数理解析研究所講究録
136巻 1972年 45-74

一般の領域における Besov 空間.

京大数研　　村松寿延

§1. 序

O. V. Besov [1] は $\mathbb{R}^n$ 上の関数空間 $B_{p,q}^{(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)}(\mathbb{R}^n)$ を導入した. $\sigma_1=\cdots=\sigma_n=\sigma$ の場合が Taibleson [15] の Lipschitz 空間 $\Lambda(\sigma;p,q;\mathbb{R}^n)$ に一致する. 一般の領域上の関数については Il'in [4] が論じているが, Besov のノルムを直接拡張したノルムで調べるためきわめて複雑かつせまい結果しか出ない. この場合われわれは座標系に依存しない $\sigma_1=\cdots=\sigma_n$ の場合が大切と考え, その場合について, Taibleson に応じたノルムによって Besov 空間を定義する. ここでは, Sobolev 空間, Besov 空間についてそれらの補間空間を論じ, また埋蔵定理, 境界値の性質などを述べる. $\mathbb{R}^n$ や半空間上の関数空間の場合については多くの結果が知られている. その時には一次元の結果から容易に n 次元の場合が導けるが, 一般の領域のときには直接 n 次元を扱わねばならない.

以下の結果の主要部分は[8],[9]で報告した．ただし，ベクトル値関数に拡張し，また negative order の空間についても論ずる．

以後 Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合であって円錐条件 $C(T_0)$ を満すものとする．すなわち，$\mathbb{R}^n$ 上の有界，一様連続な $\mathbb{R}^n$-値関数 $\Psi(x)$ と $0<T_0\leqq\infty$ とがあって，すべての $x\in\Omega$，$z\in B=\{|z|\leq 1\}$ $0<t<T_0$ について，$x+tz+t\Psi(x)\in\Omega$ となる．$\eta>1$ をとり T_0 を T_0/η，$\Psi(x)$ を $\eta\Psi*\varphi(x)$ とかえても同じ性質をもつ．ただし，φ は C_0^∞，$\int\varphi(y)\,dy=1$，φ の台は十分小とする．したがって，$\Psi\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ としてよい（記号は以下をみよ）．

記号 $\mathbb{R}^n$：n次元空間，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$dx=dx_1\cdots dx_n$，$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$．

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ multi-index，$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$ $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$．

$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_j=\partial/\partial x_j$，$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$．

$\alpha\geqq\beta \iff \alpha_1\geqq\beta_1,\cdots,\alpha_n\geqq\beta_n$．$\binom{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}$ （$\alpha\geqq\beta$ のとき），$=0$（その他）．

X，Y，X_0，Y_0，$\cdots$ Banach空間．

$C^m(\Omega:X)$：X-値 m 回連続的微分可能な Ω 上の関数の空間．

$\mathcal{B}^m(\Omega:X)$：m 階までの偏導関数がすべて有界，連続な X-値関数全体

$L^p(M,\mu;X)=L^p(M;X)$：測度空間 (M,μ) 上の X-値 強可測 かつ $\|f(x)\|_X$ が L^p に属する関数の空間．

$L^p(M;\mathbb{C})\equiv L^p(M)$　$L^p(\Omega,dx;X)\equiv L^p(\Omega;X)$

$L^p(\mathbb{R}^n,|x|^{-n}dx;X)\equiv L^p_*(\mathbb{R}^n;X)$，$L^p(\mathbb{R}^+,\frac{dt}{t};X)\equiv L^p_*(\mathbb{R}^+;X)$．

$\Omega'(x'') \equiv \{x' \in \mathbb{R}^s ; (x', x'') \in \Omega\}$ s次元切り口．ただし $x'' \in \mathbb{R}^{n-s}$

$\Omega'' \equiv \{x'' \in \mathbb{R}^{n-s} ; \quad \Omega'(x'') \neq \phi\}$. Ω の $\mathbb{R}^{n-s}$ への射影．

$$\|f\|_{L^{p;n-s}(\Omega;X)} \equiv \underset{x'' \in \Omega''}{\mathrm{ess.\,sup}} \|f(x', x'')\|_{L^p(\Omega'(x''); X)}$$

$$\|f\|_{L_*^{p;n-s}(\Omega;X)} \equiv \underset{x'' \in \Omega''}{\mathrm{ess.\,sup}} \|f(x', x'')\|_{L^p(\Omega'(x''), |x|^{-s}dx'; X)}$$

<u>定義</u> $m \geq 0$, $1 \leqq s \leqq n$ を整数とする．$1 \leqq p \leqq +\infty$ とする．超関数としての m階までの偏導関数がすべて強可測かつ $L^{p;n-s}(\Omega;X)$ に属する X-値関数の全体を $W^m_{p;n-s}(\Omega;X)$ で表わし，次のノルムと半ノルムを導入する：

$$\|f\|_{W^m_{p;n-s}(\Omega;X)} \equiv \sum_{|\alpha| \leqq m} \|D^\alpha f\|_{L^{p;n-s}(\Omega;X)},$$

$$|f|_{W^m_{p;n-s}(\Omega;X)} \equiv \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha f\|_{L^{p;n-s}(\Omega;X)}.$$

$j > 0$ を整数とし，$0 < \tau < j$, $1 \leqq \xi \leqq +\infty$ とする．

$$|f|_{B^{m+\tau, j}_{p,\xi;n-s}(\Omega;X)} \equiv \sup_{x'', y'' \in \mathbb{R}^{n-s}} \sum_{|\alpha| = m} \left\| \{ \| \Delta^j_y D^\alpha f(x) \|_{L^p(\Omega'_{j,y}(x''); X)} \} |y|^{-\tau} \right\|_{L^\xi(\mathbb{R}^s, |y|^{-s} dy)}$$

が有限となる $W^m_{p;n-s}(\Omega;X)$ の関数の全体を $B^{m+\tau, j}_{p,\xi;n-s}(\Omega;X)$ で示す．ただし，$\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(y)$．$\Delta^j_y$ は j 階差分．$\Omega_{j,y} = \bigcap_{\nu=0}^{j} (\Omega - \nu y)$．$n = s$ のとき添字 $n-s$ を省く．$0 < \tau < 1 = j$ のときと，$\tau = 1$, $j = 2$ のときが大切であって，そのときは添字 j を省く．定理2によると，

$$B^{\mu}_{p,\xi}(\Omega;X) = B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X), \quad m+\tau=\mu, \quad 0<\tau<j.$$

である．

$S(p,\sigma,X;q,\tau,Y)$: Lions-Peetre[5]の意味の中補間空間．

$(X,Y)_{\theta,p} \equiv S(p,\theta,X;p,\theta-1,Y)$．（Peetreのたとえ）

§2．積分表示と近似定理．

まず，我々の基本手段である積分表示を示し，これから近似定理を導く．

<u>Lemma 2.1.</u> $K(x,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} K \subset \mathbb{R}^n \times B$ とする．Ω上の X-値超関数 f に対して，$0<t<T_0$，$x\in\Omega$ のとき

$$(2.1) \quad V(t,x) \equiv \int K(x,z) f(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$
$$\equiv t^{-n}\int K\left(x, \frac{y-x}{t}-\Psi(x)\right) f(y)\,dy$$

（最後の積分は超関数 f の $C_0^\infty(\Omega)$-関数に対する値を意味する）

とおくと，$V(t,x)\in C^\infty(\Omega)$，しかも

$$D_x^\alpha V(t,x) = \sum_{|\alpha|\geq j\geq 0} t^{-j} V_{j,\alpha}(t,x),$$

ただし，$V_{j,\alpha}$ は $K_{j,\alpha}$ により (2.1) の形で定義され，

$$K_{0,0}=K, \quad K_{0,\alpha} = \frac{\partial K_{0,\beta}}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k}\frac{\partial K_{0,\beta}}{\partial z_i} \quad \left(\alpha=\beta+e_k \text{ のとき}, \ e_k=(0,\cdots,\overset{k}{1},\cdots,0)\right),$$

$$K_{j,\alpha} = (-1)^j \sum_{|\gamma|=j} \binom{\alpha}{\gamma} D_z^\gamma K_{0,\alpha-\gamma}(x,z), \quad \text{特に } K_{|\alpha|,\alpha} = (-1)^{|\alpha|} D_z^\alpha K.$$

<u>証明.</u> $|\alpha|$ に関する帰納法により容易にわかる.（詳しくは[8]）

Lemma 2.2. $K(x,z)\in \mathcal{B}^{\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supp}K\subset\mathbb{R}^n\times B$

f を Ω 上の X-値超関数とする. $k(x)\equiv\int K(x,z)dz$.

(a) $V(t,x)\to k(x)f(x)\quad(t\to 0)$,

ただし V は (2.1) で定義, 収束は超関数として.

(b) $l>0$ のとき,

$\int_0^T t^{l-1}V(t,x)\,dt$ は超関数として収束,

$\int_0^T t^{l-|\beta|-1}dt\int D_z^{\beta}K(x,z)\,f(x+tz+t\Psi(x))\,dz$ も収束.

(c) $D_x^{\alpha}\left\{\int_0^T t^{l-1}V(t,x)\,dt\right\}=\sum_{|\alpha|\geq j\geq 0}\int_0^T t^{l-j-1}V_{j,\alpha}(t,x)\,dt$,

ただし, $l>0$, $V_{j,\alpha}$ は Lemma 2.1 と同じ.

(d) $$k(x)f(x)=\int_0^T t^{-1}dt\int\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}\{(\Psi_j(x)+z_j)K(x,z)\}f(x+tz+t\Psi(x))\,dz + V(T,x).$$

系. $\omega(z)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supp}\,\omega\subset B$, $\int\omega(z)\,dz=1$,

とし, $\omega_\alpha(x,z)\equiv\frac{1}{\alpha!}(z+\Psi(x))^{\alpha}\omega(z)$, $\omega_m(x,z)\equiv\sum_{|\alpha|<m}D_z^{\alpha}\omega_\alpha(x,z)$.

このとき,

$$\begin{aligned}f(x)&=(-1)^m m\int_0^T t^{m-1}dt\int\sum_{|\alpha|=m}\omega_\alpha(x,z)\,f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz\\&\quad+\int\omega_m(x,z)\,f(x+Tz+T\Psi(x))\,dz,\\&=(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}\int_0^T t^{m-1}dt\int K_\alpha(x,z)\,f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz\\&\quad+\int\omega_{m+j}(x,z)\,f(x+Tz+T\Psi(x))\,dz,\end{aligned}$$

ただし, $K_\alpha(x,z)\equiv(m+j)\sum_{|\gamma|=j}\binom{m+j}{j}^{-1}\binom{\alpha+\gamma}{\gamma}D_z^{\gamma}\omega_{\alpha+\gamma}(x,z)$, $f^{(\alpha)}=D^{\alpha}f$.

$$f^{(\beta)}(x) = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \int t^{m-|\beta|-1} dt \int K_{j,\alpha,\beta}(x,z) f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x)) dz$$
$$+ T^{-|\beta|} \int \omega_{m+j,\beta}(x,z) f(x+Tz+T\Psi(x)) dz, \quad (|\beta| \leqq m)$$

ただし, $\{c_{\beta,\alpha,\gamma}\}_{|\gamma|=j,\ |\alpha|=m}$ を, $\tilde{\alpha} \geqq \beta$, $|\tilde{\alpha}| = m+j$ を固定したとき, $\sum_{\alpha+\gamma=\tilde{\alpha}} c_{\beta,\alpha,\gamma} = 1$ にとり

$$K_{j,\alpha,\beta}(x,z) \equiv (-1)^{|\beta|} (m+j-|\beta|) \sum_{\substack{|\gamma|=j \\ \alpha+\gamma \geqq \beta}} c_{\beta,\alpha,\gamma} D_z^{\gamma} \omega_{\alpha+\gamma-\beta}(x,z),$$

$$\omega_{m+j,\beta} = (-1)^{|\beta|} \sum_{|\alpha| < m+j-|\beta|} D_z^{\alpha+\beta} \omega_\alpha(x,z).$$

$f \in C^m(\Omega; X)$ のときこれらの等式は関数として成立.

<u>証明.</u> (a). $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ とする. $1_x \equiv$ (x変数に関する1).

$$\int \varphi(x) V(t,x) dx = \left\langle f(y) \otimes 1_x,\ t^{-n} K\left(x, \frac{y-x}{t} - \Psi(x)\right) \varphi(x) \right\rangle$$
$$= \left\langle f(y),\ t^{-n} \int \varphi(x) K\left(x, \frac{y-x}{t} - \Psi(x)\right) dx \right\rangle,$$

(超関数に対するFubiniの定理)

ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は超関数と関数のdualityを示す.

$$\psi_t \equiv t^{-n} \int \varphi(x) K\left(x, \frac{y-x}{t} - \Psi(x)\right) dx$$

とおくと, $0 < t \leqq t_0$ のとき, $\operatorname{supp} \psi_t \subset M_{t_0} \equiv \bigcup_{x \in \operatorname{supp}\varphi} C_{x,t_0}$,

$C_{x,t_0} \equiv \{y;\ y = x + tz + t\Psi(x),\ 0 < t \leqq t_0,\ z \in B\}$.

M_{t_0} は compact $\subset \Omega$. t_0 を十分小にとると, $0 < t \leqq t_0$ のとき, $\frac{y-x}{t} - \Psi(x) = u$ と変換すると, $x = y - tu - t\Phi(t, y-tu)$ となり, $\partial(u_1, \cdots u_n)/\partial(x_1, \cdots x_n) = t^{-n}(1 + O(t))$, このことから $\mathcal{D}$ の収束の意味で $\psi_t(y) \to k(y)\varphi(y)$ $(t \to 0)$ を得る.

(b). (a)と同様にして，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，

$$\int \left(\int_\varepsilon^T t^{l-1} V(t,x)\,dt\right) \varphi(x)\,dx = \langle f(y), \psi_\varepsilon(y) \rangle,$$

$$\psi_\varepsilon(y) \equiv \int_\varepsilon^T t^{l-n-1}\,dt \int K\left(x, \frac{y-x}{t} - \Psi(x)\right) \varphi(x)\,dx.$$

$\frac{y-x}{t} - \Psi(x) = u$ $(0 < t \leqq t_0,\ t_0$ 十分小) と変換すれば，$\psi_\varepsilon(y)$ $\to \psi(y)$ (一様) がわかる．公式

$$\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y_j} = \int_\varepsilon^T t^{l-n-1}\,dt \left\{ \int K\left(x, \frac{y-x}{t} - \Psi(x)\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\,dx \right.$$
$$\left. + \int \left(\frac{\partial K}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial K}{\partial z_k} \right)\left(x, \frac{y-x}{t} - \Psi(x)\right) \varphi(x)\,dx \right.$$

に注目すれば，$\psi_\varepsilon \to \psi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ を得る．

(b) の第二の結論は部分積分により第一の結果に帰する．

(c). $\varepsilon \leqq t \leqq T$ での積分を Lemma 2.1 により微分して，$\varepsilon \to 0$ とすればよい．(b) により (c) の右辺は収束する．

(d). $$\frac{\partial}{\partial t} V(t,x) = \int \sum_{j=1}^n (z_j + \Psi_j(x)) \overbrace{K(x,z)}\, f_j(x + tz + t\Psi(x))\,dz$$
$$= -t^{-1} \int \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \{(z_j + \Psi_j(x)) K(x,z)\} f(x + tz + t\Psi(x))\,dz$$

と (a) による．ただし $f_j \equiv \partial f / \partial x_j$．

<u>系の証明</u>．$\frac{\partial}{\partial z_j}\{(z_j + \Psi_j(x)) D_z^\alpha K(x,z)\} = D_z^{\alpha+e_j}\{(z_j + \Psi_j(x)) K(x,z)\}$ $- \alpha_j D_z^\alpha K(x,z)$ $(e_j = (0, \cdots, \overset{j}{1}, \cdots, 0))$ に注意すると，

$$m \sum_{|\alpha|=m} D_z^\alpha \omega_\alpha(x,z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \{(z_j + \Psi_j(x))\, \omega_m(x,z)\}.$$

$K=\omega_m$ として (d) を適用して第一の等式を得る. 第二の等式は m を $m+j$ でおきかえ, 部分積分すればわかる. 第三の等式は f に $f^{(\beta)}$ を代入して, 部分積分するとわかる. ///

<u>Lemma 2.3.</u> f, ω_α, ω_m は Lemma 2.2 系と同じとする. $K=\omega_m$ とおき (2.1) により $V_m(t,x)$ を定義する. このとき

$$D^\beta V_m(t,x)=\int \omega_m(x,z)\, f^{(\beta)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$
$$+\sum_{|\beta|-1\geq j\geq 0} t^{m-j}\int \sum_{|\alpha|=m} K_{j,\alpha,\beta}(x,z)\, f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$

第二項は

$$\sum_{|\beta|-1\geq j\geq 0}\ \sum_{|\alpha|=m-k} t^{m-k-j}\int K_{j,\alpha,\beta,k}(x,z)\, f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$
$$\Big(K_{j,\alpha,\beta,k}(x,z)=\sum_{|\gamma|=k} D_z^\gamma H_{j,\alpha,\beta,\gamma}(x,z) \text{ の形} \Big)$$

とも表わせる.

<u>証明</u>. 部分積分により

$$D_j V_m(t,x)=\int \omega_m(x,z)\, f_j(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$
$$+(-1)^m \sum_{|\beta|=m-1}\ \sum_{k=1}^{n} t^m \int \frac{\partial \Psi_k(x)}{\partial x_j}\,\omega_\beta(x,z)\, f^{(\beta+e_k)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$

が示され, これに Lemma 2.1 を適用すれば, $|\beta|$ に関する帰納法により証明が終る. 後半は部分積分による. ///

<u>Lemma 2.4.</u> $H_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $|\alpha|=j-1$, $\operatorname{supp} H_\alpha\subset\mathbb{R}^n\times B$

$\int H_\alpha(x,z)\,dz=0$, $K(x,z)=\sum_{|\alpha|=j-1} D_z^\alpha H_\alpha(x,z)$ とする.

このとき次の性質をもつ $C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ の関数 $\tilde{K}(x,z,w)$ が存在する.

$$\operatorname{supp}\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n \times B \times (2j-1)B,$$

$$V(t,x) \equiv \int K(x,z) f(x+tz+t\Psi(x))\,dz,$$
$$= \iint \tilde{K}(x,z,w)\,\Delta^j_{(t/j)(w-z)} f(x+tz+t\Psi(x))\,dz\,dw.$$

さらに，Kが$\Omega\times\mathbb{R}^n$でその導関数も含めて有界ならば，$\tilde{K}$も$\Omega\times\mathbb{R}^{2n}$で同様な性質をもつ。ただし，$\Psi$を$(2j-1)\Psi$でおきかえる。

証明．略（[8]を参照）。

Lemma 2.5. $0<\tau<j$, $0<\sigma<i$ のとき，$\tau>\sigma$ ならば $B^{\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X) \subset B^{\sigma,i}_{p,\xi}(\Omega;X)$．埋めこみは連続．

定理1．（近似定理）．$1\leqq p<\infty$とする．Ωの近傍でC^∞の関数全体を$C^\infty(\bar{\Omega};X)$で表わす．

$C^\infty(\bar{\Omega};X)\cap W^m_p(\Omega;X)$ は $W^m_p(\Omega;X)$ で稠密．

$C^\infty(\bar{\Omega};X)\cap B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)$ は $B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)$ で稠密．

証明. Lemma 2.2 系のω_mをKとして(2.1)に代入して，$V_m(t,x)$を定義する．$\eta>1$をとりΨを$\eta\Psi$でおきかえる．$V_m(t,x)\in C^\infty(\bar{\Omega};X)$である．なんとなれば，任意の$x_0\in\partial\Omega$, $|x-x_0|<\delta$とする．$\exists x_1\in\Omega$; $|x-x_1|<\delta$である．

$x+tB+t\Psi(x)\subset x_1+tB+(L\delta t+\delta)B+t\Psi(x_1)\subset\Omega$．

ただし，LはΨのLipschitz定数とし，δを$\eta\geqq 1+L\delta+\delta/t$にとる．故にこのような$x$で$V_m(t,x)$は定義され$C^\infty$．

さて，$|y|\to 0$のとき $\|f(x+y)-f(x)\|_{L^p(\Omega;X)}\to 0$ が

$f \in L^p(\Omega; X)$ で成立するから，Lemma 2.3 により $f \in W_p^m$ のとき，この空間の収束の意味で $V_m(t,x) \underset{(t\to 0)}{\to} f(x)$ となる.

Besov空間の場合．Lemma 2.1 により $m=0$ の場合を示せばよいことがわかる．$V_{m+j}(t,x) \to f$ を示すのである．$V_j(t,x) \to f$ in L^p は既知であるから，

$$(*) \qquad \int \| \Delta_y^j (V_j(t,x) - f(x)) \|_{L^p(\Omega_{j,y};X)}^{\xi} \frac{dy}{|y|^{n+\tau\xi}} \to 0$$

を示せばよい．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をえらび，

$$\int_{|y| \leqq \delta} \| \Delta_y^j f(x) \|_{L^p(\Omega_{j,y})}^{\xi} \frac{dy}{|y|^{n+\tau\xi}} < \varepsilon$$

である．Lemma 2.5 により $f \in B_{p,\xi}^{\sigma,1}(\Omega; X)$ $(0<\sigma<\tau, 1)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\| \Delta_y^j (V_j(t,x) - f(x)) \|_{L^p(\Omega_{j,y};X)} &\leqq 2^j \| V_j(t,x) - f(x) \|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leqq C_1 \int_{bB} F_1(tz)\,dz \qquad (b = \sup_x |\Psi(x)| + 1) \\
&\leqq C_2 t^{\sigma} | f |_{B_{p,\xi}^{\sigma,1}(\Omega;X)}
\end{aligned}$$

故に $(*)$ の左辺の $|y| \geqq \delta$ における積分は

$$C_3^{\xi} \delta^{-\tau} t^{\sigma\xi} | f |_{B_{p,\xi}^{\sigma,1}(\Omega;X)}^{\xi}$$

で評価され $t \to 0$ で 0 に近づく．$|y| \leqq \delta$ の部分を考える．V_j の定義から，$B_i \equiv (B - \Psi(x+jy)) \cup \cdots \cup (B - \Psi(x+iy))$ とおくとき，公式，

$$\Delta_y^j(f\cdot g)(x) = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\Delta_y^{j-i}f(x+iy)\cdot\Delta_y^i g(x)$$

により

$$\|\Delta_y^j V_j(t,x)\|_X \leqq C_1\sum_{i=0}^{j}\int_{B_i}\|\Delta_y^i f(x+tz)\|_X dz\cdot|y|^{j-i}$$

また,
$$\left\|\int_{B_i}\|\Delta_y^i f(x+tz)\|_X dz\right\|_{L^p(\Omega_{j,y})} \leqq (j-i)ab^n F_i(y)$$

ただし $F_j(y) \equiv \|\Delta_y^j f(x)\|_{L^p(\Omega_{j,y};X)}$

であるから

$$\|\Delta_y^j V_j(t,x)\|_{L^p(\Omega_{j,y};X)} \leqq C_2\sum_{i=0}^{j}|y|^{j-i}F_i(y)$$

$i=0$ の項のξ乗の $|y|\leqq\delta$ での積分は明らかに $O(\delta^{(j-\tau)\xi})$.

$j>i\geqq 1$ とする. $i>\sigma>\tau-j+i$ に σ をとる.

$$\int_{|y|\leqq\delta}\{|y|^{j-i-\tau}F_i(y)\}^\xi|y|^{-n}dy \leqq |f|^\xi_{B^{\sigma,i}_{p,\xi}}\cdot\delta^{(j-i+\sigma-\tau)\xi}$$

$$(\because\ f\in B^{\sigma,i}_{p,\xi}\quad)$$

$i=j$の項は

$$\int_{|y|\leqq\delta}F_j(y)^\xi|y|^{-\tau\xi-n}dy = o(\delta)\quad(\because\ F_j(y)|y|^{-\tau}\in L^\xi_*)$$

故に, $(*)$の左辺の$|y|\leqq\delta$での積分は $o(\delta)$. ///.

Lemma 2.5 はこの定理の前半および次の節の Lemma 3.3 (B)(i) を使って証明される.

<u>注意</u>. われわれはΩについて円錐条件を仮定していたが, $C^\infty(\overline{\Omega};X)$を$C^\infty(\Omega;X)$とするときには<u>任意の開集合$\Omega$</u>で定理が成立する ([8]定理1.2).

§3. 基本不等式と補間不等式.

補間不等式, 補間定理, 埋蔵定理の基礎になるのは次の不等式である. 準備としてまず

<u>Lemma 3.1.</u> (M_1, μ_1), (M_2, μ_2) を σ-有限測度空間, K を $\mu_1 \times \mu_2$-可測かつ

$$\left\{\int_{M_1} |K(x,y)|^r d\mu_1(x)\right\}^{1/r} \leqq C_1 \quad \text{a.e } y \text{ in } M_2,$$

$$\left\{\int_{M_2} |K(x,y)|^r d\mu_2(x)\right\}^{1/r} \leqq C_2 \quad \text{a.e } x \text{ in } M_1.$$

とする. このとき K を核とする積分作用素は $L^p(M_1;X)$ から $L^q(M_2;X)$ への有界線型作用素であって, そのノルムは $C_1^{1-r/q} C_2^{r/q}$ をこえない. ただし $1/p - 1/q + 1/r = 1$, $1 \leqq p, q, r \leqq \infty$.

<u>系.</u>

$$\int_{M_1} |K(x,y)|\, d\mu_1(x) \leqq C_1 \quad \text{a.e } y \text{ in } M_2,$$

$$\int_{M_2} |K(x,y)|\, d\mu_2(y) \leqq C_2 \quad \text{a.e } x \text{ in } M_1,$$

$$|K(x,y)| \leqq C_3$$

ならば Lemma の結論が $1 \leqq p \leqq q \leqq \infty$ のとき成立する.

次の二つの Lemma が基本不等式である.

<u>Lemma 3.2.</u> $1 \leqq s \leqq n$, $1 \leqq p \leqq q \leqq \infty$, $1 \leqq \xi, \eta \leqq \infty$. $\lambda \equiv n/p - s/q$.

(A). $0 < t$, $T < T_0$, $f \in L^p(\Omega)$ とする.

$$U_0(t,x) \equiv \int_B |f(x + tz + t\Psi(x))|\, dz.$$

以下, C は f, t, T に独立な定数を示す. 次の不等式が成立する.

(i) $\quad \| U_0(t,x) \|_{L^{q;n-s}(\Omega)} \leqq C\, t^{-\lambda} \| f \|_{L^p(\Omega)}.$

(ii) $\left\| \left\{ \int_0^T \left[t^{\ell} U_0(t,x) \right]^{\xi} \frac{dt}{t} \right\}^{1/\xi} \right\|_{L^{q;n-s}(\Omega)} \leqq C T^{\ell-\lambda} \|f\|_{L^p(\Omega)}$

ただし，$\xi \leqq q$，$\ell \geqq \lambda$ かつ (a) $\ell > \lambda$ または (b) $1 < p < q < +\infty$, $\xi < q$.

(iii) $\sup_{x'' \in \mathbb{R}^{n-s}} \left\{ \int_0^T \| t^{\ell} U_0(t,x) \|^{\eta}_{L^q(\Omega'(x''))} \frac{dt}{t} \right\}^{1/\eta} \leqq C T^{\ell-\lambda} \|f\|_{L^p(\Omega)}$,

ただし $\ell \geqq \lambda$，かつ次のいずれかが満されているとする:—

(a) $\ell > \lambda$, (b) $1 < p < q \leqq \infty$, $\eta \geqq p$, (c) $s < n$, $1 < p \leqq \eta \leqq \infty$, (d) $\eta = +\infty$

(iv) $\sup_{x'', y'' \in \mathbb{R}^{n-s}} \left\| \left[\left\| \left\{ \| U_0(t,x) h\left(\frac{|y|}{t}\right)^{k} t^{\ell} |y|^{-\sigma} \|_{L^{\xi}_{*}((0,T])} \right\} \right\|_{L^q(\Omega'(x''))} \right\|_{L^{\eta}(\mathbb{R}^s, |y'|^{-s} dy')}$

$$\leqq C T^{\ell-\sigma-\lambda} \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

ただし，$\xi \leqq q$，$0 < \sigma < k$，$\ell \geqq \sigma + \lambda$，$h(t) = \min(t,1)$ とし，次のいずれかが満されているとする:— (a) $\ell > \sigma + \lambda$; (b) $1 < p < q < \infty$, $\xi \leqq \eta$, $p \leqq \eta$;

(c) $s < n$, $\xi \leqq \eta$, $1 < p \leqq q < \infty$, $p \leqq \eta$; (d) $\eta = +\infty$.

(B). $0 < \tau < j$，$0 < \sigma < k$，$f \in B^{\tau,j}_{p,\xi}(\Omega; X)$ に対して，

$$U_j(t,x) \equiv \int_B dz \int_{(2j-1)B} \| \Delta^j_{(t/j)(w-z)} f(x + tz + t\Psi(x)) \|_X \, dw$$

とおくと，(Ψ を $(2j-1)\Psi$ でおきかえる) 次の不等式が成立する:

(i) $\| U_j(t,x) \|_{L^{q;n-s}(\Omega)} \leqq C_1 t^{-\lambda} \int_{2B} F_j(tz) dz \leqq C t^{\tau-\lambda} |f|_{B^{\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)}$

ただし，$0 < (2j-1)t < T_0$，$F_j(y) \equiv \| \Delta^j_y f(x) \|_{L^p(\Omega_{j,y}; X)}$.

以下 $0 < (2j-1)T < T_0$，C は T, f に独立な定数とする.

(ii) $\left\| \left[\int_0^T \{ t^l v_j(t,x) \}^\eta \frac{dt}{t} \right]^{1/\eta} \right\|_{L^{q;n-s}(\Omega)} \leqq C T^{l+\tau-\lambda} |f|_{B^{\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)}$,

ただし，$l+\tau \geqq \lambda$，$\eta \leqq q$ かつ，(a) $l+\tau > \lambda$ or (b) $p < q < \infty$, $\xi \leqq q$, $\eta < q$

or (c) $\xi \leqq \eta$.

(iii) $\left\{ \int_0^T \| t^l v_j(t,x) \|^\eta_{L^{q;n-s}(\Omega)} \frac{dt}{t} \right\}^{1/\eta} \leqq C T^{l+\tau-\lambda} |f|_{B^{\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)}$,

ただし，$l+\tau \geqq \lambda$ かつ (a) $l+\tau > \lambda$ or (b) $\xi \leqq \eta$.

(iv) $\left\| \left\{ \| v_j(t,x) \|_{L^{q;n-s}(\Omega)} h\left(\frac{|y|}{t}\right)^k |y|^{-\sigma} t^l \right\} \right\|_{L^{\eta,n-s}_*(\mathbb{R}^n; L^r_*([0,T]))}$

$$\leqq C T^{l+\tau-\sigma-\lambda} |f|_{B^{\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)},$$

ただし，(a) $l+\tau > \sigma+\lambda$ or (b) $l+\tau \geqq \sigma+\lambda$，$\xi \leqq \eta$，$r \leqq \eta$.

証明. (A)(i)の証. Ω の外で $f=0$ とおく．$b \equiv \sup |\Psi(x)| + 1$．

$$v_0(t,x) \leqq \int_{bB''} dz'' \int_{bB'} |f(x'+tz', x''+tz'')| \, dz'$$

また

$$\int_{bB'} |f(x'+tz', x''+tz'')| \, dz' \leqq [a' b^s]^{1-1/p} t^{-s/p} g(x''+tz''), \quad \text{(Hölderの不等式)}$$

ただし，$g(x'') = \| f(x', x'') \|_{L^p(\Omega'(x''))}$，$a', a''$ は単位球 B', B'' の体積．

ゆえに

$$\int_{\Omega'(x'')} \left\{ \int_{bB'} |f(x+tz)| \, dz' \right\}^q dx'$$
$$\leqq \left[(a' b^s)^{1-1/p} t^{-s/p} g(x''+tz'') \right]^{q-p} (a' b^s)^{p-1} \int_{\Omega(x'')} \int_{bB'} |f(x'+tz', x''+tz'')|^p dx' dz',$$
$$\leqq [a' b^s]^{q-(q-p)/p} \, t^{q\left(\frac{s}{q}-\frac{s}{p}\right)} \, g(x''+tz'')^q.$$

したがって Jessenの不等式 ($p \leqq q$ のとき $\| \| f(x,y) \|_{L^p_x} \|_{L^q_y} \leqq \| \| f(x,y) \|_{L^q_y} \|_{L^p_x}$) により，

$$(3.2)\quad \|U_0(t,x)\|_{L^q(\Omega'(x''))} \leqq [\alpha' b^s]^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} t^{\frac{s}{q}-\frac{s}{p}} \int_{bB''} g(x''+tz'')\,dz''.$$

これから，Hölderの不等式を使って(i)を得る．

(A) (iii)の証．$l>\lambda$ (or $l>\lambda+\tau$) のとき (ii) (iii) (or (iv)) は (i)より直ちにえられる．故に，$l=\lambda$ (or $l=\lambda+\tau$) として (b) 以下の場合を示せば十分である．(Oklander [11], O'Neil [12], Peetre [14] の方法による．)

(b) $1<p<q\leqq\infty$, $l=\lambda$のとき．$1\leqq p_1<p<p_2\leqq q$, $0<\theta<1$, $1/p=(1-\theta)/p_1+\theta/p_2$ にとる．$f\in L^{(p,\eta)}(\Omega)$ のとき，

$$f(x)=v(t,x)+w(t,x)\quad \text{a.e } t$$

$$t^{\varkappa\theta}v(t,x)\in L^\eta_*(\mathbb{R}^+;L^{p_1}(\Omega)),\ t^{\varkappa\theta-\varkappa}w(t,x)\in L^\eta_*(\mathbb{R}^+;L^{p_2}(\Omega))$$

と表わされる．(i)により

$$\|t^l U_0(t,x)\|_{L^{q;n-s}(\Omega)} \leqq C_1 t^{l-\frac{n}{p_1}+\frac{s}{q}} \|v(t,x)\|_{L^{p_1}(\Omega)} + C_1 t^{l-\frac{n}{p_2}+\frac{s}{q}} \|w(t,x)\|_{L^{p_2}(\Omega)}$$

$\varkappa\equiv -\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}$ とすると，$l-\frac{n}{p_1}+\frac{s}{q}=\varkappa\theta$, $l-\frac{n}{p_2}+\frac{s}{q}=\varkappa(\theta-1)$．故に，

$$\|[\|t^l U_0(t,x)\|_{L^{q;n-s}(\Omega)}]\|_{L^\eta_*([0,T])}$$

$$\leqq C_1\{\|t^{\varkappa\theta}v(t,x)\|_{L^\eta_*(\mathbb{R}^+;L^{p_1}(\Omega))}+\|t^{\varkappa(\theta-1)}w(t,x)\|_{L^\eta_*(\mathbb{R}^+;L^{p_2}(\Omega))}\}.$$

右辺の$\{\cdots\}$の v, wの選び方による inf は const.$\|f\|_{L^{(p,\eta)}}$ で評価され，特に $p\leqq\eta$ ならば $L^{(p,\eta)}\supset L^p$となり(iii)を得る．

(c) $s<n$, $1<p\leqq\eta$, $\lambda=l$ の場合．(3.1)により，

$T<t$ で $U_0(t,x)=0$ とおくとき，

$$\|\{\|U_0(t,x)t^{\ell}\|_{L^q(\Omega'(x''))}\}\|_{L^\eta_*(\mathbb{R}^+)} \leqq C_1\|t^{+\frac{n}{p}-\frac{s}{p}}\int_{bB''} g(x''+tz'')dz''\|_{L^\eta_*(\mathbb{R}^+)}$$

$$= C_1\|\int K\left(\frac{|u''|}{t}\right) g(x''+u'')\frac{du''}{|u''|^{n-s}}\|_{L^\eta_*(\mathbb{R}^+)}$$

ただし，　$K(\zeta)=\zeta^{(1-1/p)(n-s)}$ $(0\leqq\zeta\leqq b)$，その他 $K(\zeta)=0$.

核 $K(|u''|/t)$ の積分作用素に Lemma 3.1 を適用して結論を得る。

(d)：$\eta=+\infty$ のとき (i) より直ちにわかる．

(A)(iii) の証明．(b) $1<p<q<\infty$, $\ell=\lambda$ のときをいう．$T<t$ で $U_0(t,x)=0$ と定め，$u(t,x)\equiv[t^{\ell}U_0(t,x)]^{\xi}$ とおく．x'' を fix しておく．$1-r/q=\theta$ にとる．$\kappa\xi=-\frac{s}{r}$ に κ をきめる．(iii)より
$(r=\max(p,\xi))$

$$\|\{\|t^{\kappa\theta}u(t,x)\|_{L^{r/\xi}(\Omega'(x''))}\}\|_{L^{q/\xi}_*(\mathbb{R}^+)} \leqq \left[C\|f\|_{L^p(\Omega)}\right]^{\xi}$$

$$\|\{\|t^{\kappa(\theta-1)}u(t,x)\|_{L^\infty(\Omega'(x''))}\}\|_{L^{q/\xi}_*(\mathbb{R}^+)} \leqq \left[C\|f\|_{L^p(\Omega)}\right]^{\xi}$$

故に

$$\|\int_0^\infty u(t,x)\frac{dt}{t}\|_{(L^{r/\xi}(\Omega'(x'')),\,L^\infty(\Omega'(x'')))_{\theta,q/\xi}} \leqq \left[C\|f\|_{L^p(\Omega)}\right]^{\xi}$$

$(L^{r/\xi}(\Omega'(x'')),\,L^\infty(\Omega'(x''))_{\theta,q/\xi}=L^{q/\xi}(\Omega'(x''))$ 故 (iii) を得る。

(A)(iv) の証明．$\ell=\sigma+\lambda$，$\xi\leqq\eta$ の場合を考えればよい．$\xi\leqq q$ 故，L^{ξ}_* と L^q とのノルムをとる順序をかえる．核 $\{h(|y|/t)\cdot|y|^{-\sigma}t^{\sigma}\}^{\xi}$ による積分作用素は $L^{\eta/\xi}(\mathbb{R}^+,\frac{dt}{t})\to L^{\eta/\xi}(\mathbb{R}^s,\frac{dy'}{|y|^s})$ の線形，有界作用素，かつそのノルムは y'' に独立な定数で評価できることが Lemma 3.1 によりわかり，(iv) は (iii) に帰する．(B) の証も同様．
（もっとやさしい．）

Lemma 3.2 とLemma 2.1, Lemma 2.4 を組合せて,

Lemma 3.3. $K(x,z)\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\operatorname{supp} K\subset\mathbb{R}^n\times B$ とし, (2.1)により $V(t,x)$ を定義する. $0<\tau<j$, $0<\sigma<i$, $1\leqq s\leqq n$ j, i, s は整数, $1\leqq p\leqq q\leqq\infty$, $1\leqq\xi,\eta\leqq\infty$, $\lambda\equiv n/p-s/q$ とする. k, $m\geqq 0$ を整数とする. $0<t, T<T_0$ にとる.

$$g_{\ell,T}(x)\equiv\int_0^T t^\ell V(t,x)\frac{dt}{t}$$

とする. さらに $K(x,z)=\sum_{|\alpha|=N} D_z^\alpha H_\alpha(x,z)$, $\operatorname{supp}H_\alpha\subset\mathbb{R}^n\times B$, $H_\alpha\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

(A) $f\in W_p^m(\Omega;X)$ ($W_p^0=L^p$ とする), $m\leqq N$ のとき次の不等式成立:—

(i) $|V(t,x)|_{W^k_{q;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+t^{-k})t^{m-\lambda}|f|_{W_p^m(\Omega;X)}$,

(ii) $|V(t,x)|_{B^{k+\sigma,i}_{\xi,\eta;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+t^{-\sigma-k})t^{m-\lambda}|f|_{W_p^m(\Omega;X)}$,

(iii) $|g_{\ell,T}(x)|_{W^k_{q;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+T^k)T^{\ell+m-k-\lambda}|f|_{W_p^m(\Omega;X)}$,

ただし, $\ell+m\geqq k+\lambda$ かつ, (a) $\ell+m>k+\lambda$ or (b) $1<p<q<\infty$.

(iv) $|g_{\ell,T}(x)|_{B^{k+\sigma,i}_{\xi,\eta;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+T^{k+\sigma})T^{\ell+m-k-\sigma-\lambda}|f|_{W_p^m(\Omega)}$,

ただし, $\ell+m\geqq k+\sigma+\lambda$ かつ, 次のいずれか成立;—

(a) $\ell+m>k+\sigma+\lambda$, (b) $1<p<q\leqq\infty$, $p\leqq\eta$, (c) $1<p\leqq\eta\leqq\infty$, $s<n$, (d) $\eta=+\infty$.

(v) $\sup_{x''\in\mathbb{R}^{n-s}}\left\{\int_0^T|t^\ell V(t,x)|^r_{W_q^k(\Omega'(x'');X)}\frac{dt}{t}\right\}^{1/r}\leqq C(1+T^k)T^{\ell+m-k-\lambda}|f|_{W_p^m(\Omega)}$,

ただし，$\ell+m \geqq k+\lambda$ かつ次のいずれかが成立すると仮定する：－

(a) $\ell+m>k+\lambda$; (b) $1<p<q\leqq\infty$, $r\leqq q$; (c) $s<n$, $1<p\leqq r$; (d) $r=+\infty$.

(vi) $$\sup_{x''\in\mathbb{R}^{n-s}}\left\{\int_0^T t^{\ell}|V(t,x)|^r_{B^{k+\sigma,i}_{q,\eta}(\Omega'(x'');X)}\frac{dt}{t}\right\}^{1/r}\leqq C(1+T^{k+\sigma})T^{\ell+m-k-\sigma-\lambda}\cdot|f|_{W^m_p(\Omega)},$$

ただし，$\ell+m\geqq k+\sigma+\lambda$ かつ次のいずれかが成立すると仮定する：－

(a) $\ell+m>k+\sigma+\lambda$; (b) $1<p<q\leqq\infty$, $r\leqq p$; (c) $s<n$, $1<p\leqq r$; (d) $r=+\infty$.

(B) $f\in B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)$, $m+j\leqq N$, $0<T<T_0/(2j-1)$ のとき，次の不等式が成立する：－

(i) $$|V(t,x)|_{W^k_{q;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+t^{-k})t^{m+\tau-\lambda}|f|_{B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)},$$

(ii) $$|V(t,x)|_{B^{k+\sigma}_{q,\eta;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+t^{-k-\sigma})t^{m+\tau-\lambda}|f|_{B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)},$$

(iii) $$|g_{\ell,T}(x)|_{W^k_{q;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+T^k)T^{m+\tau-k-\lambda+\ell}|f|_{B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)},$$

ただし，$m+\tau+\ell\geqq k+\lambda$ とし，次のいずれかを仮定する；－

(a) $m+\tau+\ell>k+\lambda$; (b) $\xi\leqq q<\infty$, $p<q$; (c) $\xi=1$.

(iv) $$|g_{\ell,T}(x)|_{B^{k+\sigma}_{q,\eta;n-s}(\Omega;X)}\leqq C(1+T^{k+\sigma})T^{\ell+m+\tau-k-\sigma-\lambda}|f|_{B^{m+\tau,j}_{p,\xi}(\Omega;X)}$$

ただし，$\ell+m+\tau\geqq k+\sigma+\lambda$ かつ (a) $\ell+m+\tau>k+\sigma+\lambda$ 又 (b) $\xi\leqq\eta$.

(v) $$\left[\int_0^T\left\{t^{\ell}|V(t,x)|_{W^k_{q;n-s}(\Omega;X)}\right\}^r\frac{dt}{t}\right]^{1/r}\leqq C(1+T^k)T^{\ell+m+\tau-k-\lambda}|f|_{B^{m+\tau,j}_{p,\xi}}$$

ただし，$l+m+\tau > k+\lambda$ or $l+m+\tau \geqq k+\lambda$, $\xi \leqq r$ とする.

(vi) $\left\{ \int_0^T |t^l V(t,x)|^r_{B^{k+\sigma, i}_{q\eta; n-s}(\Omega;X)} \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} \leqq C(1+T^{k+\sigma}) T^{l+m+\tau-k-\sigma-\lambda} |f|_{B^{m+\tau, j}_{p,\xi}}$,

ただし，$l+m+\tau > k+\sigma+\lambda$ or $l+m+\tau \geqq \lambda+k+\sigma$, $\xi \leqq \eta$, $r \leqq \eta$ とする.

このLemmaを $n=s$, $p=q$, $\xi=\eta$ の場合に適用し，Lemma 2.2 系の積分表示を使うと次の定理を得る：

<u>定理2.</u> (補間不等式)(A). $f \in W_p^m(\Omega;X)$, $0<T<T_0$ に対して

$$T^k |f|_{W_p^k} \leqq C\{T^m |f|_{W_p^m} + \|f\|_{L^p}\} \quad (0 \leqq k \leqq m \text{ のとき})$$

$$T^{k+\sigma} |f|_{B^{k+\sigma, i}_{p,\eta}} \leqq C(1+T^{\sigma})\{T^m |f|_{W_p^m} + \|f\|_{L^p}\} \quad (0<k+\sigma<m,\ 0<\sigma<i)$$

$$T^m |f|_{B^{(m-k)+k, i}_{p,\infty}} \leqq C(1+T^k)\{T^m |f|_{W_p^m} + \|f\|_{L^p}\} \quad (0<k<i,\ k \leqq m)$$

ただし，m, k, i は整数である.

(B). $f \in B^{m+\tau, j}_{p,\xi}(\Omega;X)$ と $0<T<T_0/(2j-1)$ $(0<\tau<j)$ のとき，

$$T^k |f|_{W_p^k} \leqq C\{T^{m+\tau} |f|_{B^{m+\tau, j}_{p,\xi}} + \|f\|_{L^p}\} \quad (0 \leqq k < m+\tau),$$

$$T^{k+\sigma} |f|_{B^{k+\sigma, i}_{p,\xi}} \leqq C(T^{\sigma}+1)\{T^{m+\tau} |f|_{B^{m+\tau, j}_{p,\xi}} + \|f\|_{L^p}\} \quad (0<k+\sigma \leqq m+\tau),$$

特に $\xi=1$ のとき，

$$T^m |f|_{W_p^m} \leqq C(T^m |f|_{B^{(m-k)+k, j}_{p,1}} + \|f\|_{L^p}) \quad (0<k \leqq m),$$

m, k, j, i は整数である.

ここに C は f, T に独立な定数．$(\Omega;X)$ を省略した．

特に，$\lambda = m+\tau$ とおくと，$B^{m+\tau,\xi}_{p,\xi}(\Omega;X) = B^{\lambda}_{p,\xi}(\Omega;X)$.

$\lambda' > m > \lambda''$ のとき $B^{\lambda'}_{p,\xi}(\Omega;X) \subsetneq W_p^m(\Omega;X) \subsetneq B^{\lambda''}_{p,\xi}(\Omega;X)$,

また，$B^m_{p,1}(\Omega;X) \subsetneq W_p^m(\Omega;X) \subsetneq B^m_{p,\infty}(\Omega;X)$.

§4. 補間定理.

この§では $X, X_0, X_1 \subsetneq \mathfrak{X}$，$\mathfrak{X}$ は Banach 空間とする．

Lemma 3.3 および簡単な計算により，

Lemma 4.1. $0 < T < T_0/3$，$M(x,z) \equiv m \sum_{|\alpha|=m} D_z^{\alpha}\omega_\alpha(x,z)$,

$$u(t,x) \equiv \begin{cases} \int M(x,z) f(x+tz+t\Psi(x))\,dz, & (0<t\le T), \\ m T^m t^{-m} \int \omega_m(x,z) f(x+tz+t\Psi(x))\,dz, & (T<t) \end{cases}$$

このとき，$E: f \mapsto u$ は $L^1(\Omega;\mathfrak{X}) + L^\infty(\Omega;\mathfrak{X}) \equiv \mathfrak{Y} \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathfrak{Y})$

として線形連続，しかも $0<\theta<1$ とするとき，

$$E;\ B^{\theta m}_{p,\xi}(\Omega;X) \to L^{\xi}_{*,-\theta m}(\mathbb{R}^+;L^p(\Omega;X)) \cap L^{\xi}_{*,m(1-\theta)}(\mathbb{R}^+;W_p^m(\Omega;X))$$

が有界，かつ $PE = 1$，ただし，$(Pu)(x) = \int_0^\infty u(t,x)\frac{dt}{t}$.

また，W_p^m を $B^m_{p,\eta}$ におきかえてもよい．

ここで次の記号を使う．測度空間 (M,μ) と可測かつ a.e で正値な $\rho(x)$ に対して，$\rho(x)f(x) \in L^p(M,\mu;X)$ なる μ-強可測関数 f の全体を $L^p{}_\rho(M,\mu;X)$ で示す．$L^p_{*,\sigma}(\mathbb{R}^+;X) \equiv L^p_{t^\sigma}(\mathbb{R}^+,\frac{dt}{t};X)$.

Banach 空間 X, Y に対して Banach 空間 $X \cap Y$ のノルムは $\max\{\|f\|_X, \|f\|_Y\}$，Banach 空間 $X+Y$ のノルムは $\|h\|_{X+Y} =$

$\inf_{f+g=h}\{\|f\|_X+\|g\|_Y\}$ とする.

__Lemma 4.2.__ $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;L^1(\Omega;X)+L^\infty(\Omega;X))$ に対して,

$$(J_\nu u)(x)\equiv\int_{1/\nu}^{T}\frac{dt}{t}\int M(x,z)\,u(t,x+tz+t\Psi(x))\,dz$$
$$+mT^m\int_T^\nu t^{-m-1}dt\int\omega_m(x,z)\,u(t,x+Tz+T\Psi(x))\,dz.$$

このとき, $\{J_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots\cdots}$ は

$L^\xi_{*,-\theta m}(\mathbb{R}^+;L^p(\Omega;X))+L^\xi_{*,-(\theta-1)m}(\mathbb{R}^+;W^m_p(\Omega;X))\to B^{\theta m}_{p,\xi}(\Omega;X)$

の写像として, 線形連続作用素 J に収束し, $u(t,x)=f(x)$ a.e t のとき $Ju=f$. W^m_p を $B^m_{p,\eta}$ におきかえてもよい.

以上の Lemma より直ちに,

__定理3.__ (補間定理) $(L^p(\Omega;X);W^m_p(\Omega;X))_{\theta,\xi}=B^{\theta m}_{p,\xi}(\Omega;X)$.

$(L^p(\Omega;X);B^m_{p,\eta}(\Omega;X))_{\theta,\xi}=B^{\theta m}_{p,\xi}(\Omega;X)$.

この定理は $\Omega=\mathbb{R}^n$ のとき Lions-Peetre[5], $\Omega=$ 有界かつなめらかな境界をもつとき Lions-Magenes が示している.

__系.__ $f\in B^\mu_{p,\xi}(\Omega)$ なるための必要かつ十分条件は任意の $K\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\mathrm{supp}\,K\subset\mathbb{R}^n\times B$, と任意の $|\alpha|>\mu$ について,

$$(*)\quad\left\{\int_0^T\left\|t^{-\mu}\int D_z^\alpha K(x,z)f(x+tz+t\Psi(x))\,dz\right\|^\xi_{L^p(\Omega;X)}\frac{dt}{t}\right\}^{1/\xi}<+\infty$$
$$(0<T<T_0)$$

かつ $f\in L^p(\Omega;X)$. このとき, $m>\mu$ に整数 m をとり $K=\omega_\alpha$ にとったときの $(*)$ の左辺を $|f|_{\alpha,\mu}$ とおくと, $\sum_{|\alpha|=m}|f|_{\alpha,\mu}+\|f\|_{L^p}$ は $B^\mu_{p,\xi}$ ノルムと同値である.

<u>証明</u>. 必要性は Lemma 2.4 と Lemma 3.3 (B) iii) による．十分性を示すため，$\mu < m$ に整数 m をとり，$\mu = m\theta$ とおく．Lemma 4.1 のように $u(t,x)$ を定めると，仮定より，

$$u(t,x) \in L^{\xi}_{*,-\theta m}(\mathbb{R}^+; L^p(\Omega;X)) \cap L^{\xi}_{*,-(\theta-1)m}(\mathbb{R}^+; W_p^m(\Omega;X))$$

がわかる（Lemma 2.1 を使う）．定理 3 より $f \in B^{\mu}_{p,\xi}(\Omega;X)$．この証明により最後にのべた事実も導かれる．

<u>注意</u>. この系に対応する事実は $\Omega=\mathbb{R}^n$, $p=\xi=2$,（Fourier変換で定義）の場合について Hörmander の "Linear Partial Differential Operator" Cor 2.4.1（47ページ）に書いてある．この系は小松彦三郎氏よりお教えいただいた．

定理 4 を示すためには上の二補助定理に加えて，次の補助定理を必要とする．

<u>Lemma. 4.3.</u> $0<\theta<1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $q \geq p$ とする．

(i) $\quad W_p^m(\Omega; X_{\theta,q}) \hookrightarrow (B^m_{p_0,\infty}(\Omega;X_0), B^m_{p_1,\infty}(\Omega;X_1))_{\theta,q}$

ただし，$1 \leq p < \infty$（$X_0=X_1$ のときは $p=\infty$ も含む），$X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$．

(ii) $\quad W_p^m(\Omega; [X_0, X_1]_\theta) \hookrightarrow [B^m_{p_0,\infty}(\Omega;X_0), B^m_{p_1,\infty}(\Omega;X_1)]_\theta$

ただし，$1 \leq p < \infty$（$X_0 = X_1$ のときは $p=\infty$ も含む）．$[\,,\,]_\theta$ は複素補間空間．

<u>証明.</u> $k \equiv n^m + 1$. $\mathcal{Y} \equiv L^1(\Omega;\mathfrak{X}) + L^\infty(\Omega;\mathfrak{X})$. $\{f_\alpha\}_{|\alpha|=m,\,0} \in \mathcal{Y}^k$ のとき，

$$K(\{f_\alpha\}) \equiv \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m m \int_0^T t^{m-1} dt \int \omega_\alpha(x,z) f_\alpha(x+tz+t\Psi(x))\,dz + \int \omega_m(x,z) f_0(x+Tz+T\Psi(x))\,dz \in \mathcal{Y}.$$

このとき Lemma 2.3 (A)(iv) により

$$K : \ [L^p(\Omega;X)]^k \longrightarrow B^m_{p,\infty}(\Omega;X) \quad \text{線形，有界．}$$

これを p_0 と p_1 の間で補間し，作用素：

$$W_p^m \ni f \longmapsto \{D^\alpha f\}_{|\alpha|=m,0} \in (L^p(\Omega;X))^k$$

と結びつけると（Lemma 2.2系によりこれにKを合成すれば injection），結論を得る．ただし，次のLemmaを使う．///.

Lemma 4.4. Mを測度空間，ρ_0，ρ_1を a.e で >0 の可測関数とする．$0<\theta<1$ とし $\rho_\theta \equiv \rho_0^{1-\theta}\rho_1^\theta$．$1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$.

(i) $p\leq q$ のとき $(L^{q_0}_{\rho_0}(M;X_0), L^{q_1}_{\rho_1}(M;X_1))_{\theta,p} \hookrightarrow L^q_{\rho_\theta}(\Omega;X_{\theta,p})$

(ii) $p\geq q$ のとき $(L^{q_0}_{\rho_0}(M;X_0), L^{q_1}_{\rho_1}(M;X_1))_{\theta,p} \supsetneq L^q_{\rho_\theta}(\Omega;X_{\theta,p})$

ただし，Mはσ-有界，$q<\infty$ とする．(iii)でもこれを仮定する．

(iii) $[L^{q_0}_{\rho_0}(M;X_0), L^{q_1}_{\rho_1}(M;X_1)]_\theta = L^q_{\rho_\theta}(M;[X_0,X_1]_\theta)$.

証明. Peetre [13] の定理により

$$(Y_0,Y_1)_{\theta,p} = S(p_0,\theta,Y_0;p_1,\theta-1,Y_1) \quad \left(\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\right)$$

したがって，(i)のとき $p_0\leq q_0$，$p_1\leq q_1$ (ii)のときには，$p_0\geq q_0$，$p_1\geq q_1$ にとる．(i)，(ii)は Lions-Peetre [5] と類似の方法で示される．(iii)は Calderon [2] にある．///

Lemma 4.5.（Grisvard [3] の可換性定理の一般化）．

$\mathfrak{X}\supset X_0, X_1, Y_0, Y_1$．$1\leq p, q_0, q_1\leq\infty$，$0<\sigma_0,\sigma_1<1$ とする．

(A) 連続線形作用素 $E:\mathfrak{X}\to L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathfrak{X})$ が存在して，$E:S_i(X_i,Y_i)_{\sigma_i,q_i}\to W_i = L^{q_i}_{*,\lambda_i\sigma_i}(\mathbb{R}^+;X_i)\cap L^{q_i}_{*,\lambda_i(\sigma_i-1)}(\mathbb{R}^+;Y_i)$ が連続とする．$(i=0,1)$.

しかも $f\in S_0+S_1$ に対して，$PEf=f$ とする．ただし，$\lambda_0,\lambda_1\neq 0$．$0<\theta<1$ として，$\lambda\equiv(1-\theta)\lambda_0+\theta\lambda_1$，$\lambda\sigma\equiv(1-\theta)\lambda_0\sigma_0+\theta\lambda_1\sigma_1$.

$1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$, $X_{\theta,p}\equiv(X_0,X_1)_{\theta,p}$, $X_\theta\equiv[X_0,X_1]_\theta$.

(i) $p\leqq q$ のとき $(S_0,S_1)_{\theta,p}\hookrightarrow(X_{\theta,p},Y_{\theta,p})_{\sigma,q}\equiv S_\theta$

(ii) $[S_0,S_1]_\theta\hookrightarrow(X_\theta,Y_\theta)_{\sigma,q}$

(B). $\mathcal{L}_i\equiv L^{q_i}_{*,\lambda_i\sigma_i}(\mathbb{R}^+;X_i)+L^{q_i}_{*,\lambda_i(\sigma_i-1)}(\mathbb{R}^+;Y_i)$. 線型連続作用素 $J;\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1\to\mathcal{X}$ が存在して, $J;\mathcal{L}_i\to S_i$ $(i=0,1)$ が連続, かつ $u(t)=f$ a.e. t なる u に対して $Ju=f$ とする. このとき,

(i) $p\geqq q$ ならば $(S_0,S_1)_{\theta,p}\supset S_\theta$,

(ii) $[S_0,S_1]_\theta\supset(X_\theta,Y_\theta)_{\sigma,q}$.

<u>証明</u>. 前補助定理と作用素の補間によりわかる. ///

<u>注意</u> $q=\infty$ のときの証明には注意を要する. このときには $q_0=q_1=\infty$. Lemma 4.4 (ii) において $q=\infty$ のときには右辺を可算ヶの値のみをとる関数に限ると成立. また $f\in(X,Y)_{\theta,\infty}$, $\varepsilon>0$ のとき, $f=v(t)+w(t)$ (a.e. t), $e^{\theta t}\|v(t)\|_X$, $e^{(\theta-1)t}\|w(t)\|_Y\leqq(1+\varepsilon)(1-\theta)^{-\theta}\theta^{\theta-1}\|f\|_{(X,Y)_{\theta,\infty}}$ かつ, v,w は可算ヶの値のみとる.

<u>定理4.</u> (Besov 空間の補間). $0<\theta<1$, $\mu_0,\mu_1>0$, $\mu=(1-\theta)\mu_0+\theta\mu_1$
$1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, $1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$, $1\leqq r<\infty$ とする.
$\mathcal{B}_0\equiv B^{\mu_0}_{p_0,q_0}(\Omega;X_0)$, $\mathcal{B}_1\equiv B^{\mu_1}_{p_1,q_1}(\Omega;X_1)$, $X_{\theta,p}\equiv(X_0,X_1)_{\theta,p}$, $X_\theta\equiv[X_0,X_1]_\theta$.

(i) $r\geqq q$ ならば $(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)_{\theta,r}\supset B^\mu_{p,q}(\Omega;X_{\theta,r})$

(ii) $r\leqq q$ ならば $(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)_{\theta,r}\hookrightarrow B^\mu_{p,q}(\Omega;X_{\theta,r})$

(iii) $[\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1]_\theta=B^\mu_{p,q}(\Omega;X_\theta)$

この定理から Gagliardo-Nirenberg の不等式,すなわち,
二つの空間よりの埋蔵定理が直ちに導かれる.

<u>定理4の証明.</u> (i)の証. Lemma 4.2, Lemma 4.3 および Lemma 4.5(B) により, 整数 m を $m>\sigma_0, \sigma_1$ にとるとき,

$$(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta,r} = ((L^{p_0}(\Omega;X_0), B^m_{p_0,\infty}(\Omega;X_0))_{\sigma_0,q_0}, (L^{p_1}(\Omega;X_1), B^m_{p_1,\infty}(\Omega;X_1))_{\sigma_1,q_1})_{\theta,r}$$
$$\supset ((L^{p_0}(\Omega;X_0), L^{p_1}(\Omega;X_1))_{\theta,r}, (B^m_{p_0,\infty}(\Omega;X_0), B^m_{p_1,\infty}(\Omega;X_1))_{\theta,r})_{\sigma,q}$$
$$\supset (L^p(\Omega;X_{\theta,r}), W^m_p(\Omega;X_{\theta,r}))_{\sigma,q} = B^\mu_{p,q}(\Omega;X_{\theta,r}).$$

最後の等式は定理3による. (ただし, $\mu_i=\sigma_i m$ $(i=0,1)$, $\mu=\sigma m$)。

(ii)の証. Lemma 4.1, Lemma 4.5(A) と Lemma 4.4(i) により,

$$(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta,r} \subseteq ((L^{p_0}(\Omega;X_0), L^{p_1}(\Omega;X_1))_{\theta,r}, (W^m_{p_0}(\Omega;X_0), W^m_{p_1}(\Omega;X_1))_{\theta,r})_{\sigma,q}$$
$$\subseteq (L^p(\Omega;X_{\theta,r}), W^m_p(\Omega;X_{\theta,r}))_{\sigma,q} = B^\mu_{p,q}(\Omega;X_{\theta,r}).$$

$(W^m_{p_0}(\Omega;X_0), W^m_{p_1}(\Omega;X_1))_{\theta,r} \subseteq W^m_p(\Omega;X_{\theta,r})$ は Lemma 4.4(i) より容易にわかる. (iii)の証明も同様. ///

この定理は $\Omega=\mathbb{R}^n$ の場合について, (i), (ii) で $r=q$ のとき および (iii) を Grisvard [3] が示している.

<u>注意.</u> 上の証明により, $X_0=X_1$ の場合については Lorentz 空間を使うと補間空間 $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta,r}$ が決定できる.

§5. 埋蔵定理と境界値の存在.

基本不等式と Lemma 2.2 系の積分表示により, 直ちに,

<u>定理5.</u> $1\leq p\leq q\leq\infty$, $1\leq\xi,\eta\leq\infty$, $1\leq s\leq n$ とする. $\lambda\equiv n/p-s/q$. 次の埋蔵作用素が附加条件の下で存在する:—

(i) $W_p^m(\Omega;X) \to W^k_{q;n-s}(\Omega;X)$

(a) $m > k+\lambda$ or (b) $m \geqq k+\lambda$, $1<p<q<\infty$.

(ii) $W_p^m(\Omega;X) \to B^\sigma_{q,\eta;n-s}(\Omega;X)$, $m \geqq \sigma+\lambda$ かつ

(a) $m>\sigma+\lambda$; (b) $1<p<q<\infty$, $p\leqq\eta$; (c) $s<n$, $1<p\leqq\eta$, ; or (d) $\eta=+\infty$

(iii) $B^\tau_{p,\xi}(\Omega;X) \to W^k_{q;n-s}(\Omega;X)$, $\tau \geqq k+\lambda$ かつ

(a) $\tau > k+\lambda$; (b) $\xi \leqq q<\infty$, $p<q$; or (c) $\xi=1$.

(iv) $B^\tau_{p,\xi}(\Omega;X) \to B^\sigma_{q,\eta;n-s}(\Omega;X)$, $\tau \geqq \sigma+\lambda$ かつ

(a) $\tau > \sigma+\lambda$, or (b) $\xi \leqq \eta$.

Il'in [4] は (iii) についてきわめてせまい範囲の Ω について，$p\leqq\xi$, $q\leqq\eta$, $\xi\leqq\eta$ の場合についてのみ証明している．その証明はきわめて長い．

この定理に次の補助定理を組合せると部分空間による切口へのトレースの存在に関する結果を得る．

<u>Lemma 5.1.</u> 任意の $x''\in\mathbb{R}^{n-s}$ に対して，次のトレースが存在する．

$W^m_{p;n-s}(\Omega;X) \to W_p^m(\Omega'(x'');X)$,

$B^\tau_{p,\xi;n-s}(\Omega;X) \to B^\tau_{p,\xi}(\Omega'(x'');X)$,

<u>証明</u> Fubini の定理により容易にわかる． ///

定理1によると Sobolev または Besov 空間において境界まで含めてなめらかな関数が稠密に存在するから，Ω の境界上の点 x_0 をとるとき，$f \mapsto D^\beta f(x_0)$ なる写像が，$m-|\beta|-n/p>0$ のとき $W_p^m(\Omega;X)$ よりの線形連続作用素になることがわかる．

さらにわれわれの方法で "$f \longmapsto D^\beta f(x_0)$ が

$$W_{p_0}^{m_0}(\Omega;X_0)\cap W_{p_1}^{m_1}(\Omega;X_1) \to (X_0, X_1)_{\theta,p} \quad \left(\tfrac{1}{p}=\tfrac{1-\theta}{p_0}+\tfrac{\theta}{p_1}\right)$$

に線形，連続に拡張できる（トレースの定理の一般化）" も容易にわかる。ただし，$0<\theta<1$，$\theta=(|\beta|+n/p_0-m_0)/(m_1-n/p_1-m_0+n/p_0)$，分母は0でないとする。WをBに代えても同様である。

境界の一部分がなめらかなs次元多様体（相対コンパクトとする）をなすとき，その部分へのトレースも同様に論ずることができる。Orlicz空間への埋蔵も容易にわかる。

§6. negative order の Besov 空間.

$\mathcal{D}'(\Omega;X)$ でX-値超関数の空間を示す。

定義. $m\geq 0$，整数とする。

$$W_p^{-m}(\Omega;X)\equiv\{f\in\mathcal{D}'(\Omega;X);\ f=\sum_{|\alpha|\leq m}D^\alpha f_\alpha,\quad f_\alpha\in L^p(\Omega;X)\}$$

$\mu\leq 0$ のとき，$\mu=-m+\tau$，$0<\tau\leq 1$ と表わして，

$$B^{\mu}_{p,\xi}(\Omega;X)\equiv\{f\in\mathcal{D}'(\Omega;X);\ f=\sum_{|\alpha|\leq m}D^\alpha f_\alpha,\quad f_\alpha\in B^{\tau}_{p,\xi}(\Omega;X)\}$$

$B^0_{p,\xi}(\mathbb{R}^n)$ については Nikolsky-Lions-Lizorkin [10] が論じている。

Lemma 6.1. $j, m\geq 0$，整数を固定すると，$\{K_\alpha(x,z)\}_{|\alpha|\leq m}$ を次の条件をみたすように作れる；まず $K_\alpha\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$，$K_\alpha$ の台は $\mathbb{R}^n\times B$ に含まれ，K_α は z についての j 階偏導関数の和であって，

$$f_\alpha(x)\equiv\int_0^T t^{m-1}dt\int K_\alpha(x,z)f(x+tz+t\Psi(x))\,dz \quad (m\geq|\alpha|>0)$$

$$f_0(x)\equiv\int_0^T t^{m-1}dt\int K_0(x,z)f(x+tz+t\Psi(x))\,dz+\int\omega_{m+j}(x,z)f(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$

とおくと，$f(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha \cdot (-1)^{|\alpha|}$が任意の$f\in \mathcal{D}'(\Omega : X)$で成立.

証明. Lemma 2.2 系 により

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=m}\int_0^T t^{-1} dt \int D_z^\alpha K_\alpha(x,z)\, f(x+tz+t\Psi(x)) + g_T(x),$$

ここに，$g_T(x) = \int \omega_{m+j}(x,z) f(x+Tz+T\Psi(x))dz$.

Lemma 2.1 を使って 導関数を計算すると，($|\alpha|=m$についてはこのK_αをとる).

$$f(x) - (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha f_\alpha = \int_0^T dt \int \sum_{|\beta|=m-1} D_z^\beta \Big\{ (-1)^{m-1} \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha\geq\beta}} \binom{\alpha}{\beta} K_{\alpha,\alpha-\beta}(x,z) \Big\} f(x+\cdots)dz$$

$$+ \cdots\cdots \quad + g_T(x)$$

（$K_{\alpha,0,\gamma}$ を $K_{\alpha,\gamma}$ とかいた）

そこで $|\beta| = m-1$ のとき，$K_\beta(x,z) = (-1)^{m-1} \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha\geq\beta}} \binom{\alpha}{\beta} K_{\alpha,\alpha-\beta}(x,z)$

とおく.

$$f(x) - (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha f_\alpha - (-1)^{m-1} \sum_{|\beta|=m-1} D^\beta f_\beta = \int_0^T \cancel{t}\, dt \sum_{|\gamma|=m-1} \int D_z^\gamma K_\gamma(x,z) f(\cdots)dz$$

$$+ \cdots\cdots$$

となり 以下次々と K_αがきまる. 作り方から$\{K_\alpha\}$はLemma の条件をみたす. ///.

Lemma 6.2. μ：実数，$m\geq 0$ 整数とする.

$$f\in B^\mu_{p,q}(\Omega;X) \iff f = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in B^{m+\mu}_{p,q}(\Omega;X).$$

証明. $\Leftarrow$ は埋蔵定理と定義より明白. $\Rightarrow$を示す. $m=1$ のときをいえば十分. $\mu<j$ に $j\geq 0$,整数をとり，Lemma 6.1 の $\{K_\alpha\}_{|\alpha|\leq 1}$を作る. ($m=1$である). (a) $\mu>0$ のとき，Lemma 3.3 (B) (iv) により，$f_\alpha\in B^{1+\mu}_{p,q}(\Omega;X)$ となる. $0\geq\mu>-1$ のときは定義である. $\mu<-1$のとき，$\mu = -k+\tau$, $0<\tau\leq 1$,

$k \geqq 0$, 整数とする。$f = \sum_{|\beta| \leqq k} D^\beta g_\beta$, $g_\beta \in B^\tau_{p,q}$ (定義)である。既に証明したことから $g_\beta = \sum_{|\alpha| \leqq 1} D^\alpha g_{\beta,\alpha}$, $g_{\beta\alpha} \in B^{1+\tau}_{p,q}$ と表わされる。$f_\alpha \equiv \sum_{|\beta| \leqq k} D^\beta g_{\beta\alpha}$ とおくと、Lemma の(⇐)の部分により、$f_\alpha \in B^{\mu+1}_{p,q}$ かつ作り方から $f = \sum_{|\alpha| \leqq 1} D^\alpha f_\alpha$。 ///.

このLemmaにより、定理1～5は order を0または負としても成立することがわかる。ただし定理2は

$$T^k |f|_{W^k_p} \leqq C\{T^m |f|_{W^m_p} + (1+T^j)\|f\|_{W^j_p}\} \quad (j \leqq k \leqq m, m \geqq 0)$$

$$T^\sigma |f|_{B^\mu_{p,q}} \leqq C(1+T^\sigma)\{T^\tau |f|_{B^\tau_{p,q}} + (1+T^j)\|f\|_{W^j_p}\} \quad \left(j < \mu \leqq \tau, \tau > 0\right),$$
$$(\mu = k+\sigma \quad 0 < \sigma \leqq 1) \quad \text{など},$$

という形になる。定理3は

$$(W^k_p(\Omega;X), W^l_p(\Omega;X))_{\theta,q} = B^\mu_{p,q}(\Omega;X), \quad \mu = k(1-\theta)+l\theta.$$

$$(B^\sigma_{p,q}(\Omega;X), B^\tau_{p,\eta}(\Omega;X))_{\theta,q} = B^\mu_{p,q}(\Omega;X), \quad \mu = \sigma(1-\theta)+\tau\theta.$$

となる。

$\boxed{\text{補足1}}$ Lemma 3.2 (A)(iii) において、$l=n$, $p=1$, $q=\infty$ のとき、$\inf_x |\psi(x)| \geqq c > 0$ ならば不等式が成立する。境界の近傍では $|\psi(x)| \geqq c > 0$ であるから、境界値の存在(§5)をいうときこの事実がつかえる。

$\boxed{\text{補足2}}$ 我々の埋蔵定理は s 次元切口へのトレースの切口の移動に関する連続性の結果を含んでいる。たとえば Sobolev 空間のときには、定理5 (ii) で $\eta = +\infty$ にとればよい。

参考文献

[1] Besov, O.V., Trudy Mat. Inst. Steklov 60 (1961), 42–81.
(= A.M.S. Transl. (2) 40 (1964), 85–126.)

[2] Calderón, A.P., Studia Math. 24 (1964) 113–190.

[3] Grisvard, P., J. Math. Pures Appl. 45 (1966) 143–290.

[4] Il'in V. P., Trudy Mat. Inst. Steklov 66 (1962) 227–363
(= A.M.S. Transl (1969), 91–256. 参照)

[5] Lions, J. L.- Peetre, J., Publ. Math. Inst. HES 19 (1964) 5–68.

[6] Lorentz, G.G., Ann. of Math. 51 (1950) 37–55.

[7] Muramatu, T., Publ. RIMS, 3 (1968), 393–416.

[8] 〃 , 〃 6 (1970), 515–543

[9] 〃 , "On Imbedding Th for Besov Spaces…" (to appear)

[10] Nikolsky, S.M., - J.L. Lions - L.I. Lizorkin, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), 115–161.

[11] Oklander, E. T., Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 49–53.

[12] O'Neil, R., Duke Math. J. 30 (1963) 129–142.

[13] Peetre, J., Ric. di Math. 12 (19) 248–261.

[14] 〃 , Ann. Fourier 16 (1966), 279–317.

[15] Taibleson, M.H., J. Math Mech. 13 (1964), 407–479.