数理解析研究所講究録
136巻 1972年 75-90

Weak type の interpolation theorems

東北大 理　猪狩　惺

§1. 序

ここの目的は二つの空間 $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ と $H^p(R_+^{n+1})$ に関する補間定理を述べることである.

現在では，作用素の補間定理は補間空間の構成という立場から論ぜられることが多い．それらのうち広く知られているものとして，例えば Calderón [1], Lions [8] および Lions-Peetre [9], Peetre [10] などの方法がある．

前者は，Riesz-Thorin の補間定理を Calderón-Zygmund が Phragmén-Lindelöf の定理を用いて透明に証明しているが，その方法を活かしたもので所謂複素関数論的方法によるものといえる．一方，後者二つの中には関数を具合のよい二つの部分に分解するという方法がみられる．このような考え方は Marcinkiewicz の補間定理の証明の中にみることができ

そこでは複素関数論的方法はとられていない．

始めに述べた二つの空間 $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}$，$H^p$ に対しては，Riesz-Thorin や Marcinkiewicz のと類似した補間定理がなりたつ．そしてそれらと上にあげた構成された補間空間との関係は，例えば Kreé [7]，Spanne [12] などでふれている．しかしそれらが一般的な空間の一つの例になっているか否か，あるいはそれらを含むより一般的な空間の構成はわかっていないように思われる．

§ 2．空間 $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$．

空間 $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ は John - Nirenberg [6] や Campanato [2]，[3] などで述べられている．更に Spanne [12] Stampacchia [13]，[14] に従ってそれを述べる．

Q は常に n 次元ユークリッド空間 R^n の各辺が座標軸と平行な立方体を表わすものとする．Ω は R^n の連結開集合で，中心が Ω に含まれ $diam(Q) < 2\,diam(\Omega)$ なるすべての Q に対して

$$|\Omega \cap Q| / |Q| \geq \delta > 0$$

がなりたつものとする，ここに δ は Q に無関係な定数である．$\mathcal{P}_k$ を n 変数，次数 $\leq k$ なる多項式全体とする．

<u>定義</u>．$1 \leq p < \infty$，$-\infty < \lambda < \infty$，$k \geqq 0$ は整数とする、

$\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) = \mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}$ は次のような Ω 上の局所可積分関数 u の集合である；

$$[u]_{\mathcal{L}} = \sup_{Q}\left\{\frac{1}{|Q|^{\frac{\lambda}{n}}} \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{Q\cap\Omega} |u-P|^p dx\right\}^{1/p} < \infty.$$

ここに Q は中心が Ω に含まれ $diam(Q) < 2\, diam(\Omega)$ である。

$[u]_{\mathcal{L}}$ の定義で多項式として特別なものをとることが出来る；立方体 Q に対して $\{\varphi_j\}$ を $\mathcal{P}_k$ の内積 $(f,g) = \int_{Q\cap\Omega} fg\, dx$ に関する正規直交基とする，但し便宜上 φ_0 は定数関数としておく，そのとき

$$P(Q)u = P_k(Q)u = \sum_j (u, \varphi_j)\varphi_j$$

とおくと

$$\| P_k(Q)u \|_{L^p(Q\cap\Omega)} \leq C \| u \|_{L^p(Q\cap\Omega)}$$

となる，C は u, Q に無関係な定数である．従って

$$\begin{aligned}\inf_{P\in\mathcal{P}_k} \| u-P \|_{L^p(Q\cap\Omega)} &\leq \| u - P(Q)u \|_{L^p(Q\cap\Omega)} \\ &\leq (1+C) \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \| u - P \|_{L^p(Q\cap\Omega)}.\end{aligned}$$

ゆえに $[u]_{\mathcal{L}}$ の定義で P は $P(Q)u$ でおきかえてもよい．

<u>定義</u>．$C^{(k)}(\Omega)$ は $\overline{\Omega}$ 上で $\leq k$ 次の連続な導関数をもつ関数 u の集合とする．$C^{(k,\alpha)}(\Omega)$，$0<\alpha\leq 1$，は $u \in C^{(k)}(\Omega)$ で

$$[u]_C = \sum_{|q|=k} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|D^q u(x) - D^q u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

なるものの集合とする．

<u>定理</u>．$1 \leq p < \infty$，$k \geq 0$ は整数，$\lambda \geq 0$，$\alpha = (\lambda - n)/p - k$ とする．

(i)　$\alpha > 1$ なら $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)} = \mathcal{P}_k$．

(ii)　$1 \geq \alpha > 0$ なら $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)} = C^{(k,\alpha)}$．

(iii)　$0 > \alpha$ なら整数 h，$\alpha + k - 1 < h$，に対して
$\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)} \cap L^p(\Omega) = \mathcal{L}_h^{(p,\lambda)} \cap L^p(\Omega)$．

(iv)　$\mathcal{L}_k^{(p,0)} = L^p(\Omega) + \mathcal{P}_k$．

§3．空間 $\mathcal{E}_k(\Omega)$．

$k \geq 0$ を整数とするとき，すべての $p \geq 1$ に対して

$$\mathcal{L}_k^{(1,n+k)}(\Omega) = \mathcal{L}_k^{(p,n+pk)}(\Omega)$$

であることを Campanato [3] は示した．従って $\mathcal{L}_k^{(\infty,\infty)}$ に代るものとして $\mathcal{E}_k(\Omega)$ を $\mathcal{L}_k^{(1,n+k)}(\Omega)$ として定義する．$\mathcal{E}_k$ の半ノルム $[\ ]_\mathcal{E}$ は $[\ ]_{\mathcal{L}_k^{(1,n+k)}}$ で与える．

<u>定理</u>．$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ とするとき次の条件は同値である．

(i)　$[u]_{\mathcal{L}_k^{(1,n+k)}} < \infty$，

(ii)　$[u]_{\mathcal{L}_k^{(p,n+pk)}} \leq$ constant for all $p \geq 1$

(iii)　ある $\beta > 0$ に対して

$$\sup_{Q} \frac{1}{|Q|} \int_{Q\cap\Omega} \left[e^{\beta |u - P_k(Q)u| / |Q|^{\frac{k}{n}}} - 1 \right] dx < \infty,$$

(iv)　ある $\beta' > 0$ に対して

$$\sup_{Q} \sup_{\sigma > 0} \frac{1}{|Q|} e^{\beta' \sigma / |Q|^{\frac{k}{n}}} \, meas \left\{ x \in Q \cap \Omega : |u - P_k(Q)u| > \sigma \right\} < \infty.$$

(iii) → (ii)，(iii) → (iV) は明らか，(iV) → (iii) は容易に示される．$k \geq 1$ のとき (i) → (ii) であることは Campanato [3] による．従ってこのときは (ii) → (iii) は容易に示される．$k = 0$ のとき (i) → (iV) であることは John–Nirenberg [6] による．

§4. 空間 $\mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ と $\mathcal{M}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$.

$\mathcal{Q}$ を互いに素な中心が Ω にあり $diam(Q) < 2\, diam(\Omega)$ であるような有限個の互いに素な立方体からなる集合の族とする．

<u>定義</u>　$1 \leq p \leq \infty$，$-\infty < \lambda < \infty$，$k \geq 0$ を整数とする．$\mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) = \mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}$ は次の条件をみたす Ω 上局所可積分な関数 u の集合である；

$$[u]_{\mathcal{N}} = \sup_{\{Q_j\} \in \mathcal{Q}} \left\{ \sum_j \left(\frac{1}{|Q_j|^{\frac{\lambda}{n}}} \int_{Q_j \cap \Omega} |u - P_k(Q)u| \, dx \right)^p |Q_j| \right\}^{1/p} < \infty.$$

容易にわかるように

$$\mathcal{E}_k(\Omega) = \mathcal{L}_k^{(1,n+k)}(\Omega) = \mathcal{N}_k^{(\infty,n+k)}(\Omega).$$

<u>定義</u>. $1 \leq p < \infty$, $-\infty < \lambda < \infty$, $k \geq 0$ を整数とする. $\mathcal{M}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) = \mathcal{M}_k^{(p,\lambda)}$ は次の条件をみたす Ω 上の可測関数 u の集合である;

$$[u]_{\mathcal{M}} = \sup_{Q} \sup_{\sigma>0} \sigma \left[\frac{1}{|Q|^{\frac{\lambda}{n}}} \operatorname{meas}\{x \in \Omega \cap Q \,;\, |u - P_k(Q)u| > \sigma\} \right]^{1/p} < \infty.$$

Kolmogorov の不等式から明らかに

$$[u]_{\mathcal{M}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)} \leq [u]_{\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)}$$

である. 更に次のような関係が成りたつ.

<u>定理</u>. $1 < p < \infty$, $k \geq 0$ を整数, $\lambda \geq n$ とすれば,

$$[u]_{\mathcal{M}_k^{(p,\lambda-n)}(\Omega)} \leq C\, [u]_{\mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)},$$

ここに C は u に無関係な定数である.

証明は次に示す補助定理を用いて John - Nirenberg [6] の論法を適用すればよい.

<u>補助定理</u>. $u \in L^1(Q \cap \Omega)$, Q の中心は Ω に含まれ $\operatorname{diam}(Q) < 2 \operatorname{diam}(\Omega)$,

$$s \geq \frac{1}{|Q|}\int_{Q\cap\Omega}|u-P_k(Q)u|\,dx$$

とする。そのときQに含まれ中心がΩにある互いに素な高さ可算個のQ_jと，γ，nだけに関係する定数Kが存在して次のような条件をみたす．

(i) $|u(x)-P_k(Q)u| \leq s$ a.e. in $Q\cap\Omega\setminus\bigcup Q_j$

(ii) $|P_k(Q_j)u-P_k(Q)u| \leq Ks$ in Q_j

(iii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| \leq Ks^{-1}\int_{Q\cap\Omega}|u-P_k(Q)u|\,dx$.

§5. 補間定理.

以上述べた空間への写像に対する補間定理を主にStampacchia [13]，[14] に従って述べる．これらは古くから知られているRiesz-Thorin, Marcinkiewiczの定理から極く簡単に導かれるものである．しかし結果は自明でないばかりか有効である．

<u>定理</u> 1. $1 \leq p_i,\ q_i \leq \infty$，$-\infty < \lambda_i < \infty$ $(i=0,1)$，$k \geq 0$は整数とする．$0<\theta<1$に対して

$$1/p_\theta = (1-\theta)/p_0+\theta/p_1,\quad 1/q_\theta = (1-\theta)/q_0+\theta/q_1,$$

$$\lambda_\theta = (1-\theta)\lambda_0+\theta\lambda_1$$

とおく．

Tが$L^{p_i}(M, \mathfrak{M}, \mu)$から$\mathcal{L}_k^{(q_i,\lambda_i)}(\Omega)$への線型写像としてノルム$M_i$ $(i=0,1)$をもてば，すなわち，$[Tu]_{\mathcal{L}_k^{(q_i,\lambda_i)}} \le M_i \|u\|_{p_i}$ならば，$L^{p_\theta}(M, \mathfrak{M}, \mu)$から$\mathcal{L}_k^{(q_\theta,\lambda_\theta)}(\Omega)$の写像としてノルム$\le C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$をもつ，ここにCはT，uに無関係な定数である．

証明．$J_Q u = u - P_k(Q)u$とおけば，$J_Q T : L^{p_i} \to L^{q_i}(Q\cap\Omega, |Q|^{-\frac{\lambda_i}{n}}dx)$のノルムは$C_i M_i$でおさえられる．従って，測度の変化を含めたRiesz-Thorinの定理（Stein-Weiss [15] 参照）を適用してQについてsupをとれば求める式が得られる．

同様にしてMarcinkiewiczの定理からは次の定理が導かれる．

<u>定理</u>2．$1 \le p_i \le q_i < \infty$，$p_0 \ne p_1$，$q_0 \ne q_1$とする．$\lambda_i$，k，$p_\theta$，$q_\theta$は前定理と同様とする．

Tを$L^{p_i}(M, \mathfrak{M}, \mu)$から$\mathcal{M}_k^{(q_i,\lambda_i)}(\Omega)$への線型写像[1)]でノルム$M_i$ $(i=0,1)$をもてば，TはL^{p_θ}から$\mathcal{L}_k^{(p_\theta,\lambda_\theta)}$への写像としてノルム$\le C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$をもつ．

定理3．p_i，q_i，p_θ，q_θ，λ_i，λ_θ，kは定理1と同様とする．Tを$L^{p_i}(M, \mathfrak{M}, \mu)$から$\mathcal{N}_k^{(q_i,\lambda_i)}(\Omega)$への線型写像でノルムは$M_i$とする$(i=0,1)$．そのとき$T : L^{p_\theta}$

[1)] Tは線型よりゆるい条件でおきかえてもよい．

$\to \mathcal{N}_k^{(q_\theta,\lambda_\theta)}$ のノルムは $\leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ である.

証明. $\{Q_j\}\in\mathcal{Q}$ とする. 複素数 z, $0\leq \mathrm{Re}\, z\leq 1$, に対して $S^z : \mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)\to L^p(L^1(\Omega):(Z^+,|Q_j|dj))$ を

$$S^z v(j)=\frac{1}{|Q_j|^{\frac{\lambda_z}{n}}}\left[v(\cdot)-P_k(Q_j)v(\cdot)\right]\chi_{Q_j}(\cdot)$$

によって定義すれば,

$$S^zT : L^{p_i}(M,\mathfrak{M},\mu)\to L^{q_i}(L^1(\Omega);(Z^+,|Q_j|dj))$$

は解析的, 線型, そして $\mathrm{Re}\, z=i$ $(i=0,1)$ のときノルムは $\leq M_i$ である. ゆえに Stein の補間定理 (Calderón [ ]) によって求める評価をうる.

<u>定理</u>4. p_i, q_i, p_θ, q_θ, λ_i, λ_θ, k は定理2と同様とする. T を $L^{p_i}(M,\mathfrak{M},\mu)$ から $\mathcal{N}_k^{(q_i,\lambda_i)}(\Omega)$ へのノルム M_i なる線型写像とすれば, $T : L^{p_\theta}(M,\mathfrak{M},\mu)\to \mathcal{L}_k^{(q_\theta,\lambda_\theta-n)}(\Omega)$ のノルムは $\leq CM_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ である.

証明は§4の定理と定理2を用いるとよい.

定理4は $q_i=\infty$ であってもよい. 実際上の定理は $\mathcal{N}_k^{(q_i,\lambda_i)}$ を更に $\mathcal{N}_k^{(\infty,n+k)}=\mathcal{E}_k$ と $\mathcal{M}_k^{(q_0,\lambda_0)}$ でおきかえてもなりたつ.

以上4つの定理で $L^{p_i}(M,\mathfrak{M},\mu)$ は一般の補間空間でおきかえてもよい. しかし特別な場合を除いて空間 $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}$ や $\mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}$ などでおきかえてもよいか否かは明らかでないよう

である (Stein-Zygmund [16] 参照).

§6. 応用例

典型的な応用例として Riesz ポテンシャル及び Calderón-Zygmund タイプの特異積分を考えてみる.

a は R^n 上の可測関数で, $1 \le r \le \infty$ に対して

$$\left(\int_{|y| \ge At} |a(x-y) - a(-y)|^r \, dy \right)^{1/r} \le A, \quad |x| \le t$$

とする. $Tu = u * a$ とおく.

$1/p_0 - 1/q_0 = 1/r'$, $1/r + 1/r' = 1$, $p_0 < r'$ とする. もし $T : L^{p_0} \to L^{q_0}$ が有界ならば, すべての $1/p - 1/q = 1/r'$, $1 < p, q < \infty$ に対して $T : L^p \to L^q$ は有界である.

それを証明するには, $T : L^{r'}(R^n) \to \mathcal{N}_0^{(\infty, n)}(R^n) = \mathcal{E}_0(R^n) = \mathcal{L}_0^{(1,n)}(R^n) = \mathcal{L}_0^{(q_0, n)}(R^n)$ が有界であることを示せばよい. 仮定から, $T : L^{p_0}(R^n) \to L^{q_0}(R^n) \subset \mathcal{L}_0^{(q_0, n)}(R^n) \subset \mathcal{N}_0^{(q_0, n)}(R^n)$ は有界だから定理4が用いられるからである.

実際, $u = u_0 + u_1$, $u_0 = u$ ($|u| < At$), $= 0$ ($|u| \ge At$) とおくと

$$\|Tu_0\|_{q_0} \le C \|u_0\|_{p_0} \le C' t^{n/q_0} \|u\|_{r'}.$$

$$|Tu_1(x) - Tu_1(0)| \leq \left(\int_{|y|\geq At} |a(x-y) - a(-y)|^r dy\right)^{1/r} \|u\|_{r'},$$

ゆえに，$c = Tu_1(0)$ とおくと

$$\left(\int_{|x|\leq t} |Tu_1(x) - c|^{q_0} dx\right)^{1/q_0} \leq C\, t^{n/q_0} \|u\|_{r'}.$$

従って，$\|Tu - c\|_{L^{q_0}(Q)} \leq C|Q|^{1/q_0} \|u\|_{r'}$ が中心0の立方体Qに対して成りたつ．これは平行移動によってすべての立方体Qに対して成りたつから，

$$\|Tu\|_{\mathcal{L}_0^{(q_0,n)}(R^n)} \leq C\|u\|_{L^{r'}(R^n)}$$

がえられる．

もう一つの応用例として，定理1は $T: L^{p_i} \to C^{(k_i,\alpha_i)}$ なる有界線型写像に対して適用される．

§7. 空間 H^p に於ける補間定理．

<u>定義</u>．$H^p(U)$，$p > 0$，は次のような単位円の内部で解析的な関数 $f(z)$ の集合である；

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} < \infty.$$

この空間を半平面上の関数で考えたものが $H^p(R^{n+1})$ である．$f(x,y) \in H^p(R_+^{n+1})$，$x \in R^n$，$y > 0$，とは $n+$

1価の調和関数系 $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ で次の条件をみたすものをいう；

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

$$\|f\|_p = \sup_{y>0} \left(\int_{R^n} \left[\sum_{i=0}^{n} |f_i(x, y)|^2 \right]^{p/2} dx \right)^{1/p} < \infty.$$

ヒルベルト変換についての M. Riesz の定理および Calderón-Zygmund の不等式によって，$p > 1$ ならば

$$H^p(U) = L^p(0, 2\pi), \quad H^p(R_+^{n+1}) = L^p(R^n)$$

（ノルム同値）である．

従って次に述べる定理は p_0 または $p_1 = 1$ のとき意味をもつ．

<u>定理</u> p_i, q_i, p_θ, q_θ は §5 の定理2と同様とする．T は

$$|T(f+g)| \leq \kappa (|Tf| + |Tg|)$$

をみたす H^{p_i} から ν-可測関数への写像で

$$\sup_{\sigma>0} \sigma \left[\nu \{ s \in N : |Tf(s)| > \sigma \} \right]^{1/q_i} \leq M_i \|f\|_{H^{p_i}}$$

$(i = 0, 1)$ とすれば，T は H^{p_θ} から $L^{q_\theta}(N, \nu)$ への有界写像でノルムは $\leq C\kappa^2 M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ である，ここで H^p は $H^p(U)$ または $H^p(R_+^{n+1})$ をあらわす．

証明は，Marcinkiewicz の補間定理の Zygmund による証明法と特異積分の"悪い部分"の評価を組合せてなされる（Igari［5］参照）．

注意．T を線型，$\|Tf\|_{L^{q_i}} \le M_i \|f\|_{H^{p_i}}$，$H^p = H^p(U)$，とすれば，定理の結論は $0 < p_i < \infty$ としても成りたつことが知られている（Salem-Zygmund［11］，Weiss［18］）．しかしその方法はこのような weak type には適用できない（Strichartz［17］）．

$H^p(U)$，$p > 0$，および $H^p(R_+^{n+1})$，$p \ge (n-1)/n$，が補間空間か否かは明らかでないようである．

引用文献

［1］ A. P. Calderón, Intermediate space and interpolation, the complex method, Studia Math., 24 (1964) 113 − 190.

［2］ S. Campanato, Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 17 (1963), 175−188.

［3］ S. Campanato, Proprietà di una famiglia di spazi funzionali, ibid. 18 (1964), 137–160.

[4] S. Campanato, Teoremi di interpolazione per transformazioni che applicano L^p in $C^{h,\alpha}$, ibid. 17 (1964) 345–360.

[5] S. Igari. An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz, Proc. Japan Acad. 38 (1962), 731–734, Tôhoku Math. J. 15 (1963) 343–358.

[6] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 415–426.

[7] P. Krée, Interpolation d'espaces qui ne sont ni normés, ni complets, Ann. Inst. Fourier, 17 (1968), 137–174.

[8] J.-L. Lions, Une construction d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci., 251 (1961) 1853–5.

[9] J-L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ. I.H.E.S., Paris n° 19 (1964) 5–68.

[10] J. Peetre, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci., 256 (1963), 54–

55.

[11] R. Salem and A. Zygmund, A convexity theorem, Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A., 34 (1948) 443-7.

[12] S. Spanne, Sur l'interpolation entre les espaces $\mathcal{L}_k^{p,\Phi}$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966) 625-648.

[13] G. Stampacchia, $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ spaces and interpolation, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964) 293-306.

[14] G. Stampacchia, The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965) 443-462.

[15] E. M. Stein and G. Weiss, Interpolation of operators with change of measures, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958) 159-172.

[16] E. M. Stein and A. Zygmund, Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p-spaces, Ann. Math., 85 (1967), 337-349.

[17] R. S. Strichartz, A multiplier version of the Marcinkiewicz interpolation theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 21 (1969) 441-4.

[18] G. Weiss, An interpolation theorem for sub-

linear operators on H^p-spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 92–9.