ は既知である。 $u \in W_2^1(\Omega)$ の境界値 γu に対して、次の境界値問題を考えよう。

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma v = \gamma u & \text{on } \partial\Omega . \end{cases}$$

この解を v とする。 楕円型方程式の一般論 (たとえば Lions-Magenes [10] Chap. 2) より、評価

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\,\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$
$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c\,\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)},$$

が成立つ。 又 トレース作用素に関して、次の評価が成立つ。

$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$
$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

$Ku \equiv u - v$ で定義される作用素 K は、$X = W_2^2(\Omega)$, $Y = W_2^1(\Omega)$, $Z = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ として補題2.3の仮定をみたすことは容易にたしかめられる。 従って、$[W_2^2(\Omega)\cap\mathring{W}_2^1(\Omega), \mathring{W}_2^1(\Omega)]_{2\theta} = [W_2^2(\Omega), W_2^1(\Omega)]_{2\theta} \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, 故に、$D(B^{1-\theta}) = W_2^{2-2\theta}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$。

§3. 定理1.2の証明

Cattabriga [2], *Ladyzhenskaya* [8] によって、次の事実が証明されている。

<u>補題 3.1</u>

定数 c_1, c_2 が存在して、すべての $\psi \in H_\sigma(\Omega)$ に対して、次の不等式が成立つ。

$$\|\Delta A^{-1}\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1\|A^{-1}\psi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c_2\|\psi\|_{L_2(\Omega)}.$$

さて、補題2.6により、$D(A^\alpha) = [D(A), H_\sigma]_{1-\alpha}$, $D(B^\alpha) = [D(B), L_2]_{1-\alpha}$ である。 $D(A) = D(B)\cap H_\sigma$ であることと

に注意しよう。$D(B)$ の元 φ に対し，$\mathring{K}\varphi = -A^{-1}PB\varphi$ で作用素 $\mathring{K}$ を定義する。$\mathring{K}$ は，$D(B)$ の元を $D(A)$ にうつす。補題 3.1 により，$\mathring{K}$ は，$K \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), H_\sigma(\Omega))$ に拡張される。φ を $D_\sigma(\Omega)$ の任意の元としよう。定義により，$-PB\varphi = A\varphi$，故に $\mathring{K}\varphi = \varphi$ である。$D_\sigma(\Omega)$ は $H_\sigma(\Omega)$ で dense だから，任意の $\varphi \in H_\sigma(\Omega)$ に対して $K\varphi = \varphi$ が成立つ。$D(A^\alpha)$ (resp. $D(B^\alpha)$) にノルム $\|A^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$ (resp. $\|B^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$) を入れてヒルベルト空間とみなすと，$K$ は $D(B)$ を $D(A)$ にうつす有界作用素で任意の $\varphi \in D(B)$ に対し，$\|K\varphi\|_{D(A)} \leq \|\varphi\|_{D(B)}$ が成立つ。$X = D(B)$，$Y = L_2(\Omega)$，$Z = H_\sigma(\Omega)$ として補題 2.3 を用いることが出来て，$[D(B), L_2]_{1-\alpha} \cap H_\sigma = [D(B) \cap H_\sigma, L_2 \cap H_\sigma]_{1-\alpha}$，故に定理は証明された。

注意 3.2

定理 2.1 により，特に $K \in \mathcal{L}(D(B^\alpha), D(A^\alpha))$ である。さらに，任意の $\varphi \in D(B^\alpha)$ に対して次が成立つ。

$$\|A^\alpha K\varphi\| \leq \|K\|^\alpha_{\mathcal{L}(D(B), D(A))} \|K\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(L_2, H_\sigma)} \|B^\alpha \varphi\|$$

故に $\|A^\alpha K\varphi\| \leq \|K\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(L_2, H_\sigma)} \|B^\alpha \varphi\|$.

この不等式は，一般化された Heinz の不等式（Kato [7]）からも導びかれる。

§4. ナビエ-ストークス方程式 (Fujita-Morimoto [4])

次の初期値問題を考察しよう。

$$
(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -Au + Fu + Pf \\ u(0) = a \end{cases}
$$

但し、$Fu = -P(u\cdot\nabla)u$ である。

次の補題から始めよう。

補題 4.1

正定数 c_0 が存在して、$D(A^{\frac{5}{8}})$ の任意の元 u, v に対して、次の不等式が成立つ。

$$\|Fu\| \leq c_0 \|A^{\frac{5}{8}}u\|^2.$$

$$\|Fu - Fv\| \leq c_0\left(\|A^{\frac{5}{8}}u\| + \|A^{\frac{5}{8}}v\|\right)\|A^{\frac{5}{8}}(u-v)\|.$$

証明

Hölder の不等式により

$$\|Fu\| = \|-P(u\cdot\nabla)u\| \leq \|u\|_{L_{12}} \|\nabla u\|_{L_{\frac{12}{5}}}.$$

Sobolev の埋蔵定理によれば $W^1_{\frac{12}{5}} \subset L_{12}$ であるから

$$\|Fu\| \leq C\|\nabla u\|^2_{L_{\frac{12}{5}}}$$

系 1.4 によれば $D(A^{\frac{5}{8}}) \subset W^1_{\frac{12}{5}}$、故に ある正定数 c_0 が存在して

$$\|Fu\| \leq c_0\|A^{\frac{5}{8}}u\|^2.$$

二番目の不等式も同様にして導かれる。 証明終り.

方程式 (E) の解を、函数空間 $\mathcal{S}_T$ $(T \geq 0)$ で求める。

$\mathcal{S}_T$ は、次のように定義される。

$$\mathcal{S}_T \equiv \{ u : (0, T] \to D(A^{\frac{5}{8}}) \text{ 連続} ;$$
$$|||u|||_T \equiv \sup_{0<t\leq T} t^{\frac{3}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} u(t) \|_{L_2(\Omega)} < +\infty \}$$

$\mathcal{S}_T$ は、ノルム $|||u|||_T$ で、バナッハ空間となる。

簡単のために、外力 $Pf = 0$ の場合を扱う。積分作用素 Φ を次のように定義しよう。

$$u_0(t) = e^{-tA} a$$

$$\Phi u(t) = u_0(t) + \int_0^t e^{-(t-s)A} Fu(s)\, ds .$$

$u_0 \in \mathcal{S}_T$ ならば Φ は $\mathcal{S}_T$ の元を $\mathcal{S}_T$ にうつす。なぜならば、補題4.1により、

$$\int_0^t \| A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A} Fu(s) \| ds$$
$$\leq c_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} u(s) \|^2 ds$$
$$\leq c_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds \sup_{0<s\leq t} \| s^{\frac{3}{8}} A^{\frac{5}{8}} u(s) \|^2 .$$

しかるに、積分 $\int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds = t^{-\frac{3}{8}} \beta_1$ $(\beta_1 = B(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$, $B(\cdot, \cdot)$ はベータ函数) であるから、不等式

$$(*) \qquad |||\Phi u|||_T \leq |||u_0|||_T + c_0 \beta_1 |||u|||_T^2 .$$

を得る。ここで定数 r と、$\mathcal{S}_T$ の閉球 $\mathcal{B}_T$ を次のように定めよう。

$$r \equiv |||u_0|||_T \cdot 4 c_0 \beta_1$$

$$\mathcal{B}_T \equiv \{ u \in \mathcal{S}_T ;\ |||u|||_T \leq 2 |||u_0|||_T \}$$

この時、Φ に関して次の命題が成立つ。

命題 4.2

i) Φは $\mathcal{B}_T$上 係数 rの Lipschitz 連続である。 すなわち，$u, v \in \mathcal{B}_T$ ならば

$$|||\Phi u - \Phi v|||_T \leq r\, |||u - v|||_T .$$

ii) $r \leq 1$ ならば $\mathcal{B}_T$は Φで不変である。

証明

i) 補題 4.1 を用いれば

$$\|A^{\frac{5}{8}}(\Phi u - \Phi v)\|$$

$$\leq \int_0^t \|A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A} (F u(s) - F v(s))\| ds$$

$$\leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} \left(\|A^{\frac{5}{8}} u(s)\| + \|A^{\frac{5}{8}} v(s)\|\right) \|A^{\frac{5}{8}}(u(s) - v(s))\| ds$$

故に $|||\Phi u - \Phi v|||_T \leq c_0\beta_1 \left(|||u|||_T + |||v|||_T\right) |||u - v|||_T$.

$u, v \in \mathcal{B}_T$ であるから，

$$|||\Phi u - \Phi v|||_T \leq 4 c_0 \beta_1 |||u_0|||_T\, |||u - v|||_T$$

$$= r\, |||u - v|||_T$$

ii) 不等式 $(*)$ を $u \in \mathcal{B}_T$ に対して用いれば

$$|||\Phi u|||_T \leq |||u_0|||_T + 4 c_0 \beta_1 |||u_0|||_T^2$$

$$\leq (1 + r)\, |||u_0|||_T .$$

従って $r \leq 1$ ならば $\Phi u \in \mathcal{B}_T$ である。 証明終り。

命題 4.3

$r \equiv 4 c_0 \beta_1 |||u_0|||_T < 1$ となる正数 T が存在すれば、作用素 Φは contraction である。 従って不動点がただ1つ存

在する。

証明

命題4.2より直ちに従う。

注意4.4

条件 $\gamma < 1$ は、どのような場合にみたされるかを調べよう。

(イ) $a \in D(A^{\frac{1}{4}})$ の時、

$$t^{\frac{3}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} e^{-tA} a \| = t^{\frac{3}{8}} \| A^{\frac{3}{8}} e^{-tA} A^{\frac{1}{4}} a \| \leq \| A^{\frac{1}{4}} a \|$$

であるから、 $4 c_0 \beta_1 \| A^{\frac{1}{4}} a \| < 1$ が成立つほどに $\| A^{\frac{1}{4}} a \|$ が小さければ、$T = \infty$ ととれる。 又、任意の $a \in D(A^{\frac{1}{4}})$ に対して、 $\| t^{\frac{3}{8}} A^{\frac{5}{8}} u_0(t) \| \longrightarrow 0$ ($t \to 0$) であるから、 $\gamma < 1$ となるような $T = T(a)$ 存在する。

(ロ) $a \in D(A^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) の時、

$$t^{\frac{3}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} u_0(t) \| = t^{\varepsilon} \cdot t^{\frac{3}{8}-\varepsilon} \| A^{\frac{3}{8}-\varepsilon} e^{-tA} A^{\frac{1}{4}+\varepsilon} a \|$$

$$\leq T^{\varepsilon} \| A^{\frac{1}{4}+\varepsilon} a \|$$

故に、$T^{\varepsilon} < \left(4 c_0 \beta_1 \| A^{\frac{1}{4}+\varepsilon} a \| \right)^{-1}$ なる T に対して $\gamma < 1$ となる。

Φ の不動点は、実は方程式(E)をみたすことが証明出来るが、ここでは省略する。

定理4.5

$\gamma < 1$ となる $T > 0$ が存在するとき、(E)の解が $\mathcal{B}_T$

のうちにたゞ1つ存在する。

文献

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions.
I : Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727;
II : Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[2] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Semi. Mat. Univ. Padova, 31 (1961), 308-340.

[3] H. Fujita and H. Morimoto, On fractional powers of the Stokes operator, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1141-1143.

[4] H. Fujita and H. Morimoto, Fractional powers of operators and interpolation of spaces applied to the Navier-Stokes equation (to appear)

[5] D. Fujiwara, L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 15 (1968), 169-177.

[6] P. Grisvard, Caractérisatión de quelques espaces d'interpolatión, Arch. Rat. Mech. Anal, 25 (1967), 40-63.

[7] T. Kato, A generalizatión of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad., 37 (1961), 305-308.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon-Breach, New York, 1963.

[9] J.L. Lions, Espaces d'interpolatión et domaines de puissances fractiónnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 233-241.

[10] J.L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes Vol I, Dunod, Paris, 1968.

[11] J.L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolatión, Publ. Math. de l'I. H. E. S., Paris, No 19, 1964.

[12] T. Muramatsu, Products of fractiónal powers of operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), 581-590.