数理解析研究所講究録
138 巻 1972 年 135-144

1次元確率微分方程式の解の pathwise uniqueness について

神大理　　中尾愼太郎

1次元確率微分方程式の解の pathwise uniqueness について議論する。$a(x)$ と $b(x)$ を有界で Borel-可測な関数とする。次の1次元確率微分方程式を考えよう：

$$(1) \qquad dx_t = a(x_t)\,dB_t + b(x_t)\,dt .$$

$a(x)$ と $b(x)$ が Lipschitz continuous ならば、解は任意に与えられた Brownian motion 上に構成され、unique であることが K. Ito [1] により示された。$a(x)$ が退化している場合の一意性についての研究は、Skorohod、Girsanov、H. Tanaka、T. Yamada and S. Watanabe [5] 等がある。Girsanov は $a(x)=|x|^\alpha$ $b(x)\equiv 0$ の場合、$\alpha \geq \frac{1}{2}$ ならば pathwise uniqueness が成り立ち、$0<\alpha<\frac{1}{2}$ ならば分布の意味でも一意性が成り立たないことを示した。Skorohod と H. Tanaka により $a(x)$ が α-Hölder continuous ($\alpha > \frac{1}{2}$) ならば pathwise uniqueness が成り立つこ

とが示された。最近 T. Yamada and S. Watanabe [5] は $\alpha=\frac{1}{2}$ を含む形でこの結果を拡張した。

次に $|a(x)|$ が下からある正定数でおさえられている（今後一様に正であると呼ぶことにする）場合については、Feller、Ito、McKean 等の1次元拡散過程に関する仕事により分布の意味では一意性が成り立つことが分かっている。しかし $a(x)=\mathrm{sgn}\,x$、$b(x)=0$、$x_0=0$ ならば $\sigma\{|x_s|;s\leq t\}=\sigma\{B_s;s\leq t\}$ なので、x_t は x_0 と $\{B_s;s\leq t\}$ の可測関数として表わすことは出来ない。もし pathwise uniqueness が成り立てば、x_t は x_0 と $\{B_s;s\leq t\}$ の可測関数として表わすことが出来ることが [5] により示された。$a(x)$ が一様に正の場合の研究としては次のものがある。M. Motoo により $a(x)$ が Lipschitz 連続で一様に正、$b(x)$ が有界可測ならば pathwise uniqueness が成り立つことが示された。$a(x)$ が退化している場合には、$b(x)$ についての何等かの modulus of continuity が必要である。M. Motoo の結果の $a(x)$ についての Lipschitz 連続性は有界変動性でよいことを示すのが目的である。

等式(1)の意味は次の通りです。$(\Omega,\mathcal{F},P;\mathcal{F}_t)$ は確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と $\mathcal{F}$ の sub σ-algebra の増大する族 $\{\mathcal{F}_t\}$ より

成っているとする。

<u>Definition. 1.</u> (1)の解とは、ある$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$とその上で定義された確率過程$\mathcal{X}_t = (x_t, B_t)$で、次の条件をみたすもののことである。

(i) 確率1で$\mathcal{X}_t$はtに関して連続で、$B_0 = 0$、

(ii) $\mathcal{X}_t$は$\{\mathcal{F}_t\}$-adaptedで、B_tは$\{\mathcal{F}_t\}$-Brownian motionである。

(iii) $\mathcal{X}_t$は次の等式をみたす

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s)\,dB_s + \int_0^t b(x_s)\,ds \qquad \text{a.s.}$$

但し右辺第2項の積分は確率積分である。

<u>Definition. 2.</u> 等式(1)についてpathwise uniquenessが成り立つとは、任意の$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$上で定義された任意の2つの解$\mathcal{X}_t = (x_t, B_t)$, $\mathcal{Y}_t = (y_t, B'_t)$で$x_0 = y_0$, $B_t \equiv B'_t$ならば$x_t = y_t$である時、呼ぶことにする。

<u>Lemma.</u> $(M_t, V_t)_{t \in [0,T]}$を確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上で定義された連続な実数値確率過程の対とする。$V_t(\omega)$の$[0,T]$での全変動$\| V(\omega) \|_T$の平均が存在し、M_tがmartingaleで

(i) $M_0 = 0$ a.s.

(ii) 正定数 m_1、m_2 で

(2) $m_1 M_t(\omega) \leqq V_t(\omega) \leqq m_2 M_t(\omega)$ a.s.

for $(t,\omega) \in \{(t,\omega), t \in [0,T] \text{ and } M_t(\omega) \geqq 0\}$

をみたすものが存在するとする。

この時、$M_t = 0$ a.s. for $0 \leqq t \leqq T$ である。

(Proof) $y \in R$ について、$N_1(y,\omega)$ を $V_t(\omega) = y$ なる $t \in [0,T]$ の個数とすると、Banach's theorem (cf. [4] pp. 280) により

(3) $$|||V(\omega)|||_T = \int_{-\infty}^{\infty} N_1(y,\omega)\,dy$$

である。明らかに $m_1 < m_2$ と仮定してよい。$y > 0$ について、$N_2(y,\omega)$ を $M_t(\omega)$ の $[0,T]$ での number of $[\frac{1}{m_2}y, \frac{1}{m_1}y]$ - downcrossings とする。条件(2)により

(4) $N_1(y,\omega) \geqq N_2(y,\omega)$ for $y > 0$

である。$y > 0$ について、次の様に stopping time の列 $\{T_k\}$ を定義する。

$$T_0 = 0$$

$$T_{2n+1} = \inf\{t \geqq T_{2n};\ M_t = \frac{1}{m_1}y\} \wedge T \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$T_{2n+2} = \inf\{t \geqq T_{2n+1};\ M_t = \frac{1}{m_2}y\} \wedge T \quad n=0,1,2,\cdots$$

この時，$n = 1,2,\cdots$ について、次の不等式が成立する。

$$\left(\frac{1}{m_1}y - \frac{1}{m_2}y\right)(N_2(y,\omega)\wedge n + 1)$$
$$\geqq \sum_{k=1}^{n}\{M_{T_{2k-1}}(\omega) - M_{T_{2k}}(\omega)\} + \{(M_T(\omega) - \frac{1}{m_1}y)\vee 0\}\chi_{\{N_2(y,\omega)<n\}}$$

但し χ は定義関数である。平均をとると

$$E[N_2(y)\wedge n] \geqq \frac{E[\{(M_T - \frac{1}{m_1}y)\vee 0\}\chi_{\{N_2(y)<n\}}]}{(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2})y} - 1$$

$n \longrightarrow \infty$ にすると.

(5) $$E[N_2(y)] \geqq \frac{E[(M_T - \frac{1}{m_1}y)\vee 0]}{(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2})y} - 1$$

ここで $P(M_T \neq 0) > 0$ と仮定すると、次の様な $\varepsilon, \delta > 0$ が存在する。

(6) $E[(M_T - \frac{1}{m_1}y)\vee 0] > \varepsilon$ for $0 < y < \delta$

(3) と (4) により

$$\int_0^\delta E[N_2(y)]\,dy \leqq \int_{-\infty}^{\infty} E[N_1(y)]\,dy < \infty$$

(5) と (6) により

$$\int_0^\delta E[N_2(y)]\,dy = \infty$$

これは矛盾である。故に

$P(M_t = 0) = 1$ for $0 \leqq t \leqq T$

Q. E. D.

<u>*Theorem.*</u> $a(x)$、$b(x)$ を有界 Borel－可測関数で、$a(x)$ はすべての有限閉区間で有界変動とする。更に

(7) $$a(x) \geqq c > 0 \qquad \text{for } x \in R$$

をみたす定数 c が存在するとする。この時、等式(1) について pathwise uniqueness が成り立つ。

(Proof) $|a(x)| \leqq M$, $|b(x)| \leqq M$ for $x \in R$ とする。初期分布が point mass の場合に証明出来れば、一般の場合は明らかである。$\mathcal{X}_t = (x_t, B_t)$, $\mathcal{Y}_t = (y_t, B_t)$ を(1) の解で、$x_0 = y_0$ が定数であるものとする。$N > |x_0|$ について

$$\tau_N = \begin{cases} \inf\{t \geqq 0 \ ; \ |x_t| = N\} & \\ \infty & \text{if } \{\ \} = \phi \end{cases}$$

$$\eta_N = \begin{cases} \inf\{t \geqq 0 \ ; \ |y_t| = N\} & \\ \infty & \text{if } \{\ \} = \phi \end{cases}$$

$$\gamma_N = \tau_N \wedge \eta_N$$

と定義する。

$$f(x) = -2\int_0^x \frac{b(y)}{a^2(y)}\,dy, \qquad \varphi(x) = \int_0^x \exp[f(y)]\,dy$$

とおく。time substitution と Cameron－Martin's formula (cf. [3]) により、c, M, N, t だけによる

(8) $$E\left[\int_0^{t\wedge\gamma_N} g(x_s)\,ds\right] \leqq K_1 \|g\|_{L^1([-N,N])} \quad \text{for } g \in L^1([-N,N])$$

をみたす定数 $K_1>0$ が存在する。φ は絶対連続で φ' は局所可積分なので

$$(9)\qquad \varphi(x_{t\wedge\gamma_N})=\varphi(x_0)+\int_0^{t\wedge\gamma_N}\varphi' a(x_s)\,dB_s \qquad \text{a.s.}$$

φ は R から $I=(\varphi(-\infty),\varphi(\infty))$ への同型写像なので

$$\sigma(x)=\varphi' a\circ\varphi^{-1}(x),\qquad h(x)=\int_0^x\frac{1}{\sigma(y)}\,dy \qquad \text{for } x\in I$$

が定義出来る。明らかに σ は I のどの有界閉区間でも有界変動なので、$|||\sigma|||_N$ を σ の $[\varphi(-N),\varphi(N)]$ での全変動とする。

次の様な近似関数列 $\{\sigma_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ を取ることが出来る。

(i) $\sigma_n(x)\in C^1(R)$ and $c\leqq\sigma_n(x)\leqq M$ for $x\in R$

(ii) $\displaystyle\int_{\varphi(-N)}^{\varphi(N)}|\sigma(y)-\sigma_n(y)|\,dy\leqq\frac{1}{n}$ and $\|\sigma_n'\|_{L^1([\varphi(-N),\varphi(N)])}\leqq|||\sigma|||_N$.

$$h_n(x)=\int_0^x\frac{1}{\sigma_n(y)}\,dy \qquad \text{for } x\in R$$

とおくと、$h_n(x)\in C^2(R)$ なので、Ito's formula を h_n に適用すると

$$h_n(\varphi(x_{t\wedge\gamma_N}))=h_n(\varphi(x_0))+\int_0^{t\wedge\gamma_N}\frac{\sigma(\varphi(x_s))}{\sigma_n(\varphi(x_s))}\,dB_s$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\gamma_N}\frac{\sigma_n'(\varphi(x_s))\,\sigma^2(\varphi(x_s))}{\sigma_n^2(\varphi(x_s))}\,ds$$

$$= \tilde{h}_n(\varphi(x_0)) + L_t^n + W_t^n$$

(iii) より

$$|\tilde{h}(x) - \tilde{h}_n(x)| \leqq K_2 \frac{1}{n} \qquad \text{for } x \in [\varphi(-N), \varphi(N)]$$

をみたす c, M, N にしか依らない定数 $K_2 > 0$ が存在するので、$\tilde{h}_n(\varphi(x_{t\wedge\gamma_N}))$ は $\tilde{h}(\varphi(x_{t\wedge\gamma_N}))$ に概収束する。

$$E[(L_t^n - B_{t\wedge\gamma_N})^2] \leqq K_3 \frac{1}{n}$$

をみたす c, M, N, t にしか依らない定数 $K_3 > 0$ が存在するので、L_t^n は $B_{t\wedge\gamma_N}$ に概収束する部分列を持つ。

$$W_t = \tilde{h}(\varphi(x_{t\wedge\gamma_N})) - \tilde{h}(\varphi(x_0)) - B_{t\wedge\gamma_N}$$

とおくと、上のことより W_t^n の部分列が W_t へ概収束する。

$|||W^n|||_t$ を W_s^n の $[0, t]$ での全変動とすると

$$E[|||W^n|||_t] \leqq K_4 \left[\int_0^{t\wedge\gamma_N} |\tau_n'(\varphi(x_s))|\, ds\right]$$

をみたす c, M, N にしか依らない定数 $K_4 > 0$ が存在することが容易にわかる。time substitution により

$$E\left[\int_0^{t\wedge\gamma_N} |\tau_n'(\varphi(x_s))|\, ds\right] \leqq K_5 \|\tau_n'\|_{L^1([\varphi(-N), \varphi(N)])}$$

$$\leqq K_5 |||\tau|||_N$$

をみたす c, M, N, t にしか依らない定数 $K_5 > 0$ が存在する。

従って $|||W|||_t$ を W_s の $[0, t]$ での全変動とすると

$$E[\,|||W|||_t\,] \leqq K_4 K_5 |||\sigma|||_N$$

である。$k(x)$の定義より

$$m_1(x-y) \leqq k(x) - k(y) \leqq m_2(x-y)$$

for $y \leqq x$ and $x, y \in [\varphi(-N), \varphi(N)]$

をみたす正定数 m_1, m_2 が存在する。

$$M_t = \int_0^{t\wedge\gamma_N} (\sigma(\varphi(x_s)) - \sigma(\varphi(y_s)))\, dB_s ,$$

$$V_t = k(\varphi(x_{t\wedge\gamma_N})) - k(\varphi(y_{t\wedge\gamma_N})) ,$$

として Lemma を適用することにより

$$P(\varphi(x_{t\wedge\gamma_N}) = \varphi(y_{t\wedge\gamma_N})) = 1$$

従って

$$P(x_{t\wedge\gamma_N} = y_{t\wedge\gamma_N}) = 1.$$

$\lim_{N\to\infty} \gamma_N = \infty$ a.s. なので、$P(x_t = y_t) = 1$ を得る。

Q. E. D.

<u>Remark.</u> Theorem で、$a(x)$ が連続ならば、(8) を $a(x) > 0$ for $x \in R$ に弱めることが出来る。

References

[1] K. Ito, On a stochastic integral equation, Proc. Japan Acad. 22 (1946), 32–35.

[2] K. Ito and H. P. McKean, Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer-verlag 1965.

[3] H. P. McKean, Jr., Stochastic integrals, Academic Press 1969.

[4] S. Saks, Theory of the integral (Monografje matematyczne, vol. 7), Warsaw, 1937.

[5] T. Yamada and S. Watanabe, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971), 155–167.