数理解析研究所講究録
136巻 1972年 28-44

ソボレフの不等式の抽象的な取扱いについて

北大 理　吉川　敦

§0　目的

この講演の目的は，つぎの有名な不等式，Hardy-Littlewood-Sobolevの不等式，を証明することである。

(HLS)
$$\left|\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|x-y|^{-n\lambda}f(y)g(x)\,dx\,dy\right|<+\infty,$$

ただし，$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$g\in L^q(\mathbb{R}^n)$，$1<p,q<\infty$，$1/p+1/q>1$，$\lambda=2-1/p-1/q$。

そのために，まずこの不等式の内容を考えてみたい。実際この不等式の内容がわかれば，何をすべきかということは，自ずと見当が付くはずである。定理6.1の形で証明する。

§1　(HLS)の書きかえ．

さて，$L^p(\mathbb{R}^n)$，$1\leqq p\leqq\infty$，における半群

(G)
$$(G(t)f)(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}f(y)\,dy, & t>0\\ f(x), & t=0\end{cases}$$

を考える。(HLS) と (G) とは，密接な関係があるが，それを述べる前に，(G) のよく知られた性質を列挙しよう。

(G1)　$G(t)$ は contraction である：

$$\|G(t)f\|_p \leqq \|f\|_p$$

ただし，$\|\ \|_p$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ の通常のノルム。

(G2)　$G(t)$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ において自己共役な強連続半群をなす

(G3)　$f \geqq 0$ ならば $G(t)f \geqq 0$

(G4)　$G(t)1 = 1$

(G5)　各 $t > 0$ に対し，$G(t)$ は $L^1(\mathbb{R}^n)$ を $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に写し，そのとき

$$\|G(t)f\|_\infty \leqq \text{const}\ t^{-n/2}\ \|f\|_1$$

がなりたつ。

これらは (G) の定義式から直ちに従う。

さらに，(G2) (G1) と補間定理を組合せて用いると，$G(t)$ は，各 $L^p(\mathbb{R}^n)$，$1 < p < \infty$，で，解析的半群 (holomorphic semi-group) をなしていることが，すぐわかる。

　さて，$G(t)$ の生成作用素を $-A$ としよう。(もちろん，$-A_p$ と書くべきであるが，とくに必要のない限り，p はつけない。A が $\mathbb{R}^n$ の Laplacian であることもよく知られている。) すると，$G(t) = e^{-tA}$ と標語的に書かれる。このとき，(HLS)

は，つぎのように書きかえられる。

(*)
$$A^{-\tau} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^{q'}(\mathbb{R}^n)),$$
$$1 < p < q' < \infty, \quad \tau = \frac{n}{2}(1/p - 1/q'), \quad q' = q/(q-1)$$

ただし，

(Δ)
$$A^{-\tau} f = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty t^{\tau-1} G(t) f\, dt,$$

すなわち，$A^{-\tau}$ は，$G(t)$ の負巾である。実際，(G) を用いて計算を実行してみると，

$$A^{-\tau} f = \text{const.} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^\infty t^{\tau-1-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dt \right\} f(y) dy$$
$$= \text{const.} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) |x-y|^{-n(2-1/p-1/q)} dy$$

となる。(*) に，$L^q(\mathbb{R}^n)$ と $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ の双対性を援用すれば，(HLS) が得られる。

§2 (*)の書きかえ

(HLS) に比べて，(*)の方が意味がわかりやすい。そこで，(*)の書きかえを試みる。ところで，このあたりに来ると，問題は抽象化した方が，取扱いやすくなる。そこで，例によって，補間三っ組 $(E, F, \mathcal{E})$ を考える。すなわち，E，F を Hausdorff 線型位相空間 $\mathcal{E}$ に連続に埋込まれた二つの Banach 空間とする。このとき，$\mathcal{E}$ の中で考えることにより，Banach 空間 $E \cap F$，$E+F$ が canonical に定義される。今，A を $E+F$ で定義された(小松の意味で)，非負な線型閉作用素とする。す

なわち，正実数はすべて，$-A$ のレゾルヴェント集合に含まれかつ，$\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|_{E+F\to E+F} \leqq M \ (<\infty)$，$\lambda>0$，がなりたっているとする。そのうえ，$A$ の E，F への制限 A_E，A_F も非負とする。ただし，

$$A_E x = Ax, \quad x\in D(A_E)=\{x\in D(A)\cap E ; Ax\in E\},$$

A_F についても同様。

以上が，われわれの基本的な立場である。もちろん，A_E，A_F に相当するものを先に与えて，A を後から構成するのが，ふつうであって，その場合

$$(\lambda+A_E)^{-1}x = (\lambda+A_F)^{-1}x, \quad x\in E\cap F, \quad \lambda>0,$$

が成立していればよい。また，半群の生成作用素は，一般に非負であるから，この場合には，半群に対応する条件を求めることができる。

さて，こういう状況のもとで，(*)に対応する条件を考える。つぎの命題は自明のようであるが，われわれの証明の手がかりになるものである。

$\boxed{\text{命題 } 2.1.}$ $E=\overline{R(A_E)}=\overline{D(A_E)}$，$F=\overline{R(A_F)}=\overline{D(A_F)}$ とする。このとき，つぎの2条件は同値である。

(2.1) ある $\sigma>0$ に対して，$A^{-\sigma}\in \mathcal{L}(E,F)$；

(2.2) $E\subset R(A^{\sigma})$ かつ $D(A^{\sigma})\subset F$．

ここで，$R(T)$ は作用素 T の値域，$D(T)$ は T の定義域，$\overline{R(T)}$，$\overline{D(T)}$

は，それぞれ（の空間内での）$R(T)$, $D(T)$の閉包をあらわす。またA^αは，非負作用素Aの分数巾である。その正確な定義は次節で述べる。

§3　非負作用素の分数巾

XをBanach空間とし，AをXで定義された非負作用素とする。われわれの目的には，$D(A)$, $R(A)$がXで稠密と仮定しても十分であるから，そう仮定しておく（しかし，これはこの節の本来の内容には必要ではない）。さて，Aの自然数巾A^mは，作用素論的に定義される。$D(A^m)$は，グラフノルムにより，Banach空間になる。われわれの仮定のもとでは，A^mには逆があって，$(A^m)^{-1}$をA^{-m}と定義することができ，かつ，$R(A^m)=D(A^{-m})$となる。この意味で$R(A^m)$もBanach空間である。

非負作用素の分数巾の定義を与えるためには，Xと$D(A^m)$，または，$R(A^m)$との平均空間の性質に通じていることが望ましいが，これは，小松助教授の講演で十分であろうから，ここでは述べない。

以上の注意のもとに，分数巾の定義を与える。

3.1. $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$:　$\sigma > 0$とする。$(X, D(A^m))_{\sigma/m,1} = D(A^\alpha_\sigma)$ $(\sigma < m)$とおき，$x \in D(A^\alpha_\sigma)$に対し，$0 < \mathrm{Re}\,\alpha < \sigma$のとき，

$$A^\alpha_\sigma x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}\int_0^\infty r^{\alpha-1}(A(r+A)^{-1})^m x\,dr$$

と定義する。Aの分数巾A^αは，A^α_σの最小閉拡張として定義される。

3.2　$\mathrm{Re}\,\alpha < 0$：　$\sigma > 0$とする。$(X, R(A^m))_{\sigma/m} = D(A^\alpha_{-\sigma})$ $(\sigma < m)$ とおき，$x \in D(A^\alpha_{-\sigma})$，$0 < -\mathrm{Re}\,\alpha < \sigma$，に対して，

$$A^\alpha_{-\sigma} x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+\alpha)} \int_0^\infty r^{\alpha-1} (r(r+A)^{-1})^m x \, dr$$

と定義する。Aの分数巾A^αは，$A^\alpha_{-\sigma}$の最小閉拡張として定義される。

3.3　$\sigma > 0$，$\tau > 0$とし，$-\tau < \mathrm{Re}\,\alpha < \sigma$とする。$x \in D(A^\sigma) \cap D(A^{-\tau})$に対して，

$$A^\alpha_{\sigma,-\tau} x = \begin{cases} x, & \alpha = 0 \\ -\dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\{ (-1)^m \displaystyle\int_0^N r^{\alpha+m} (r+A)^{-1} A^{-m} x \, dr + \right. \\ \left. + \displaystyle\sum_{k=-m}^{n} (-1)^{k+1} \frac{N^{\alpha-k}}{\alpha-k} A^k x + (-1)^{n+1} \int_N^\infty r^{\alpha-n-1} A (r+A)^{-1} A^n x \, dr \right\} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

ただし，$N > 0$，任意に固定，$\sigma > m$，$\tau > n$とおく。A^α_0を$A^\alpha_{\sigma,-\tau}$の最小閉拡張として定義すると，これは$\mathrm{Re}\,\alpha \gtrless 0$に応じて，3.1，3.2の定義と一致することが知られている。

われわれの議論で後に必要となるのは，$m > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$のとき，$(X, D(A^m))_{\alpha/m,p}$と$D(A^\alpha)$，$(X, R(A^m))_{\alpha/m,p}$と$R(A^\alpha) = D(A^{-\alpha})$の包含関係，および，Aの純虚数巾である。このうち，一般論からわかることは下に述べる。しかし，(HLS)を含む定理を証明するためには，もっと立入った議論が必要なことは，言

うまでもなかろう。そのあたりについては，本節の終りに言及する。

$\boxed{\text{命題3.1.}}$ 作用素論的に，$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$, $\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > 0$。また $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$.

その他，もっと詳しいことが知られているが，いちいち述べない。われわれの議論に支障は起さない程度によい性質をもっていることは幸いである。

$\boxed{\text{命題3.2}}$ $m > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$ とする。このとき，

$$(X, D(A^m))_{\mathrm{Re}\,\alpha/m,1} \subset D(A^\alpha) \subset (X, D(A^m))_{\mathrm{Re}\,\alpha/m,\infty},$$

$$(X, R(A^m))_{\mathrm{Re}\,\alpha/m,1} \subset D(A^{-\alpha}) \subset (X, R(A^m))_{\mathrm{Re}\,\alpha/m,\infty}$$

また，

$$(X, D(A^m))_{\mathrm{Re}\,\alpha/m,p} \supsetneq D(A^\alpha)$$

がある $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ で成立すれば，任意の $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ で成立する。$(X, R(A^m))_{\mathrm{Re}\,\alpha/m,p}$ と $D(A^{-\alpha})$ の関係においても同様である。

$\boxed{\text{命題3.3.}}$ $D(A^\alpha) \subset (X, D(A^m))_{\alpha/m,p}$, $\alpha > 0$, が成立すれば，任意の自然数 k に対し，$m > k$, $p' = p/(p-1)$ とおいて，

$$(X^*, D(A^{*m}))_{k/m,p'} \subset D(A^{*k}) \qquad (p < \infty)$$

がなりたつ。ただし，X^*, A^* は，X, A の双対である。特に X が再帰的ならば，k を任意の正数としてよい。また，一般に，仮定の包含関係を逆にすれば，結論の包含関係も逆になる。$D(A^{-\alpha})$ と $(X, R(A^m))_{\alpha/m,p}$ の関係においても同様。

$\boxed{\text{命題3.4}}$ $A^{ir}\in\mathcal{L}(X,X)$, $r\in\mathbb{R}$, $\|A^{ir}\|_{X\to X}\leqslant C\,e^{|r|}$ ならば,

$$D(A^{\alpha}) = [X, D(A^{m})]_{\alpha/m},\quad 0<\alpha<m,$$

$$R(A^{\alpha}) = [X, R(A^{m})]_{\alpha/m},$$

ただし, 上式はノルムの同値の意味でなりたつ。また, $[\ ,\ ]_{\theta}$ $0<\theta<1$, は複素補間空間である。

さて, §2 の状況に立戻って考える。A, A_E, A_F と非負作用素から与えられているわけであるが, 命題3.4 に類似したものとして, つぎの命題を得ることができる。

$\boxed{\text{命題3.5.}}$ A_E, A_F が 命題3.4のAの仮定をみたすとする。すなわち, A_E, A_F の純虚数巾は, E, Fで有界, かつ, そのノルムは, 指数的に増大するならば,

$$[D(A_E^{\alpha}), D(A_F^{\beta})] = D(A_{\theta}^{\alpha+\beta\theta}),$$

ただし, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $0<\theta<1$, かつ, A_{θ} は A の $[E,F]_{\theta}$ への制限である。$R(A_E^{\alpha})$, $R(A_F^{\beta})$ 等についても同様。

われわれの以下の議論の難点は, 一般に, 作用素の純虚数巾の満足な理論がないということによる。幸い, 具体的に与えられた作用素の場合, 例えば(HLS)はLaplacianに関わるわけであるけれども, Laplacianの場合にはMikhlinの定理を援用すれば, 純虚数巾が有界であり, かつ, ノルムは多項式の増大度をもつことが知られる。その他, 藤原氏や高倉氏の計算例もどこかで, Mikhlin または Marcinkiewicz の定理

を用いている。そして，われわれの場合も実は，Stein によるMikhlinの定理の一般化を用いる。正直の所，このあたりが気持のよくない所以である。私見であるが，純虚数巾の議論は，半空間の正則函数の理論に関係があるようである。しかし，増大度の仮定から，Hardy classの理論等には収容できないと思われる。

§4 class (σ, m, E, F)

さて，§2の状況にもどって考える。われわれの目的は，(HLS)の証明であるから，そのために(σ, m, E, F)というクラスを導入する。

定義4.1. $\sigma > 0$，m自然数とする。$A \in (\sigma, m, E, F)$とは，各$\lambda > 0$に対し，$(\lambda + A)^{-m}$がEをFに写し，かつ，

$$\|(\lambda + A)^{-m}\|_{E \to F} \leqq L \lambda^{\sigma - m}$$

がなりたつことをいう。ここで，A，A_E，A_Fの非負性を仮定する。

ただちにわかることをいくつか述べる。

命題4.1. $A \in (\sigma, m, E, F)$ならば $A \in (\sigma, m+1, E, F)$。逆に，$m > \sigma$なる限り，$A \in (\sigma, m+1, E, F)$ならば $A \in (\sigma, m, E, F)$。

命題4.2. $A \in (\sigma, m, E, F)$ならば，$N(A_E) = \{x \in D(A_E);\ A_E x = 0\} = \{0\}$。

これより，Eが再帰的ならば，Abel型エルゴード定理より

$\overline{R(A_E)} = E$ がわかる。

$\boxed{\text{命題4.3.}}$ $A \in (\sigma, m, E, F)$ とする。$(r+A)^{-m}\overline{R(A_E)} \subset \overline{R(A_F)}$
$(r+A)^{-m}\overline{D(A_E)} \subset \overline{D(A_F)}$ $(r>0)$ である。

今, $G(t)$ を $E+F$ の (C_0) 半群, $G(t)$ の E, F への制限 $G_E(t)$, $G_F(t)$ も, E, F で (C_0) 半群をなしていると仮定する。$G(t)$ の生成作用素を $-A$ として, $G(t)=e^{-tA}$ と記すと, $G_E(t)=e^{-tA_E}$ $G_F(t)=e^{-tA_F}$ となることが容易にわかる。

$\boxed{\text{定義4.2}}$ $\sigma>0$ とする。$G(t)\in S(\sigma, E, F)$ とは, 各 $t>0$ に対し, $G(t)$ は, E を F に有界に写し, かつ,

$$\|G(t)\|_{E\to F} \leqq Kt^{-\sigma}$$

がなりたつことをいう。

$G(t)=e^{-tA}\in S(\sigma, E, F)$ ならば, $A\in(\sigma, m, E, F)$, $\sigma<m$, である。$G(t)$ が"解析的"半群である場合には逆もなりたつ。

§1 で導入された半群 (G) は, 補間定理を用いることにより, $1<p<q<\infty$ に対して,

$$(4.1) \qquad G(t)\in S\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)\right)$$

を満足していることに注意しよう。そして, $G(t)=e^{-tA}$ とすれば, 命題4.2により, 各 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, において, $\overline{R(A_p)} = L^p(\mathbb{R}^n)$ がなりたっていることがわかる。また, $G(t)$ は, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, で解析的であるから, 特に (C_0), したがって, $\overline{D(A_p)} = L^p(\mathbb{R}^n)$ でもある。すなわち, 命題2.1

の仮定は，(G)の生成作用素に関しては満足されている。そこで(HLS)を証明するためには，(2.2) を示せばよいわけである。

§5 二つの埋込み定理

そこで，つぎの定理を示す。

定理 5.1 $A\in(\sigma, m, E, F)$ とする。$k>\sigma/(1-\theta)$ なる整数，$1\leqq p\leqq\infty$，$0<\theta<1$ に対し，

$$(E, D(A_E^k))_{\theta+\sigma/k, p}\subset(F, D(A_F^k))_{\theta, p}$$

がなりたつ。

定理 5.2 $A\in(\sigma, m, E, F)$ とする。このとき，k, p, θ を前定理の如くとれば，

$$(E, R(A_E^k))_{\theta, p}\subset(E+F, R(A^k))_{\theta+\sigma/k, p}$$

がなりたつ。

このうち，定理5.1は，Besov-Nikol'skii 型の埋込み定理の一般化になっている。さて，これらから，§3の結果を用いることにより，つぎの命題の成立がわかる。

命題 5.1. $A\in(\sigma, m, E, F)$ とする。このとき，

$$D(A_E^\alpha)\subset D(A_F^\beta),\quad \mathrm{Re}\,\alpha>\mathrm{Re}\,\beta+\sigma>\sigma;$$

$$R(A_E^\alpha)\subset R(A^\beta),\quad 0<\mathrm{Re}\,\beta<\mathrm{Re}\,\alpha+\sigma.$$

この命題の内容では，(HLS)の証明には不充分であって，実

際，(HLS)は，上の命題で，それぞれ，$Re\,\alpha = Re\,\beta + \sigma$，$Re\,\beta = Re\,\alpha + \sigma$，の場合に対応することが，以下の命題から推察される。

$\boxed{\text{命題5.2.}}$ $\sigma > 0$ とする。つぎの三条件は同値である。

(5.1) $\qquad D(A_E^{\sigma}) \subset F$;

(5.2) $\qquad D(A_E^{\alpha+\sigma}) \subset D(A_F^{\alpha})$ ， $Re\,\alpha > 0$;

(5.3) $\qquad D(A^{\alpha}) \subset F$.

なお，これから $A \in (\sigma, m, E, F)$ ，$\sigma < m$，が従うことを注意しておく。値域に関しては，

$\boxed{\text{命題5.3.}}$ $\sigma > 0$ とする。つぎの三条件は同値である。

(5.4) $\qquad E \subset R(A^{\sigma})$;

(5.5) $\qquad R(A_E) \subset R(A^{1+\sigma})$;

(5.6) $\qquad R(A_E^{\alpha}) \subset R(A^{\alpha+\sigma})$ ， $\forall \alpha > 0$.

さて，われわれが(HLS)を証明する場合，実は命題2.1より，やや強い形を用いる。すなわち，

$\boxed{\text{命題5.4.}}$ $X \supset E$，F なるBanach空間 X を考え，X において A_E，A_F の拡張になる非負作用素 A_X を考える。$X = \overline{R(A_X)} = \overline{D(A_X)}$ とする。$\sigma > 0$ に対し，$D(A_X^{\sigma}) \subset F$，$E \subset R(A_X^{\sigma})$ ならば，$A^{-\sigma} \in \mathcal{L}(E, F)$ である。

証明は簡単で，$A^{-\sigma} \in \mathcal{L}(R(A_X^{\sigma}), D(A_X^{\sigma}))$ と閉グラフ定理を組合せればよい。

§6　一般化されたH.L.S不等式

いずれにせよ，問題は命題5.1が，α，βのもっとも望ましい関係のもとでなりたつ場合を見つけることである。そして，それが例えば，R^nのLaplacianの場合がそうだということが，(HLS)の内容に他ならない。そこで，証明すべきことは，つぎの定理である。

$\boxed{\text{定理6.1}}$　(M, dm)をシグマ有限な正値測度空間とする。今，$\{T_t\}_{t\geq 0}$を線型作用素の族で，M上の函数(L^1+L^∞)をM上の函数に写すものとする。$\{T_t\}$は半群をなし，しかも，$L^2(M, dm)$においては，強連続であるとする。すなわち，$T_tT_s = T_{t+s}$，$t, s>0$，T_0＝恒等作用素，かつ$\|T_tf-f\|_2 \to 0$ $(t\to 0)$とする。さらに，つぎの5条件を仮定する。

(i)　$\|T_tf\|_p \leqq \|f\|_p \qquad 1\leqq p\leqq\infty$.

(ii)　各$t>0$に対し，T_tは自己共役$(L^2$で$)$

(iii)　$f\geqq 0$なら$T_tf\geqq 0$

(iv)　$T_t1 = 1$

(v)　各$t>0$に対し，T_tは$L^1(M, dm)$を$L^\infty(M, dm)$に写し，しかも，ある$\sigma>0$に対して，

$$\|T_tf\|_\infty \leqq Kt^{-\sigma}\|f\|_1$$

これらの仮定のもとで，

$$A^{-\tau}\in\mathcal{L}(L^p(M, dm), L^q(M, dm)),\quad 1<p<q<\infty,$$

ただし、 $\tau = \sigma(1/p - 1/q)$, かつ

(6.1) $$A^{-\tau} f = \Gamma(\tau)^{-1} \int_0^\infty t^{\tau-1} T_t f \, dt.$$

これが(HLS)を含んでいることは、§1の議論を想起すれば、直ちにわかる。

§7 定理6.1の証明.

言い忘れたが、$T_t = e^{-tA}$として、$A^{-\tau}$は(6.1)で定義してもあるいは§3のように定義しても、一致する。そこで、定理6.1を示すためには、つぎの命題を示せばよい。

$\boxed{\text{命題7.1.}}$ $1 < p \leq 2$ とする。$\forall \alpha > 0$ に対し、

$$R(A^\alpha_{p\wedge 2}) \subset (L^p(M, dm) \cap L^2(M, dm), R(A^k_{p\wedge 2}))_{\alpha/k, 2}$$

ただし $A_{p\wedge 2}$ は A の $L^p \cap L^2$ への制限。 $\alpha < k$

$\boxed{\text{命題7.2.}}$ $1 < p \leq 2$ とする。任意の $\alpha > 0$ に対し、

$$D(A_p^\alpha) \subset (L^p(M, dm), D(A_p^k))_{\alpha/k, 2}$$

これらから、何が言えるかというと、命題3.3より、

$\boxed{\text{命題7.3.}}$ $2 \leq p < \infty$ とする。任意の $\alpha > 0$ に対し、

$$(L^2 + L^p, R(A^k_{p\vee 2}))_{\alpha/k, 2} \subset R(A^\alpha_{p\vee 2}),$$

ただし、$A_{p\vee 2}$ は A を $L^2 + L^p$ に拡張したものである(これはできる)。

$\boxed{\text{命題7.4.}}$ $2 \leq p < \infty$ とする。任意の $\alpha > 0$ に対し、

$$(L^p, D(A_p^k))_{\alpha/k} \subset D(A_p^\alpha)$$

定理6.1を証明するためには、もう一つ命題を用意しておく必要がある。

$\boxed{\text{命題7.5}}$ 定理6.1の仮定(i)-(iv)のもとで、T_tの生成作用素を$-A$とするとき、各p, $1<p<\infty$, に対し、A_pの純虚数巾A_p^{ir}は有界で、$\|A_p^{ir}f\|_p \leq M_p e^{\pi|r|}\|f\|_p$をみたす。

命題7.1, 7.2, 7.5の証明を後まわしにして、定理6.1の証明をざっと述べる。まずp, q, Aの対称性から$2 \leq p < q < \infty$について定理を示し、ついで、双対性を用いれば、$1<p<q\leq 2$、組合せれば、一般の場合になる。そこで、まず$p=2$の場合を示す。そのためには、命題2.1, 5.2, 5.3を考慮すれば、

$$D(A_{2\vee q}^{\alpha+\tau'}) \subset D(A_q^{\alpha}), \quad \alpha>0, \quad \tau'=\sigma(1/2-1/q),$$

および、$R(A_2^{\alpha}) \subset R(A_{2\vee q}^{\alpha+\tau'})$を示せばよい。§5の結果から、($T_t$は$\in S(\tau', L^2, L^q)$になるから)、

$$(L^2, R(A_2^k))_{\alpha/k,2} \subset (L^2+L^q, R(A_{2\vee q}^k))_{(\alpha+\tau')/k,2}$$

$$(L^2, D(A_2^k))_{(\alpha+\tau')/k,2} \subset (L^q, D(A_q^k))_{\alpha/k,2}$$

命題7.3, 7.4から、$R(A_2^{\alpha}) \subset R(A_{2\vee q}^{\alpha+\tau'})$, $D(A_2^{\alpha+\tau'}) \subset D(A_q^{\alpha})$
命題5.2から、$D(A_{2\vee q}^{\alpha+\tau'}) \subset D(A_q^{\alpha})$. したがって、命題5.2, 5.3, 2.1を考慮すれば、定理は$p=2<q<\infty$の場合には証明された。さて、$2<p<q<\infty$の場合を取扱うために、$X_\theta = [L^q, L^2+L^q]_\theta$とおき、$A_\theta$を$A$の$X_\theta$への制限とする。まず、命題7.5から$A_\theta^{ir}$を、$X_\theta$の有界作用素として自然に定義さ

れ，類似の評価をみたすことに注意する。さて，$D(A_{2\vee q}^{\alpha+\tau'})\subset D(A_q^{\alpha})$ と $D(A_q^{\alpha})=D(A_q^{\alpha})$ を補間して，A_θ^{ir} に関する今の注意と命題3.5とを用いると，$D(A_\theta^{\alpha+\tau'\theta})\subset D(A_q^{\alpha})$，全く同様にして，$R(A_p^{\alpha})\subset R(A_\theta^{\alpha+\tau'\theta})$ が得られる。ただし，$1/p=\theta/2+(1-\theta)/q$，$0<\theta<1$ である。しかも，$\tau'\theta=\sigma(1/p-1/q)=\tau$ になる。再び，命題5.2, 5.3 を用いれば，$D(A_\theta^{\tau})\subset L^q$，$L^p\subset R(A_\theta^{\tau})$ となることがわかる。そこで，命題5.4 を用いれば，$A^{-\tau}\in\mathcal{L}(L^p,L^q)$，$2\leq p<q<\infty$，である。これから一般の $1<p<q<\infty$ をどう導くかは，この節の冒頭で述べたから，結局，定理6.1 は証明されたことになる。

§8　命題7.1, 7.2, 7.5の証明。

この三命題の証明が残った。いずれも，Stein の結果を用いる。命題7.2 をどう導くかは，Taibleson の論文において，$\mathbb{R}^n$の Laplacian の分数巾の定義域と，平均空間の間の包含関係，すなわち，Bessel potentials と，Lipschitz spaces の間の関係において，Littlewood-Payley 函数が果す役割を，Stein の generalized Littlewood-Payley 函数を用いて，並行した議論を行えばよい。命題7.1は，命題7.2の証明がわかれば，容易である。命題7.5 は，Stein による一般化された Mikhlin の定理を用いればよい。

文献

[1] 小松 彦三郎 Fractional powers of operators I-V, Pacific J. Math. 19 (1966), 285-346, ibid. 21 (1967), 89-111, J. Math. Soc. Japan 21 (1969) 205-220, 221-228; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I A, 17 (1970) ?

[2] Taibleson, M.H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidian n-space, I. J. Math. Mech. 13 (1964), 407-479,

[3] Stein, E.M., Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Payley Theory, Ann. Math. Studies 63, Princeton U.P and the University of Tokyo P., Princeton 1970,

[4] 吉川 敦, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec 1. 15 (1968), 209-251, 17 (1970) 543-558, 559-566 + 未刊行論文

(以上)