数理解析研究所講究録
139巻 1972年 50-65

VORTEX RINGの運動と安定性

東京電機大　高尾 利治
東大宇宙研　神部 勉

§1. はしがき

渦運動の研究は最初にHelmholtzによって始められたといわれ，またvortex ringに関する実験はReusch (1860)によって煙の輪を使って行われたことが記されている．Kelvinが1867年に‘vortex atom論’を提唱すると，vortex filamentについて，さらに詳しい研究がなされた．

その一連の研究の結果，柱状の渦はかなり一般的な微小攪乱に対して中立安定であり（Kelvin [1]），vortex ringについては数種の型の攪乱に対して中立安定であることが示された．また実験もその後Tait (1876), Reynolds (1876)等によって行われている．これらのことに関する文献はLamb [2]に詳しく載っている．

近年になってからは，流れの中におかれた物体の後流と関連してvortex systemの研究が行われた．後節との関連の

ために，そのうちの2つを引用すると，Rosenhead [3] は孤立した直線渦が直線状からわずかに変形したときの運動を議論して，Kelvin [1] と同じ結果を得ている．3次元的物体の後方の流れでは，ある場合に，ら線状の vortex filament が観測されることがある．そこで Levy & Forsdyke [4] は helical vortex の線型安定性を調べ，pitch k（後出）が約0.3より大きいとき安定であることを得ている．

以下§2では曲線渦（line vortex）の運動に関する近似式を導き，§3で典型的な3例について，それが微小変形したときの運動を調べる．§4は実験の概要とそのまとめで，いろいろな形の vortex ring の運動および2コの ring の相互作用について述べ，§5では vortex ring の安定性について要約する．

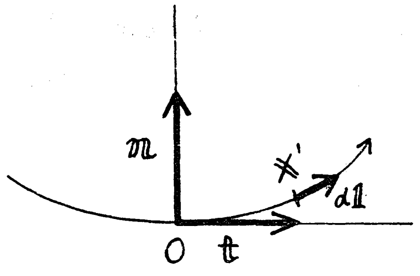
§2. 曲線渦（line vortex）の運動方程式

無限遠で静止している縮まない流体の中に，強さκの渦線があるとき，それによって点$\mathbf{X}$に誘起される速度は

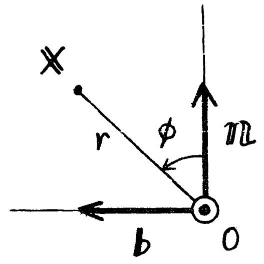
$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = -\frac{\kappa}{4\pi}\int \frac{\mathbf{y} \times d\mathbf{l}(\mathbf{X}')}{y^3} \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} - \mathbf{X}'$$

である．$\mathbf{X}'$は渦線上の点であり，$d\mathbf{l}$は渦の線分である（1図）．



1 図



2 図

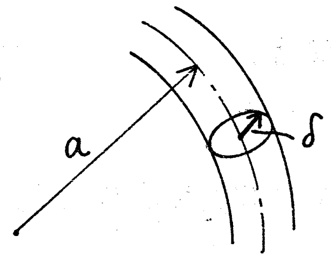
渦線に十分近いところでは（$r \to 0$，2図），

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\kappa}{2\pi r}(\boldsymbol{b}\cos\phi - \boldsymbol{n}\sin\phi) + \boldsymbol{b}\frac{\kappa}{4\pi}c\log\frac{l}{r} + O(r^0) \qquad (2.2)$$

と書ける（Batchelor [5]）．ここでcは点Oでの渦線の曲率であり，lは曲率半径（$a=1/c$）と同程度の長さである．また$\boldsymbol{n}$および$\boldsymbol{b}$は各々O点での渦線の主法線および陪法線方向の単位ベクトルである．

（2.2）式の第1項は渦線のまわりの回転運動を，第2項は陪法線方向の並進運動を表わしている．これによれば，太さゼロの渦線は無限大の速さで前進する．また渦が直線のときには，$c=0$となって静止していることになる．有限であるが十分小さい断面の渦（断面の半径δ）については，渦の表面上の点に着目すると，その並進速度u_tは，近似的に次のように与えられる[6]，

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{b}\, K c, \qquad (2.3)$$
$$K = \frac{\kappa}{4\pi} \log \frac{l}{\delta} .$$



3 図

断面が円形でないときは，変形が大きくないとすると，その影響は対数的であるから，δはたとえば平均半径としてよいだろう．以下では並進速度を考えるときだけ，渦の断面の大きさを考えるが，それ以外は太さゼロの曲線とみなす．

渦線上の点を$\boldsymbol{X}(s,t)$で表わそう．tは時間で，sは渦線上の基準点からの距離である．点$\boldsymbol{X}$での単位接線ベクトルを$\boldsymbol{t}$とすると

$$\boldsymbol{t} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial s}$$

であり，また
$$c\boldsymbol{n} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial s^2}$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$$

がなりたつから，$\boldsymbol{u}_t = \partial \boldsymbol{X}/\partial t$を考慮すると，(2.3)は

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = K \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial s^2} \qquad (2.4)$$

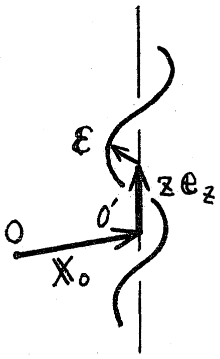
と書ける．δ_0をδの平均値として，$a \gg \delta_0$，$|\delta/\delta_0 - 1| \ll 1$がなりたつとすると，前と同じ理由で$\delta$の変化の影響を無視できる．また長さおよび時間の単位を適当にとると(2.4)は

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial s^2} \qquad (2.5)$$

となる．

§3．微小変形に対する渦線の安定性

3-1　直線渦（rectilinear vortex）



4 図

渦が直線状からわずかに変形しているとき，渦線上の点$\mathbf{X}$を

$$\mathbf{X}(s,t)=\mathbf{X}_0(t)+z\mathbf{e}_z+\boldsymbol{\varepsilon}(s,t) \qquad (3.1)$$

$$(-\infty<z<\infty)$$

と表わそう．$\mathbf{X}_0$は渦線の全体としての運動を表わす項で，$\mathbf{e}_z$はz方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z)$である．これを（2.5）に代入し，$|\boldsymbol{\varepsilon}|\ll 1$として$\varepsilon$について1次の項までとると

$$\dot{\mathbf{X}}_0+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{e}_z\times\boldsymbol{\varepsilon}'' \qquad (3.2)$$

を得る．ここで（$\dot{}$）は$\partial/\partial t$を，（$'$）は$\partial/\partial s$を表わす．εについて0次と1次の項を比較すると，

$$\dot{\mathbf{X}}_0=0,$$

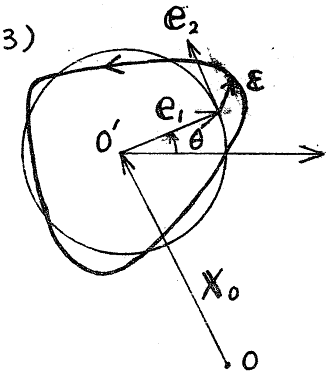
$$\dot{\varepsilon}_x=-\varepsilon_y'', \quad \dot{\varepsilon}_y=\varepsilon_x'', \quad \dot{\varepsilon}_z=0$$

となる．最初の式は直線渦が静止していることを意味し，また$(\varepsilon_x,\varepsilon_y)\propto e^{i(kz-\omega t)}$と仮定すると，$\omega=\pm k^2$となって，変形が中立安定であることがわかる．これらの結果はKelvin[1], Rosenhead[3], Hama[8]と一致している．

3-2 円渦(circular vortex)

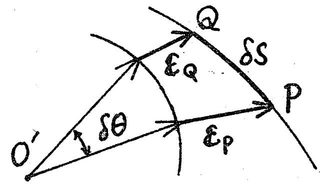
渦が半径1の円からわずかにずれているとして

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_0(t) + \mathbb{e}_1 + \varepsilon \qquad (3.3)$$



5図

と表わす．ベクトル成分は円柱座標(r,θ,z)で表わし，その各方向の単位ベクトルを$(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3)$，また$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$とし，渦は$\theta$の増す方向を向いているとする(5図)．6図のPQ間の距離をδsとすると



6図

$$\delta s = |\delta \mathbb{X}|_{t=\mathrm{const.}} = (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2')\,\delta\theta,$$

ただし$(')=\partial/\partial\theta$．これによって変数$s$の代りに$\theta$を使う．(3.3)を(2.5)に代入し，$O(\varepsilon)$までを残すと次のようになる，

$$\dot{\mathbb{X}}_0 + \dot{\varepsilon} = (1-3\varepsilon_1-3\varepsilon_2')\mathbb{e}_3 + \mathbb{e}_1\times\varepsilon' + \mathbb{e}_2\times\varepsilon''. \qquad (3.4)$$

$O(\varepsilon^0)$の項からは，$\dot{\mathbb{X}}_0=\mathbb{e}_3$が得られ，これは円渦が$\mathbb{e}_3$方向に速度1で進むことを意味する．$O(\varepsilon^1)$の項からは

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_3'' \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\varepsilon_3' \\ \dot{\varepsilon}_3 &= -\varepsilon_1''-\varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \ddot{\varepsilon}_3 = -\varepsilon_3'''' - \varepsilon_3''$$

となる．$\varepsilon_3 \propto e^{i(n\theta-\omega t)}$ (nは整数)とすると

$$\omega^2 = n^2(n^2-1)$$

を得る．ωは実数となるから，circular vortex は中立安定である．$n=0, 1$ のときは $\omega=0$ で，単なる並進運動を表わしている．$n \geq 2$ のとき，次のような standing wave 型の解が得られる，

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cos n\theta \cos \omega t, \\ \varepsilon_2 = -\frac{1}{n}\varepsilon_0 \sin n\theta \cos \omega t, \\ \varepsilon_3 = \frac{\omega}{n^2}\varepsilon_0 \cos n\theta \sin \omega t. \end{cases}$$

これによると，$\theta=0$ では $\varepsilon_2=0$，$\varepsilon_1^2+\varepsilon_3^2/(\frac{\omega}{n^2})^2=\varepsilon_0^2$ となって楕円運動し，$\theta=\pi/2n$ では $\varepsilon_1=\varepsilon_3=0$，$\varepsilon_2=-\frac{\varepsilon_0}{n}\cos \omega t$ となって円周上を往復運動する．この型の運動の特徴を表わした図が，$n=2, 3$ について，10，11 図に示されている．

3-3 ら線渦（helical vortex）

ら線からのわずかな変形を $\mathbb{E}$ として

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_0(t) + \mathbb{X}_h(\theta, t) + \mathbb{E}(\theta, t) \qquad (3.5)$$

とおく．$\mathbb{X}_h$はら線の形を与えるもので，pitch を k とすれば

$$\mathbb{X}_h = \mathbb{e}_1 + k\theta\, \mathbb{e}_3$$

とかける，座標系は 3-2 と同じである．(3.5) を (2.5) に代入し，$O(\varepsilon^2)$ を省略すると，次のようになる，

$$\dot{\mathbb{X}}_0 + \dot{\mathbb{E}} = \frac{1-3\lambda}{K^3}(\mathbb{e}_3 - k\mathbb{e}_2) + \frac{1}{K^3}\mathbb{e}_1 \times \mathbb{E}' + \frac{1}{K^3}(\mathbb{e}_2 + k\mathbb{e}_3) \times \mathbb{E}''. \qquad (3.6)$$

ただし $K=\sqrt{1+k^2}$, $\lambda=(\varepsilon_1+\varepsilon_2'+k\varepsilon_3')/K^2$. $O(\varepsilon^0)$の項から $\mathbb{X}_0=(\mathbb{e}_3-k\mathbb{e}_2)/K^3$ が得られ，ら線渦が $-\mathbb{e}_2$ の方向に回転しながら $\mathbb{e}_3$ 方向に前進することがわかる．

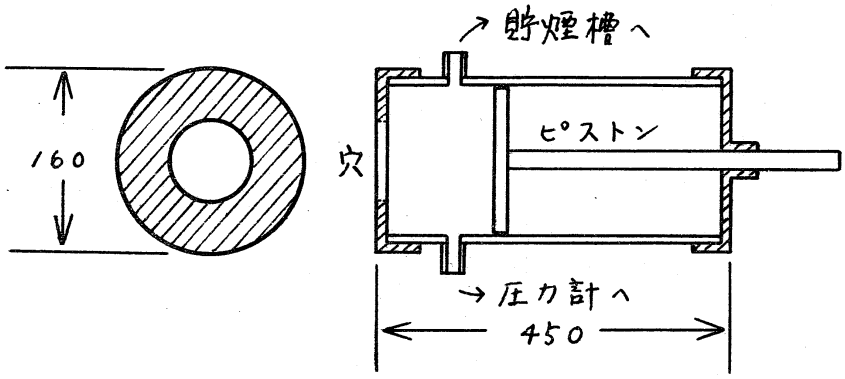
$O(\varepsilon^1)$ の項についての式は Levy & Forsdyke [4] の得た線型方程式と比較されよう．その違いは彼らの式では係数が積分形で与えられていること，また(3.6)では空間微分がまだ残されていることである．もし $\delta\to 0$ として，$\varepsilon\propto e^{i(n\theta+\omega t)}$ と仮定すると，両者は一致する．このとき

$$\omega^3+P\omega^2+Q\omega+R=0 \tag{3.7}$$

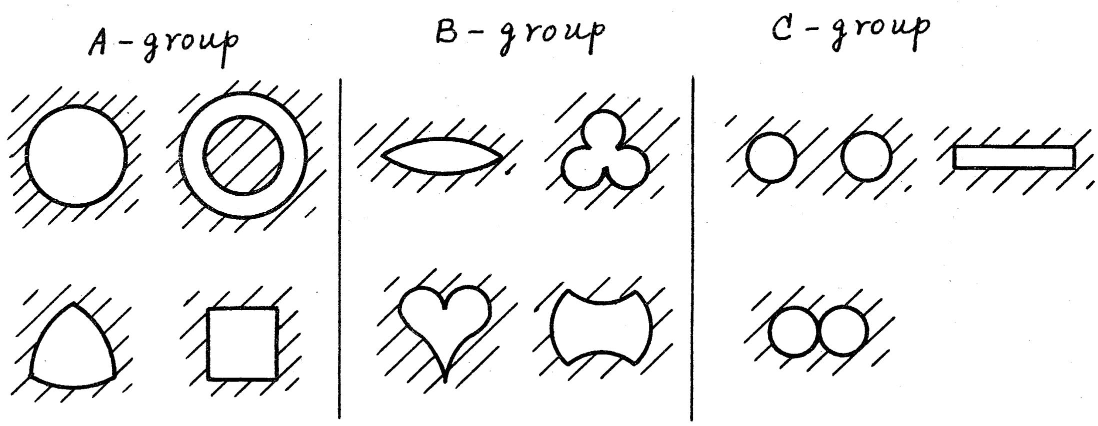
の形の分散式が得られる，ただし P, Q, R は n および k の関数である．$\Delta=P^2Q^2+18PQR-27R^2-4Q^3-4P^3R$ とおくと，すべての n, k に対して，$\Delta\geqq 0$ が数値的に得られる．したがって(3.7)のすべての根が実数であることになり，中立安定ということになる．この結論は Levy & Forsdyke のと少し違うが，その理由は(2.2)式を導くときの近似に起因するものと思われる．

§4. 実験

静止大気中にタバコの煙を衝撃的に噴出させて vortex ring を作り，その運動を観測した．実験装置の概略を7図に示す．右端のピストンに衝撃を加え，左端の穴から噴出



7 図



8 図

する．このような方法で作られた smoke ring は，およそ vortex ring と同じ運動をすると考えられる．

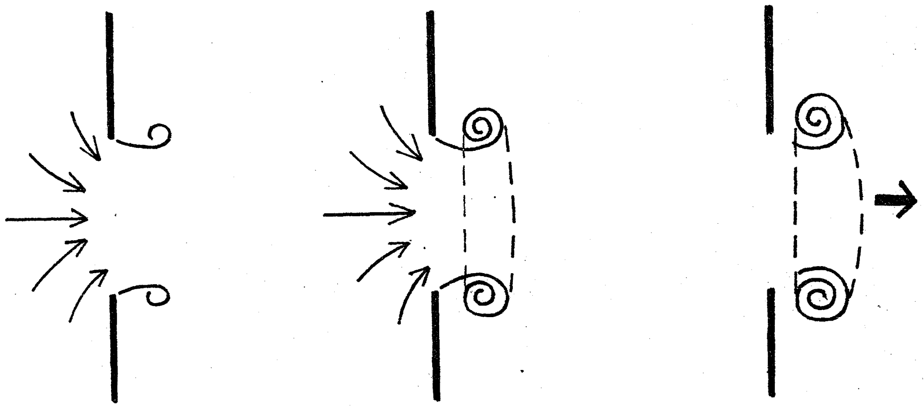
いろいろな形の穴（8図）について実験を行なった結果，発生した vortex ring の運動の mode から，それらはつぎのように分類される．

A－group ： 並進運動，

B－group ： 並進運動 ＋ ねじれ回転，

C－group ： 融合と分裂．

4－1．A－group　　　円形および円からの変形がわずかであるような形の穴から発生する vortex ring は，きれいな円環状となり，図に示すように vorticity の極性から定まる方向に並進運動する．　穴は直径 6.0 cm の

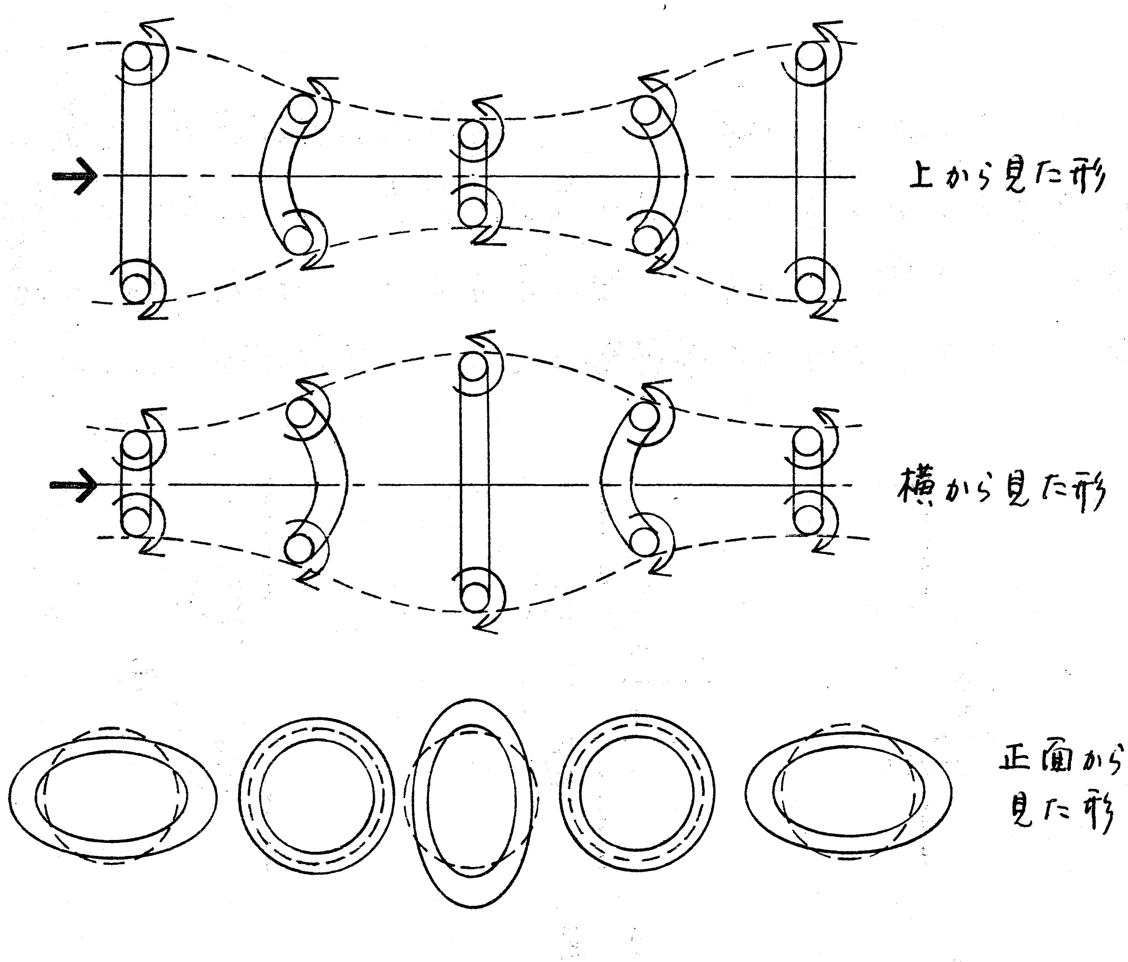


9 図

ものを標準とし，他の形の穴については，その面積がこれと同じになるようにした．　円形の穴のばあい，ピストンに与

える衝撃の強さがかなり広範囲に変っても vortex ring は発生するが，穴の形が円形から変形するにつれ，ring を発生させるのに必要な衝撃の強さの範囲が狭くなってくる．

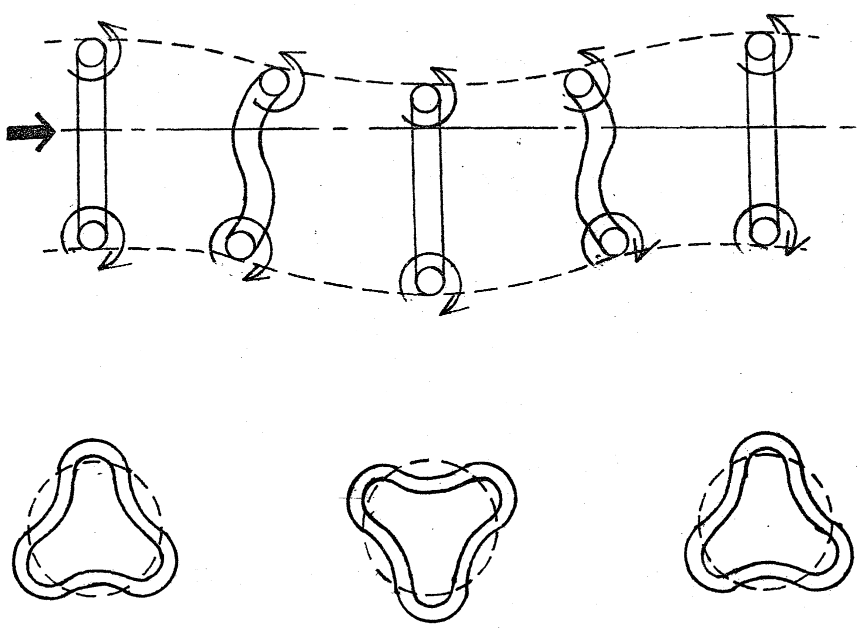
4−2．B−group　　角振動数が最も低く，観測がし易い点から，主として 形の穴について実験を行なった．この形の穴から発生した vortex ring は複雑



10 図　$n=2$

な三次元的運動を行ない，その一周期の様子は10図のようになる．さらに角振動数がこれより1つだけ高い形の穴から発生させた vortex ring の運動の様子は11図のようになる．

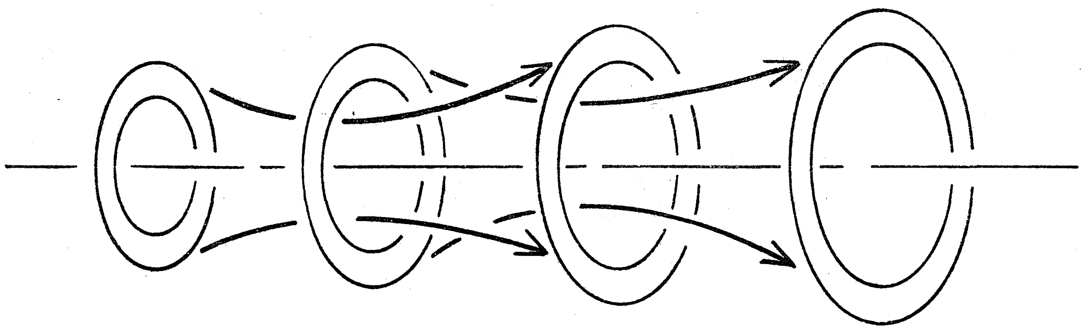
これらの運動は前述のように，vorticity の集中した環の，



11 図　$n=3$

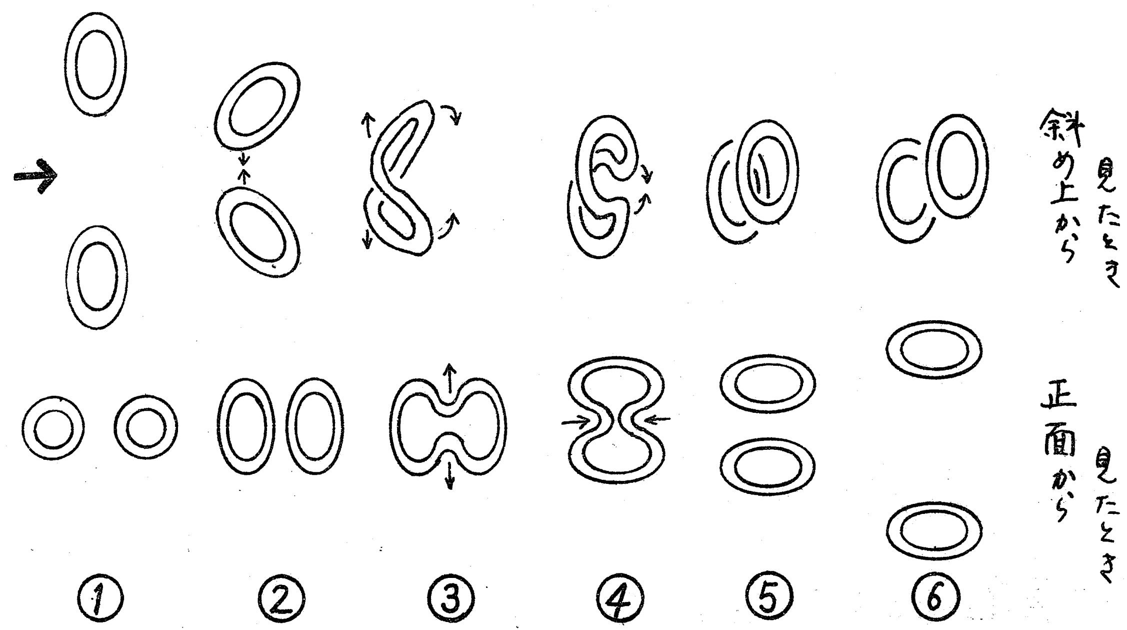
並進運動とねじ回転とが合成されたものである．このような運動を示す vortex ring を発生させるために必要なピストンへの衝撃の強さの範囲は狭く，この範囲外では噴き出された煙は ring にならない．与える衝撃と ring の運動について十分な定量的観測を行なってないが，1例として ring の並進速度は約 60 cm/sec，振動周期は約0.3sec である．

4-3.　C-group　　　　　2個以上のvortex ring が同時に存在すると，相互に影響をおよぼし合い，その運動が変化する．一直線上を前後に並んで進行する2個のvortex ring が交互に中をくぐり抜けて，追越しをする例はよく知られている（12図）．



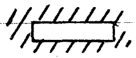
12 図

ここでは，13図に示すように同一平面内に，2個の円形の穴をその直径だけ離してあけて，そこから同時に2個のvortex ring を発生させ，その運動を観測した．図中でvortex ring は水平に並んでおり，左から右に進行している．発生時に①の状態にあった2個のvortex ring は進行につれ，干渉の結果，互いに接近する（①から②）．ring が接触するとring 状の2本のvortex line に切りちがいが生じ，③で示されるような形の1個のゆがんだvortex ring が形成される（融合）．一般に曲率のあるvortex line は陪法



13 図

線の方向に曲率に比例する速度で前進する（(2.3)式）．しだがってこの切りちがいを行なった部分は左右の部分よりも相対的に遅れ，それと共に上下に急速に離れる（③→④）．更に相対的に前進した左右の部分が接触し（④），ここでも切りちがいが生じて，ring は2個に分れ（分裂），⑤に示されるように上下方向に進行する．これらの進行方向のなす角は約30°である．分裂が起る場合はピストンに与える衝撃の強さの範囲は極めて狭い．衝撃の強さによっては，融合した vortex ring が2個に分裂することなく，B-group が示す mode と同じ種類の振動を示すばあいがある．

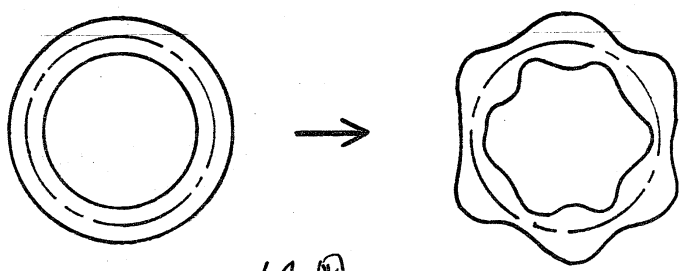
長辺を水平にした形の穴の場合，適当な衝撃を与えると著しくゆがんだ vortex ring が発生するが，その後は，B-group と同じ種類の運動をするときと，13図に示す場合のように直ちに2コに分裂するときと，また直ちに3コに分裂するときの3つの場合がある．この最後のばあい，上下に分裂する2コについてはこれらが vortex ring として進行してゆく様子が観測されたが，まん中に発生する残りの1コについては，vortex ring になっているかどうか観測できなかった．このばあい上下の2コが進行してゆく方向のなす角度は約50°である．

§5. 安定性

このような vortex ring の運動に対して，種々の mode の撹乱が考えられるが，代表的なものとして次の3つをあげることができよう．

1. fluted type
2. beaded type (sausage type)
3. twisted type

1はプラズマ柱の安定性の研究でもよく知られているように環の側面に沿うたてみぞ型の撹乱で，Dyson[7]により中立安定であることが示されている．2はドーナツ状のsmoke



14図

ringが進行するにつれ，環の表面に起伏が生じ，14図に示すように数珠型の環に変化するもので，この種の変化が実際に観測されている．3はすでに10図と11図に示したような環の中心線のねじれ回転に対応するもので，これは§3-2で述べたように中立安定である．2と3についてはJ. J. Thomsonも手がけたといわれるが，明らかでない．

参考文献

[1] Kelvin (W. Thomson), Phil. Mag. 10 155 (1880).

[2] H. Lamb, Hydrodynamics, Ch. VII, Cambridge Univ. Press.

[3] L. Rosenhead, Proc. Roy. Soc. (London), A127, 590 (1930).

[4] H. Levy and A. G. Forsdyke, Proc. Roy. Soc. (London), A120, 670 (1928).

[5] G. K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, §7.1, Cambridge Univ. Press, 1967.

[6] F. R. Hama, Phys. Fluids 5 1156 (1962).

[7] F. W. Dyson, Phil. Trans. A, clxxxiv. 1041 (1893).

[8] F. R. Hama, Phys. Fluids 6 526 (1963).