

多重しきい値関数の合成.

今宮淳美, 野口正一, 大泉充郎.

(東北大学電気通信研究所)

序文 しきい値論理に関して, 従来種々の方面から研究がなされてきた。与えられた論理関数がしきい値関数かどうかの決定, しきい値関数の合成 (各パラメータの決定), また任意の論理関数を合成するためのしきい値回路網の構成, 神経系モデルとしてのランダムしきい値素子回路網, 多値しきい値論理などである。本論文は, しきい値回路網の教種類のモデルについて, その基本的な性質や能力の考察である。主に考察する回路網では, 各しきい値素子のおもむべフトルを同一とし, しきい値と素子間の結合度を可変とする可変しきい値回路網である。各素子のおもむべフトルを同一としたしきい値回路網は, 幾何学的表現をすれば, n 次元空間に於て単位立方体の各頂点を, 実現すべき論理関数に従って, 各しきい値素子がつくる幾かの平行超平面で分割する。一般に論理関数は, 幾かのしきい値を有する多重しきい値関数とみられるから, 各素子のおもむべフトルを同一としたしきい値回路網は, 多重しきい値関数を合成する。

§1. 準備

以下で必要となる表記, 定義, 性質について述べる。

[定義] しきい値関数の標準形を次式であらわす。

$$f_t(x_1, \dots, x_m) = (1^{w_0}, x_1^{w_1}, \dots, x_m^{w_m}) = (1^{w_0}, \lambda_w). \quad (1.1)$$

$W = (w_1, \dots, w_m)$; おもみベクトル, 1 ; 入力定数,

$x_i = (1 \text{ 又は } 0)$; 入力変数。

定義に従えば, しきい値関数は次の様に述べられる。

$$X_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn}) \in f_t^{-1}(1) \text{ に対し } \sum_{i=1}^m w_i x_{ji} \geq T.$$

$$X_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn}) \in f_t^{-1}(0) \text{ に対し } \sum_{i=1}^m w_i x_{ji} < T.$$

但し, $T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m w_i - w_0 \right)$; しきい値。

[定義] しきい値関数 $f_t = (1^{w_0}, \lambda_w)$ が与えられたとき,

これと変数および, おもみベクトルが等しく, 定数のおもみだけを異にする一連の関数を同族関数と言う。

[性質 1.1] 2つの同族関数 $f_0 = (1^\alpha, \lambda_w)$, $f_1 = (1^\beta, \lambda_w)$

の間には大小関係が存在して, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f_0 \leq f_1$,

但し, 大小関係 $f_0 \leq f_1$ は, $f_0 = 1$ ならば $f_1 = 1$ なること。

[性質 1.2] $f_t = (1^{w_0}, x_1^{w_1}, \dots, x_m^{w_m})$ を任意の変数 x_i につ

いて展開すれば, w_i の正負により次式が得られる。

$$f_t = x_i f_1 + f_0, \quad f_t = f_1 + \bar{x}_i f_0 \quad (1.2)$$

$$\text{但し, } f_1 = (1^{w_0 + w_i}, x_1^{w_1}, \dots, x_{i-1}^{w_{i-1}}, x_{i+1}^{w_{i+1}}, \dots, x_m^{w_m}),$$

$$f_0 = (1^{w_0 - w_i}, x_1^{w_1}, \dots, x_{i-1}^{w_{i-1}}, x_{i+1}^{w_{i+1}}, \dots, x_m^{w_m}).$$

そこで基本的なしきい値回路網によって実現される論理関数の一般形について考察する。

図 1.1 に於て，出力の論理関数 H_2 は次の様になる。

$$\omega > 0; H_2 = h_1 \cdot (1^{\omega_2 + \omega}, \lambda_{W_2}) + (1^{\omega_2 - \omega}, \lambda_{W_2})$$

$$\omega < 0; H_2 = (1^{\omega_2 + \omega}, \lambda_{W_2}) + \bar{h}_1 \cdot (1^{\omega_2 - \omega}, \lambda_{W_2}). \quad (1.3)$$

これを基礎として k 個のしきい値素子のカスケード回路網，2層回路網，ハイブリッド回路網 (図 1.2) の実現ある論理関数 H_k を求める。

A) カスケード回路網

素子 $(i-1)$ と素子 i の結合度を $\omega_{i-1,i}$ と表わす。

$$h_i = (1^{\omega_i - \omega_{i-1,i}}, \lambda_{W_i}), \quad h_{i-1,i} = (1^{\omega_i + \omega_{i-1,i}}, \lambda_{W_i}) \text{ とおく。}$$

但し， $(1^{\omega_i}, \lambda_{W_i})$ は素子 i のみで発生されるしきい値関数。

$$\omega_{i-1,i} > 0, \quad (2 \leq i \leq k); \quad H_i = h_i + h_{i-1,i} \cdot H_{i-1}, \quad H_1 = h_1 = (1^{\omega_1}, \lambda_{W_1}).$$

上の漸化式より H_k の一般形が次式で与えられる。

$$H_k = \sum_{i=1}^k \prod_{j=i+1}^k h_i \cdot h_{j-1,j} \quad (1.4a)$$

Σ, Π は各々論理和，論理積を表わす。

$$\omega_{i-1,i} < 0; \quad H_i = h_{i-1,i} + h_i \cdot \bar{H}_{i-1}, \quad H_1 = h_1$$

$$\begin{aligned} k: \text{奇数}, \quad H_k &= \sum_{j=1}^{k+1/2} \left\{ \prod_{\ell=j}^{k+1/2} h_{2j-2,2j-1} \cdot \bar{h}_{2\ell-1,2\ell} \cdot h_{2\ell+1} + \prod_{\ell=j}^{k+1/2} h_{2j} \cdot h_{2\ell+1} \cdot \bar{h}_{2\ell+1,2\ell+2} \right\} \\ k: \text{偶数}, \quad H_k &= \sum_{j=1}^{k/2} \left\{ \prod_{\ell=j}^{k/2} \bar{h}_{2j-i,2j} \cdot h_{2\ell} \cdot \bar{h}_{2\ell,2\ell+1} + \prod_{\ell=j}^{k/2} h_{2j-1,2j} \cdot \bar{h}_{2\ell,2\ell+1} \cdot h_{2\ell+2} \right\} \quad (1.4b) \end{aligned}$$

B) 2層回路網

$$H_k = (1^{\omega_{0k}}, \lambda_{W_k}, h_1^{\omega_{1k}}, h_2^{\omega_{2k}}, \dots, h_{k-1}^{\omega_{k-1,k}}), \quad h_i = (1^{\omega_{0i}}, \lambda_{W_i}),$$

$$h_{\{J_\alpha\},k} = (1^{\omega_{0k} + \sum_{p \in \{J_\alpha\}} \omega_{pk} - \sum_{\ell \in \{J_\alpha\}} \omega_{\ell k}}, \lambda_{W_k}) \text{ とおく。}$$

$\{J_\alpha\}$: 添数 $(1, 2, \dots, k-1)$ の任意集合。

$$\omega_{i,k} > 0 \quad (1 \leq i \leq k-1); \quad H_k = \sum_{\alpha} \prod_{j \in \{J_{\alpha}\}} h_j \cdot h_{\{J_{\alpha}\},k} \quad (1.5a)$$

$$\omega_{i,k} < 0; \quad H_k = \sum_{\alpha} \prod_{j \in \{J_{\alpha}\}} \bar{h}_j \cdot h_{\{J_{\alpha}\},k}, \quad \{\bar{J}_{\alpha}\} : \{J_{\alpha}\} \text{ の補集合} \quad (1.5b)$$

C). 1-17) の回路網

$$H_k = (1^{\omega_{0k}}, \lambda_{W_k}, H_1^{\omega_{1k}}, H_2^{\omega_{2k}}, \dots, H_{k-1}^{\omega_{k-1,k}}), \quad H_j = (1^{\omega_{0j}}, \lambda_{W_j}, H_1^{\omega_{1j}}, \dots, H_{j-1}^{\omega_{j-1,j}})$$

$$h_{\{J_{\alpha}\},k} = (1^{\omega_{0k} + \sum_{j \in \{J_{\alpha}\}} \omega_{jk} - \sum_{j \in \{\bar{J}_{\alpha}\}} \omega_{jk}}, \lambda_{W_k}) \quad \forall \alpha <$$

$$\omega_{ij} > 0, \quad (1 \leq i \leq k-1, \quad 2 \leq j \leq k); \quad H_k = \sum_{\alpha} \prod_{j \in \{J_{\alpha}\}} H_j \cdot h_{\{J_{\alpha}\},k} \quad (1.6a)$$

$$\omega_{ij} < 0; \quad H_k = \sum_{\alpha} \prod_{j \in \{J_{\alpha}\}} \bar{H}_j \cdot h_{\{J_{\alpha}\},k} \quad (1.6b)$$

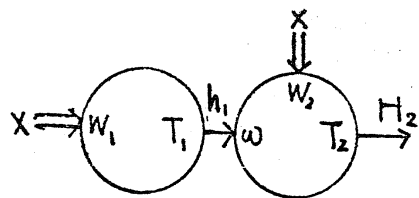
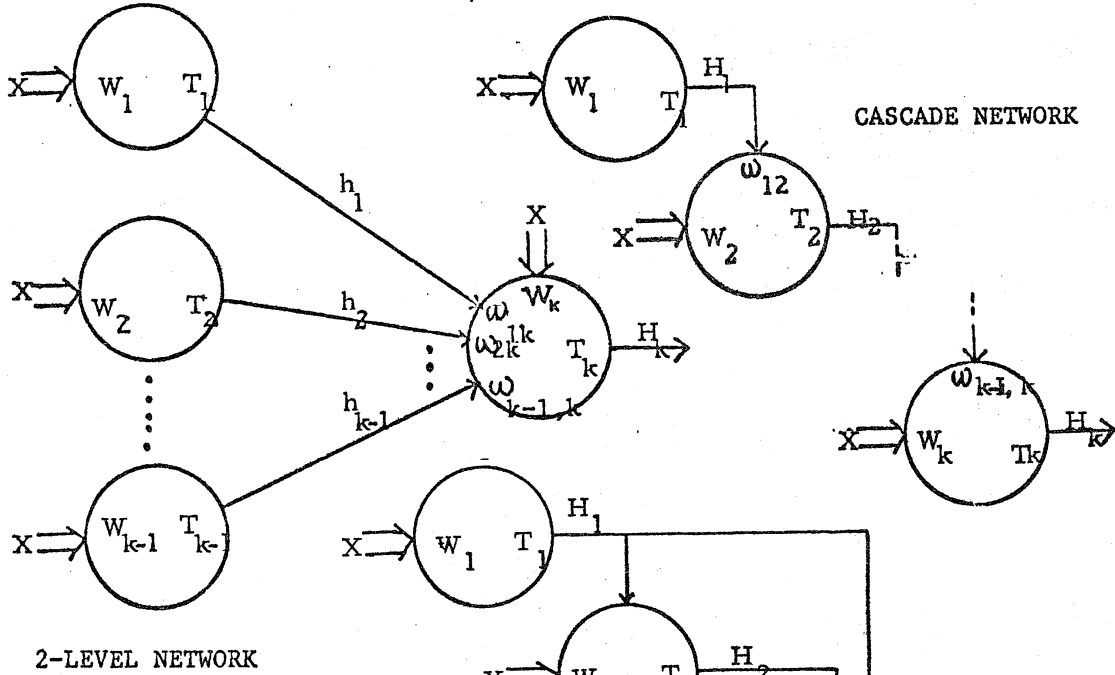


図 1.1.

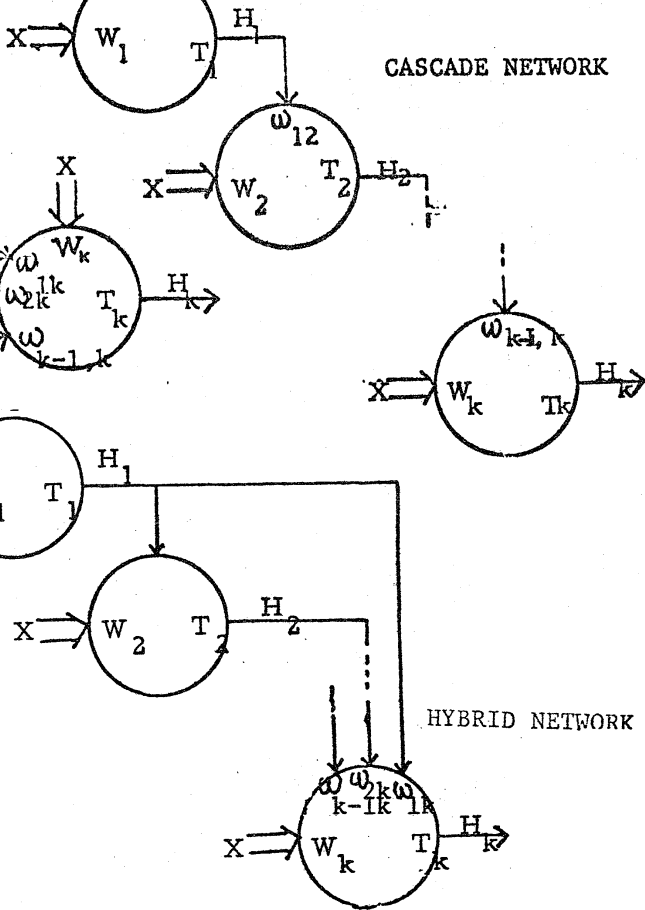


図 1.2.

§ 2. 回路網の性質と能力.

[定義] 次の様な論理関数 f を多重しきい値関数と言う。

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i > T_1, T_2; > \sum_{i=1}^m w_i x_i > T_{2j+1} \Rightarrow f(x) = 1.$$

$$\text{その他} \Rightarrow f(x) = 0.$$

2.1 出力関数.

図 1.1 に於て、おもみベクトルを同じくした場合 ($w_1 = w_2 = w$) に実現される関数 H_2 を考える。

$$i) \omega > 0; \quad H_2 = h_1 \cdot (1^{\omega_{02} + \omega}, \lambda_w) + (1^{\omega_{02} - \omega}, \lambda_w).$$

さらに $w_{01} > \omega_{02} + \omega$, $w_{01} < \omega_{02} + \omega$ の各々の場合,

$$H_2 = (1^{\omega_{02} + \omega}, \lambda_w), \quad H_2 = h_1 + (1^{\omega_{02} - \omega}, \lambda_w) \text{ を実現する.}$$

$$ii) \omega < 0; \quad H_2 = (1^{\omega_{02} + \omega}, \lambda_w) + \bar{h}_1 \cdot (1^{\omega_{02} - \omega}, \lambda_w) \quad (2.1)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m w_i - w_{01} \right), \quad T_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m w_i - (w_{02} - \omega) \right\} \text{ とおくと,}$$

(2.1) は図 2.1 に示す論理関数となる。

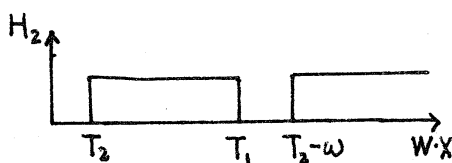


図 2.1

上記のことから知られるように、おもみベクトルを固定して、しきい値を変化させることにより H_2 は種々の関数となりうる。

2.2 カスケード回路網.

図 1.2 に示すカスケード回路網の出力関数 H_k について考察する。おもみベクトルは各素子について同一を w とする。

$$H_k = (1^{\omega_{0k}}, \lambda_w, H_{k-1}^{\omega_{k-1,k}}), \quad H_i = (1^{\omega_{0i}}, \lambda_w, H_{i-1}^{\omega_{i-1,i}}).$$

以下の考察では、(2.1) にみられる一般の論理関数を対象とするから、素子間の結合度を負と仮定する。H_kの展開式を(1.4b)の特殊な場合として求める。注意すべきことは、展開式では同族関数間の論理積があるから、関数の大小関係から一方の関数は消去される。ここで定数のおもみと、結合度に次の大小関係を与える。

$$\omega_{0k} - \omega_{k-1,k} > \omega_{0k-1} - \omega_{k-2,k-1} > \dots > \omega_{01} > \omega_{02} + \omega_{12} > \dots > \omega_{0k} + \omega_{k-1,k}$$

この条件でH_kを展開して関数の大小関係による性質(f₀f₁ ⇒ f₀+f₁=f₁, f₀f₁=f₀)を用いて式を簡単にすれば、しきい値関数と、その同族関数の complement との論理積の和で、項数が最大な式が得られる。f_{2j-1} = (1^{w_{0,2j-1} - w_{2j-2,2j-1}}; λ_w) ,}

$$g_{2j-1} = (1^{w_{0,2j-1} + w_{2j-2,2j-1}}; λ_w) \text{ とする。}$$

$$k; \text{ 奇数, } H_k = \sum_{j=1}^{k+1/2} \{ f_{2j+1} \bar{f}_{2j} + g_{2j-1} \bar{g}_{2j} \}, \quad (2.2)$$

$$k; \text{ 偶数, } H_k = \sum_{j=1}^{k/2} \{ f_{2j} \bar{f}_{2j-1} + g_{2j} \bar{g}_{2j+1} \}, \quad (2.3), \quad \bar{g}_{k+1} = 1$$

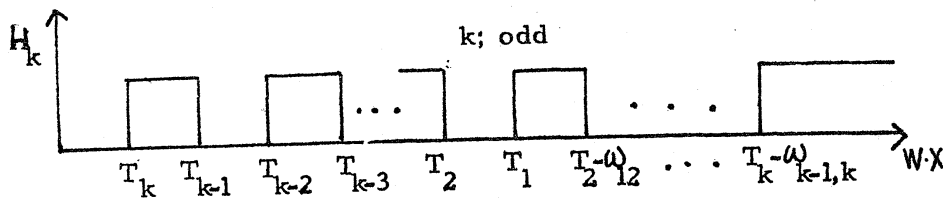
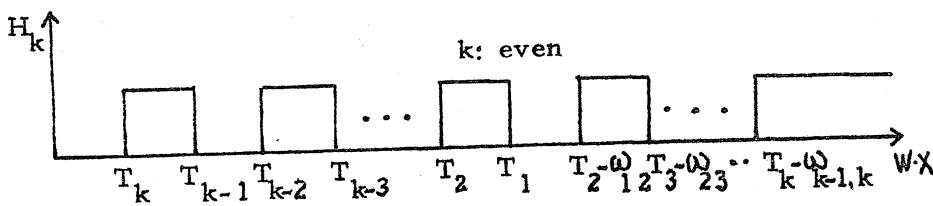


図 2.2

$$T_j = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i - (w_{0j} - \omega_{j-1,j}) \right\}$$

[性質 2.1] カスケード回路網で発生するしきい値の最大個数は $(2K-1)$. 但し K は素子数.

2.3 2層回路網.

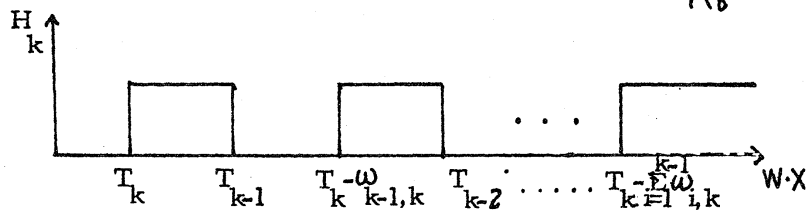
この回路網の出力関数 H_k も (1.5b) の特殊な場合となる。
次の大小関係を与える。 $w_{0,k-1} > w_{0,k-2} > \dots > w_{0,1} \Leftrightarrow h_{k-1} > h_{k-2} > \dots > h_1,$

$$w_{0k} - \sum_{i=1}^{k-1} w_{i,k} > w_{0,k-1} > w_{0k} - \sum_{i=1}^{k-2} w_{i,k} + w_{k-1,k} > w_{0,k-2} > \dots > w_{0,1} > w_{0k} + \sum_{i=1}^{k-1} w_{i,k}$$

これらの条件のもとで H_k を展開して、カスケード回路網の場合と同様に単純化すれば次式が得られる。

$$H_k = \sum_{j=0}^{k-1} h_j \cdot (1^{w_{0k} - \sum_{i=1}^j w_{i,k} + \sum_{i=j+1}^{k-1} w_{i,k}}, \lambda_w), \quad h_j = (1^{w_{0j}}, \lambda_w), \quad (2.4)$$

$$h_0 = 1.$$



$$T_k = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^k w_i - (w_{0k} - \sum_{i=1}^{k-1} w_{i,k}) \right\}, \quad T_j = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^j w_i - w_{0j} \right\}$$

図 2.3.

[性質 2.2] 2層回路網で発生するしきい値の最大個数は $(2K-1)$.

[性質 2.1] と [性質 2.2] より次のことが言える。

[性質 2.3] カスケード回路網と 2層回路網は、発生するしきい値の個数の面から等価である。

2.4 2次元格子状回路網

図 2.4 に示す $K \times L$ 2次元格子状回路網の出力関数 H_{KL} は

次式で与えられる。

$$H_{KL} = (1^{\omega_{0KL}}, \lambda_W, H_{K(L-1)}^{\omega_{K(L-1),KL}}, H_{(K-1)L}^{\omega_{(K-1)L,KL}}) \quad (2.5)$$

但し $H_{ij} = (1^{\omega_{0ij}}, \lambda_W, H_{i(j-1)}^{\omega_{i(j-1),ij}}, H_{(i-1)j}^{\omega_{(i-1)j,ij}})$, $1 \leq i, j \leq k$.

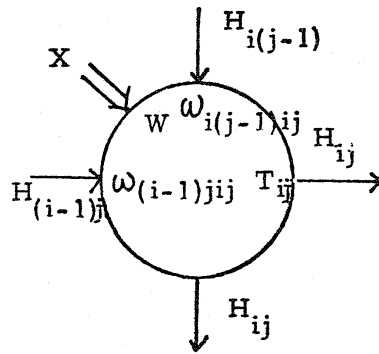
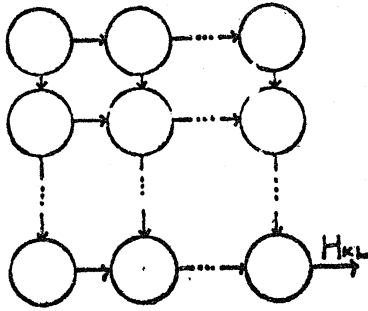


図 2.4.

[性質 2.4] $K \times L$ 次元格子状回路網に於て得られる、しきい値の最大個数は $(2K-1)(2L-1)$ 。

しきい値の最大個数を求めるには、各素子固有のしきい値と、それらと結合度の組合せを教え上げる。(証明略)

2.5 ハイブリッド回路網

出力関数 H_k は (1.6b) の特殊な場合 ($W_i = W$) になるが、 H_k を展開することは煩雑であり、ここでは得られるしきい値の最大個数と、その求める手順を示す。またしきい値の減少の様子(発生するしきい値の大小関係を用い替えることによる)を示す。

[性質 2.5] K 個の素子によるハイブリッド回路網に於て、得られるしきい値の最大個数は $2^k - 1$ 。

(証明). 各素子固有のしきい値の個数は k 。しきい値の

素子は, $(l-1)$ 番目以下からの $(l-1)$ 入力があるから, それらに対する組合度の組合せを教え上げる.

$$k + \sum_{l=2}^k \sum_{i=1}^{l-1} \binom{l-1}{i} = 2^k - 1.$$

次に最大個数のしきい値の存在の証明を示す. ある入力ベクトル X に対して, ハイブリッド回路網の各段の出力関数 (H_1, H_2, \dots, H_k) を状態列とよぶことにある. この状態列は, $(0, 0, \dots, 0)$ から $(1, 1, \dots, 1)$ の 2^k の状態をとりうるから, これらの状態列をすべて発生させるようにしきい値を順序づければ, しきい値の最大個数 $2^k - 1$ が得られる.

素子が 2 個の場合, 図 2.1 に示されるしきい値の配列となる. $(\pi_2, \pi_1, \pi_2 - \omega_{12}) \equiv (2, 1, 12)$ と略記する. 一般の因子 $i_1 i_2 \dots i_p$ は, しきい値 $\pi_{i_p} - \sum_{j \neq p} \omega_{ij} i_j$ に対応する.

しきい値は帰納的に構成される; $(k-1)$ 個の素子で因子 $i_1 i_2 \dots i_{k-1}$ があれば, 素子数 k の場合, 因子 $i_1 i_2 \dots i_{k-1} k$ をつくり, k に関する因子の順序は, 素子数 $(k-1)$ の場合と同じである. 次に $(k-1)$ 個の素子で構成された因子と, k に関する因子を順序どおりに 1 つずつ交互に配列することによって, ハイブリッド回路網を構成する.

(存在の証明); 素子数 $(k-1)$ までは構成が正しいと仮定する. $\Rightarrow (k-1, k-2, \dots, 12 \dots (k-1))$. アルゴリズムより, $k, (k-1)k, (k-2)k, \dots, 12 \dots (k-1)k$ をつくる.

$\Rightarrow \{k, k-1, (k-1)k, (k-2), (k-2)k, \dots, 12 \dots (k-1), 12 \dots (k-1)k\}$
 が得られる。仮定の構成から図 2.5 の様になる。

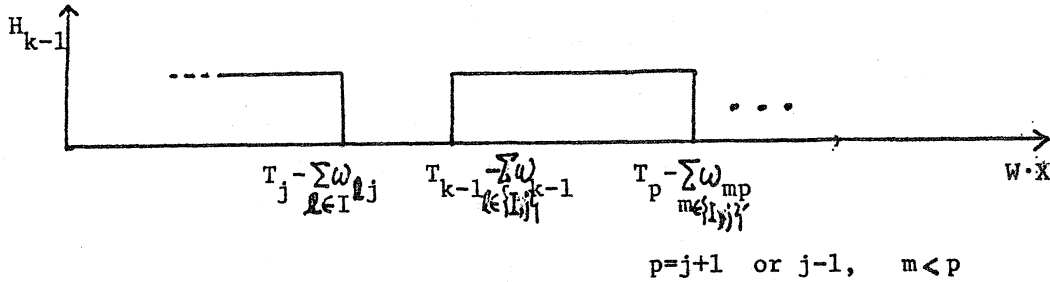


図 2.5

$p=j+1$ or $j-1, m < p$

$I = \{l \mid \sum_{i=1}^k w_i x_i = E \Rightarrow H_k = 1\}$

1) $T_j - \sum_{l \in I} \omega_{lj} < E < T_{k-1} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk-1} \Rightarrow H_{k-1} = 0.$

2) $T_{k-1} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk-1} < E < T_p - \sum_{m \in I, j} \omega_{mp} \Rightarrow H_{k-1} = 1.$

$H_k = (1^{w_{0k}}, \lambda_w, H_1^{w_{1k}}, H_2^{w_{2k}}, \dots, H_{k-1}^{w_{k-1,k}})$

$= H_{k-1} (1^{w_{0k} + w_{k-1,k}}, \lambda_w, H_1^{w_{1k}}, H_2^{w_{2k}}, \dots, H_{k-2}^{w_{k-2,k}})$

$+ \bar{H}_{k-1} (1^{w_{0k} - w_{k-1,k}}, \lambda_w, H_1^{w_{1k}}, H_2^{w_{2k}}, \dots, H_{k-2}^{w_{k-2,k}})$

1) の場合 ; $H_{k-1} = 0$ であるから,

$H_k = (1^{w_{0k} - w_{k-1,k}}, \lambda_w, H_1^{w_{1k}}, H_2^{w_{2k}}, \dots, H_{k-2}^{w_{k-2,k}}), T_j - \sum_{l \in I} \omega_{lj} < E$ より

$H_k = (1^{w_{0k} - w_{k-1,k} + \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk}}, \lambda_w).$ ∴ このときい値を

T とする。

$T = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m w_i - (w_{0k} - w_{k-1,k} + \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk}) \right\}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m w_i - (w_{0k} - \sum_{l=1}^{k-1} \omega_{lk} + 2 \sum_{l \in I, j} \omega_{lk}) \right\}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m w_i - (w_{0k} - \sum_{l=1}^{k-1} \omega_{lk}) \right\} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} = T_k - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk}$

従って次の a), b) が成り立つ。

a) $T_j - \sum_{l \in I} \omega_{lj} < E < T_k - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} \Rightarrow H_k = 0.$

b). $T_k - \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k} < E < T_{k-1} - \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k-1} \Rightarrow H_k = 1.$

2) の場合 ; $H_{k-1} = 1$ であるから

$H_k = (1^{\omega_{0k} + \omega_{k-1, k}}, \lambda_w, H_1^{\omega_{1k}}, H_2^{\omega_{2k}}, \dots, H_{k-2}^{\omega_{k-2, k}}), T_{k-1} - \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k-1} < E$

より, $H_k = (1^{\omega_{0k} + \omega_{k-1, k} + \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k} - \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k}}, \lambda_w).$

よこすのいきい値を T' とする。

$$T' = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i - (\omega_{0k} + \omega_{k-1, k} + \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k} - \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i - (\omega_{0k} - \sum_{\ell=1}^{k-1} \omega_{\ell k} + 2 \sum_{\ell \in \{I, j, k-1\}} \omega_{\ell k}) \right\} = T_k - \sum_{\ell \in \{I, j, k-1\}} \omega_{\ell k}$$

従って次の c), d) が成り立つ。

c) $T_{k-1} - \sum_{\ell \in \{I, j\}} \omega_{\ell k-1} < E < T_k - \sum_{\ell \in \{I, j, k-1\}} \omega_{\ell k} \Rightarrow H_k = 0$

d) $T_k - \sum_{\ell \in \{I, j, k-1\}} \omega_{\ell k} < E \Rightarrow H_k = 1$

a), b), c), d) を図示すると図 2.6 となる。因子の表示をすれば, $l_1, l_2, \dots, l_m, j, l_1, l_2, \dots, l_m, j(k-1)$ の各々に対して, $l_1, l_2, \dots, l_m, j, k, l_1, l_2, \dots, l_m, j(k-1), k$ をつくり, それらを交互に配列する。 $l_1, l_2, \dots, l_m, j, l_1, l_2, \dots, l_m, j, k, l_1, l_2, \dots, l_m, j(k-1), l_1, l_2, \dots, l_m, j(k-1), k$ となる。これは構成の手順である。

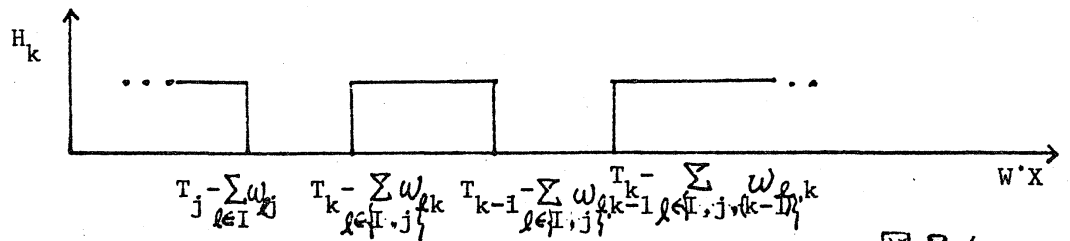


図 2.6

例] $k=3$; $(2, 1, 12)$ に対して $(3, 23, 13, 123)$ をつくり, 3 に属する因子と, 2 に属する因子を交互に配列する。

$(3, 2, 23, 1, 13, 12, 123) \equiv (\mathbb{T}_3, \mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3 - \omega_{23}, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_3 - \omega_{13}, \mathbb{T}_2 - \omega_{12}, \mathbb{T}_3 - \omega_{13} - \omega_{23})$.
 これらは状態列 (H_1, H_2, H_3) の 8 状態をつくる。同様に $k=4$ の場合, $(4, 3, 34, 2, 24, 23, 234, 1, 14, 13, 134, 12, 124, 123, 1234) \equiv (\mathbb{T}_4, \mathbb{T}_3, \mathbb{T}_4 - \omega_{34}, \mathbb{T}_2, \mathbb{T}_4 - \omega_{24}, \mathbb{T}_3 - \omega_{23}, \mathbb{T}_4 - \omega_{24} - \omega_{34}, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_4 - \omega_{14}, \mathbb{T}_3 - \omega_{13}, \mathbb{T}_4 - \omega_{14} - \omega_{34}, \mathbb{T}_2 - \omega_{12}, \mathbb{T}_4 - \omega_{14} - \omega_{24}, \mathbb{T}_3 - \omega_{13} - \omega_{23}, \mathbb{T}_4 - \omega_{14} - \omega_{24} - \omega_{34})$.

次に $(k-1)$ 個の素子で構成されたとき値と, k に関するとき値を順序どおりに 1 つずつ交互に配列できるための条件を求める。(構成の十分条件)

$$\begin{aligned}
 (A) \quad \mathbb{T}_j - \sum_{l \in I} \omega_{lj} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i - (w_{0j} - \sum_{l=1}^{j-1} \omega_{lj}) \right\} - \sum_{l \in I} \omega_{lj} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i - (w_{0j} + \sum_{l \in I} \omega_{lj} - \sum_{l \in I} \omega_{lj}) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$(B) \quad \mathbb{T}_{k-1} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk-1} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i - (w_{0k-1} + \sum_{l \in I, j} \omega_{lk-1} - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk-1}) \right\}.$$

$$(C) \quad \mathbb{T}_k - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i - (w_{0k} + \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk}) \right\}.$$

$(k-1)$ 個までは, 正しく構成されたと仮定しているから次の不等式が成り立っている。

$$w_{0j} + \sum_{l \in I} \omega_{lj} - \sum_{l \in I} \omega_{lj} > w_{0k-1} + \sum_{l \in I, j} \omega_{lk-1} - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk-1}, \quad (1)$$

但し, $1 \leq j \leq k-2$. ここで満足すべき条件は $(A) < (C) < (B)$.

$$\Rightarrow w_{0j} + \sum_{l \in I} \omega_{lj} - \sum_{l \in I} \omega_{lj} > w_{0k} + \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk} > w_{0k-1} + \sum_{l \in I, j} \omega_{lk-1} - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk-1}, \quad (2)$$

$$(D) \quad \mathbb{T}_k - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i - (w_{0k} + \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk} - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk}) \right\}$$

構成より $(D) < (C)$ が成り立つ。

$$\Rightarrow w_{0j} + \sum_{l \in I} \omega_{lj} - \sum_{l \in I} \omega_{lj} < w_{0k} + \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk} - \sum_{l \in I, j \leq l} \omega_{lk} \quad (3).$$

(2), (3) より次の性質が成り立つ。

[性質 2.6] k 個の素子のハイブリッド回路網が $(2^k - 1)$ のしきい値を生ずるための十分条件は、 $\omega_{im} = \omega_{mi}$, ($i < n, m$) のとき次の (4a), (4b) が成り立つこと。

$$(4a) \quad \omega_{0k} > \omega_{0k-1} + \omega_{k-1,k}, \quad (4b) \quad \omega_{0k} + \omega_{jk} - \sum_{j < k}^{k-1} \omega_{jk} < \omega_{0j} < \omega_{0k} - \omega_{jk} + \sum_{j < k}^{k-1} \omega_{jk}. \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

次に [性質 2.6] の順序関係を崩した場合に、しきい値の減少の様子が如何になるかを述べる。

其 1.1. $T_k - \sum_{l \in I, j, k-1} \omega_{lk}$ と $T_{k-1} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk}$ との順序を入れ替える。

$$\Rightarrow \omega_{0k-1} < \omega_{0k} + \omega_{k-1,k} \quad (5a), \quad j \neq k-1 \text{ では (4b) を満足}$$

するとする。この条件の場合、

$$T_j - \sum_{l \in I} \omega_{lj} < WX < T_k - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} \Rightarrow H_k = 0$$

$$T_k - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} < WX < T_k - \sum_{l \in I, j, k-1} \omega_{lk} \Rightarrow H_k = 1.$$

$$T_k - \sum_{l \in I, j, k-1} \omega_{lk} < WX < T_{k-1} - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk} \Rightarrow H_k = 1$$

この場合のしきい値の数は、 T_{k-1} に関するしきい値と、その右隣りにあった T_k に関するしきい値が消去されるから

$$(2^k - 1) - 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1} - 1.$$

其 1.2 ある j に関して $T_j - \sum_{l \in I} \omega_{lj}$ と $T_k - \sum_{l \in I, j} \omega_{lk}$ との順序関係を入れ替える。 $\Rightarrow \omega_{0j} < \omega_{0k} + \omega_{jk} - \sum_{j < k}^{k-1} \omega_{jk} \quad (5b)$

この場合、ある j に対して (5b) であれば、 T_j に関するしきい値と、その右隣りにあった T_k に関するしきい値が消去され

るから、しきい値の数は次の通り。 $(2^k-1)-2 \cdot 2^{j-1}$

(5b) を満たす j の集合を J とすれば、しきい値の数は、

$$2^k-1 - 2 \sum_{j \in J} 2^{j-1}.$$

$j=k-1, j=k-2, \dots, j=1$ と順次 (5b) を満たすようにすれば、しきい値の数の減少の様子は、 $2^k-1, 2^{k-1}-1, 2^{k-2}-1, \dots, 3, 1$ 。

其 2.1 $T_k - \sum_{\ell \in I, j} \omega_{\ell k}$ と $T_{k-1} - \sum_{\ell \in I, j} \omega_{\ell k-1}$ との順序を入れ替える。

$$\Rightarrow \omega_{0k} < \omega_{0k-1} + \omega_{k-1,k} \quad (6a)$$

(6a) は (4a) に反する様にとつたこと。このとき $j \neq k-1$ では (4b) を満たすければ $T_j - \sum_{\ell \in I} \omega_{\ell j} < T_k - \sum_{\ell \in I, j, k-1} \omega_{\ell k}$ と T_j になる。

従って、しきい値の数は、 T_{k-1} に属するしきい値と、その左隣りにあった T_k に属するしきい値が消去されるから

$$(2^k-1) - 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1} - 1.$$

其 2.2 $T_k - \sum_{\ell \in I, j < \ell} \omega_{\ell k}$ と $T_j - \sum_{\ell \in I} \omega_{\ell j}$ との順序を入れ替える。

$$\Rightarrow \omega_{0j} > \omega_{0k} - \omega_{jk} + \sum_{\ell=j+1}^{k-1} \omega_{\ell k} \quad (6b)$$

しきい値の数は T_j に属するしきい値と、その左隣りにあった T_k に属するしきい値が消去されるから、 $(2^k-1) - 2 \cdot 2^{j-1}$ 。

(6b) を満たす j の集合を J とすれば、しきい値の数は、

$$2^k-1 - 2 \sum_{j \in J} 2^{j-1}.$$

$j=k-1, j=k-2, \dots, j=1$ と順次 (6b) を満たすようにすれば、しきい値の数の減少の様子は、 $2^k-1, 2^{k-1}-1, 2^{k-2}-1, \dots, 3, 1$ 。

以上の考察から次の性質が成り立つ。

[性質 2.7] k 個の素子によるハイアリティッド回路網に於ては、しきい値と、素子間の結合度を変えることにより、発生するしきい値の数を、1 から $2^k - 1$ までのすべての奇数個にできる。

2.7. 各回路網の論理関数実現能力.

各回路網に於て、すべての素子の同一おもみベクトルを固定し、しきい値を可変（結合度も可変）とした場合、実現される n 変数論理関数と、素子数 k の関係式を与える。

[定義] 変数 x_i に対して、おもみを 2^{i-1} とするおもみベクトルを Canonical weight vector (CWV) と定義する。

[補題 1] 1 個のしきい値素子のおもみを固定して、しきい値を変化させた場合に実現される異なる n 変数論理関数の数は、 $2^n + 1$ より大なることはない。

(証明). おもみの和は、 $w_1, w_2, \dots, w_n; w_1 + w_2, \dots; \dots; w_1 + w_2 + \dots + w_n$ の $2^n - 1$ 通りあり、おもみベクトルを CWV とすれば、それらはすべて異なる。各和に対してしきい値を適当にとれば、各々が n 変数しきい値関数に対応する。明らかに割数、0, 1 を加えれば補題 1 が成り立つ。 ■

[性質 2.8] カスケード回路網または、2 層回路網に於て、各素子の同一のおもみベクトルを固定して、しきい値を可変（結合度も可変）にあることにより実現される n 変数論理

関数の数 R_k^m は次式で与えられる。

$$R_k^m = 2^m + 1 + \sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{i}{2^j-1} (2^m - i). \quad (2.6)$$

但し, $1 \leq j \leq i+1/2$, k は素子数。

(証明). $\sum_{i=1}^m w_i x_i$ の値がすべて異なる場合 (例えば おもみベクトルに CWV をとる), その値に $1, 2, \dots, 2^m$ と小さい順に番号をつける。カスケード回路網 (又は 2 層回路網) の場合最大 $(2k-1)$ 個のしきい値が得られるが, しきい値にも番号をつける。(図 2.7). $i < T_2 < i+1$ なる場合, T_2 以下のしきい値を固定し, 出を変化させると $(2^m - i)$ 通りの H_k のパターンが得られる。また, T_1 を固定しておいて, $T_3, T_4, \dots, T_{2^j+1}$ の (2^j-1) 個のしきい値を変化させると $\binom{i}{2^j-1}$ 通りの H_k のパターンが得られる。但し, $1 \leq j \leq i+1/2$, $1 \leq j \leq k-1$ 。

従ってある i に対して $\binom{i}{2^j-1} (2^m - i)$ 通りの H_k の異なるパターンが異らぬ。各パターンは論理関数に 1 対 1 対応があるから, 得られたパターンの数は論理関数の数となる。 ■

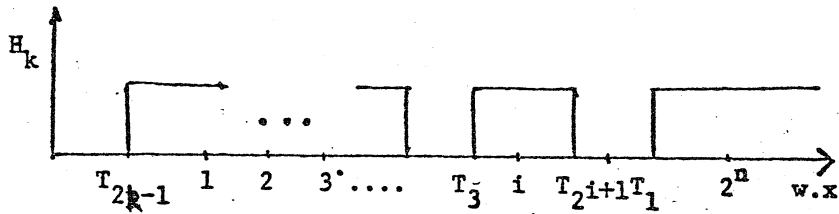


図 2.7.

[性質 2.9] ハイブリッド回路網に於て、各素子の同一おもみベクトルを固定して、しきい値を可変(結合度も可変)にあることにより実現される n 変数論理関数の数 R_k^m は次式の上限をもつ。

$$R_k^m \leq 2^n + 1 + \sum_{i=1}^{2^k-1} \sum_{j=1}^{2^k-1} \binom{i}{2^j-1} (2^n - i). \quad (2.7)$$

証明は、ハイブリッド回路網のしきい値の最大数が 2^k-1 であることを用いて[性質 2.8]と同様に行われる。(得られるしきい値が独立でないものがあるから上限を与える。)

[補題 2] $K \times K$ 二次元格子状回路網に於て、得られるしきい値の最大個数 $(2K-1)^2$ の中で、独立なしきい値の個数は $K(3K-2)$ 。(証明略)

[性質 2.10] $K \times K$ 二次元格子状回路網に於て、各素子の同一おもみベクトルを固定して、しきい値を可変(結合度も可変)にあることにより実現される n 変数論理関数の数 $R_{K \times K}^m$ は次の範囲にある。

$$\text{上限;} \quad R_{K \times K}^m \leq 2^n + 1 + \sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=1}^{(2K-1)^2+1/2} \binom{i}{2^j-1} (2^n - i). \quad (2.8)$$

下限;

$$\begin{aligned} K: \text{奇数} & \quad \sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=1}^{(3K-1)(K+1)/2} \binom{i}{2^j-1} (2^n - i) + 2^n + 1 \leq R_{K \times K}^m, \\ K: \text{偶数} & \quad \sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=1}^{K(3K-2)-2/2} \binom{i}{2^j} (2^n - i) + 2^n + 1 \leq R_{K \times K}^m. \quad (2.9) \end{aligned}$$

§ 3. 回路網による論理関数実現。

3.1. 奇関数, 偶関数と周期関数。

論理関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ の真理値表に於る i 番目の関数値を f_i とすれば, 反転関数 $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ の i 番目の関数値は f_{2^n-1-i} .

[定義] すべて i に対して, $f_i = \bar{f}_{2^n-1-i}$ である関数を奇関数, すべて i に対して, $f_i = f_{2^n-1-i}$ である関数を偶関数と定義する。

[性質 3.1] 奇関数は奇数個, 偶関数は偶数個のしきい値を有する。

(証明) $f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$ とおく。あるしきい値ベクトルを W , 入力ベクトルを X_i ($i=0, 1, \dots, 2^n-1$) とする。

\check{X} ; $W \cdot \check{X} = \max_i (W \cdot X_i)$, \hat{X} ; $W \cdot \hat{X} = \min_i (W \cdot X_i)$ とすると $\hat{X} = \bar{\check{X}}$ であるから, $f(\hat{X}) = f(\bar{\check{X}})$ が成り立つ。 $f(x)$ を奇関数とすると $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$, 偶関数とすると $f(x) = f(\bar{x})$ 。

一方奇数個のしきい値を有する関数は $f(\check{X}) = \bar{f}(\hat{X})$, 偶数個のしきい値を有する関数は, $f(\check{X}) = f(\hat{X})$ が成り立つ。

$f(x)$ が奇関数の場合; $f(x) = \bar{f}(\bar{x}) \Rightarrow f(\check{X}) = \bar{f}(\bar{\check{X}}) = \bar{f}(\hat{X})$

$f(x)$ が偶関数の場合; $f(x) = f(\bar{x}) \Rightarrow f(\check{X}) = f(\bar{\check{X}}) = f(\hat{X})$

従って性質が成り立つ。 ■

[性質 3.2] n 変数パリティ関数 $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ は, n が偶数, 奇数で各々偶関数, 奇関数である。またパリティ関数

は、各変数について対称であるから、各変数に対するおとみ
を \bar{x}_i とおくことができ、その場合、しきい値の個数は n 。

(証明) パリティ関数は、変数の奇数個が 1 をとるとき 1 と
なる関数であるから n 変数のうち $(2i-1)$ 個が 1 であるとき
($i=1, 2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$), $f = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus \dots \oplus \bar{x}_n$ では $n-(2i-1)$
個の変数が 1 となるから

$$1) \quad n = 2j \Rightarrow n - (2i-1) = 2(j-i) + 1 \Rightarrow f = f' : \text{偶関数.}$$

$$2) \quad n = 2j - 1 \Rightarrow n - (2i-1) = 2(j-i) \Rightarrow \bar{f} = f' : \text{奇関数.} \blacksquare$$

対称関数では、各変数のおとみは 1 とおける。対称関数は
一般に $S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で表わす。パリティ関数
は $S_{1, 3, 5, \dots}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表わせる。但し対称関数は α_i
($1 \leq i \leq k$) 個の変数が 1 をとれば関数値として 1 をとる。

[性質 3.3] n 変数対称関数で最も多くしきい値を必要と
するのはパリティ関数で n 個。

[定義] n 変数論理関数 f に対する Self-dual expression
 f^{sd} は次の $(n+1)$ 変数論理関数のこと。

$$f^{sd}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) + \bar{x}_{n+1} f^d(x_1, \dots, x_n).$$

$$\text{但し } f^d(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

[補題 3.1] f^{sd} は奇関数。

[定義] n 変数論理関数 f に対する Self-complementary
dual expression f^{scd} は次の $(n+1)$ 変数論理関数のこと。

$$f^{scd}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) + \bar{x}_{n+1} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

[補題 3.2] f^{scd} は偶関数。

[定義] ある論理関数が k 個のしきい値を有し、しきい値が次の様に書けるならば、この関数を周期関数と定義する。

$$\mathbb{T}_{k+1-i} = iP + a, \quad i = 1, \dots, k, \quad P: \text{周期}, a: \text{実数}.$$

[補題 3.3] $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_k$ が周期関数のしきい値であるならば、

$$\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_k = \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_{k-1} = \dots = 2\mathbb{T}_{k+1/2} = (k+1)P + 2a. \quad (k: \text{奇数}),$$

$$\text{または, } \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_k = \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_{k-1} = \dots = \mathbb{T}_{k/2} + \mathbb{T}_{k/2+1} = (k+1)P + 2a.$$

(k : 偶数)。

[性質 3.3] おもひべクトルに CWV をとると、 n 変数周期関数の数は、 $2^n(2^n - 1) + 2$ 。対称関数では、各変数のおもひをすべて 1 とすれば周期関数の数は $n(n+1) + 2$ 。

[補題 3.4] $f(x)$ が $[W; \mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_k]$ で実現される関数のとき、 $\bar{f}(x)$, $f^d(x)$ は各々 $[-W; -\mathbb{T}_k, \dots, -\mathbb{T}_1]$, $[W; \sum_{i=1}^k w_i - \mathbb{T}_k, \dots, \sum_{i=1}^k w_i - \mathbb{T}_1]$ で実現される。

[性質 3.4] $f(x)$ が k 個 (k : 奇数) のしきい値を有する奇関数であるための必要十分条件。

$$\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_k = \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_{k-1} = \dots = 2\mathbb{T}_{k+1/2} = \sum_{i=1}^k w_i.$$

(証明). $f(x)$ が奇関数で $[W; \mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_k]$ で実現されると仮定すれば、 $f^d(x)$ は $[W; \sum_{i=1}^k w_i - \mathbb{T}_k, \dots, \sum_{i=1}^k w_i - \mathbb{T}_1]$ で実現。仮定より、
 $[W; \mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_k] = [W; \sum_{i=1}^k w_i - \mathbb{T}_k, \dots, \sum_{i=1}^k w_i - \mathbb{T}_1]$

従って, $\mathbb{T}_1 = \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_k$, $\mathbb{T}_2 = \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_{k-1}$, ..., $\mathbb{T}_{k+1/2} = \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_{k+1/2}$ であるから条件式が成り立つ。逆に条件式が成り立つならば, k 個のしきい値を有する奇関数となることは明らかである。■

[補題 3.3], [性質 3.4] より

[系 3.1] k 個のしきい値を有する周期関数に於て
 $(k+1)p + 2a = \sum_{i=1}^n w_i$ であれば奇関数である。

[性質 3.5] $f(x)$ が k 個 (k : 偶数) のしきい値を有する偶関数であるための必要十分条件

$$\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_k = \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_{k-1} = \dots = \mathbb{T}_{k/2} + \mathbb{T}_{k/2+1} = \sum_{i=1}^n w_i, \quad (\text{証明略})$$

[性質 3.6] $f(x)$ の k 個 (k : 奇数) のしきい値が,

$$\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_k = \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_{k-1} = \dots = 2\mathbb{T}_{k+1/2} \text{ であるならば, } f^{sd} \text{ は,}$$

$$[W, \sum_{i=1}^n w_i - 2\mathbb{T}_{k+1/2}; \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_k, \dots, \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_1] \text{ で実現される。}$$

(証明). $g_{n+1}(x)$ が $[W, \sum_{i=1}^n w_i - 2\mathbb{T}_{k+1/2}; \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_k, \dots, \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_1]$ で実現されるとすれば, $g_{n+1}(x)$ は奇関数。

$$g_{n+1}(x) = \alpha_{n+1} g_n(x, 1) + \bar{\alpha}_{n+1} g_n(x, 0) \text{ であるから,}$$

$$g_n(x, 1); [W; (\sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_k) - (\sum_{i=1}^n w_i - 2\mathbb{T}_{k+1/2}), \dots, (\sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_1) - (\sum_{i=1}^n w_i - 2\mathbb{T}_{k+1/2})]$$

$$g_n(x, 0); [W; \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_k, \dots, \sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_1] \text{ で実現される。}$$

$$\text{条件式より, } (\sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_k) - (\sum_{i=1}^n w_i - 2\mathbb{T}_{k+1/2}) = \mathbb{T}_1, \quad \dots,$$

$$(\sum_{i=1}^n w_i - \mathbb{T}_1) - (\sum_{i=1}^n w_i - 2\mathbb{T}_{k+1/2}) = \mathbb{T}_k \text{ であるから } g_n(x, 1) \text{ は}$$

$$[W; \mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_k] \text{ で実現。} \therefore g_n(x, 1) = f(x), \quad g_n(x, 0) \text{ は [補}$$

題 3.4] より $f^d(x)$ となり $g_{n+1}(x) = f^{sd}(x)$. ■

[性質 3.7] $f(x)$ の k 個 (k : 偶数) の ω 値が,

$T_1 + T_k = T_2 + T_{k-1} = \dots = T_{k/2} + T_{k/2+1}$ であれば, f^{scd} は,
 $[W, \sum_{i=1}^m \omega_i - (T_{k/2} + T_{k/2+1}); \sum_{i=1}^m \omega_i - T_k, \dots, \sum_{i=1}^m \omega_i - T_1]$ で
 実現される。 (証明略)

[系 3.3] $f(x)$ が周期関数で k 個の ω 値を有していれば,
 f^{sd}, f^{scd} も k 個の ω 値を有する。

3.2. ハイブリッド回路網と周期関数。

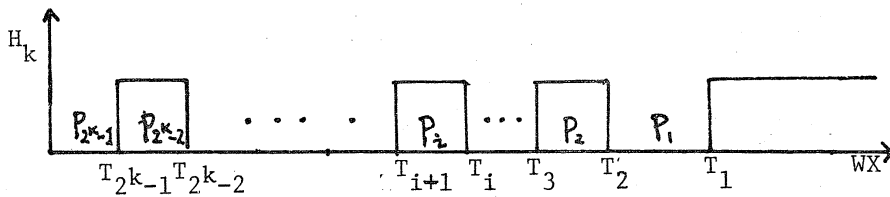


図 3.1.

[性質 2.6] が成り立つ場合のハイブリッド回路網と論理関数について考察する。図 3.1 に示すように $T_i - T_{i+1} = P_i$ とおく。 ω 値の構成法より次式が成り立つ。

$$|\omega_{k-j,k}| = \sum_{i=1}^{2^j} P_i.$$

$$P_i = P \text{ (任意の } i \text{ に対して)} \Rightarrow |\omega_{k-j,k}| = 2^j P.$$

[性質 3.8] 周期関数を, ハイブリッド回路網で実現するには次式が成り立つ。 $P = \frac{1}{4} \{ \omega_{0k} - \omega_{0k-1} \}$; 周期。

また素子数 k については $k = n + 1$ であることが十分。

(証明). $T_k = \frac{1}{2} \{ \sum_{i=1}^m \omega_i - (\omega_{0k} - \sum_{l=1}^{k-1} \omega_{lk}) \}$, $T_{k-1} = \frac{1}{2} \{ \sum_{i=1}^m \omega_i - (\omega_{0k-1} - \sum_{l=1}^{k-2} \omega_{lk-1}) \}$

$$P = T_{k-1} - T_k, \quad \omega_{in} = \omega_{im} \text{ あり}$$

$$P = \frac{1}{2} \{ \omega_{0k} - \omega_{0k-1} - \omega_{k-1,k} \} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \{ \omega_{0k} - \omega_{0k-1} \}. \quad \blacksquare$$

3.3. 部分対称関数のおもひベクトル

論理関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が変数 x_1, \dots, x_k に関して対称である場合、次の様に表わせる。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^k S_i(x_1, \dots, x_k) \cdot f_i(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

$$\text{但し, } f_i(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-i}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

この部分対称関数を変数 x_{k+1}, \dots, x_n について展開すれば次式が得られる。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_n \cdot S_{P_0}(x_1, \dots, x_k) + x_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_n \cdot S_{P_1}(x_1, \dots, x_k) \\ + \cdots + x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_n \cdot S_{P_{2^n - k - 1}}(x_1, \dots, x_k).$$

$$\text{但し, } S_{P_0} = f(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0), \quad S_{P_1} = f(x_1, \dots, x_k, 1, 0, \dots, 0), \\ \cdots, \quad S_{P_{2^n - k - 1}} = f(x_1, \dots, x_k, 1, 1, \dots, 1).$$

変数 x_i^* ($x_i^* = x_i, \bar{x}_i$) のおもひを w_i とすることは、変数 x_i^* が w_i であることに対応する。対称な変数に関するおもひをすべて 1 とする。変数 x_{k+j}^* のおもひを w_{k+j} ($1 \leq j \leq n-k$) とすれば上記の関数は次の様に表わせる。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_n \cdot S_P(x_1, \dots, x_k) + x_{k+1} \bar{x}_{k+2} \cdots \bar{x}_n \cdot S_{P - w_{k+1}}(x_1, \dots, x_k) \\ + \cdots + x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_n \cdot S_{P - \sum_{j=1}^{n-k} w_{k+j}}(x_1, \dots, x_k).$$

但し P は関数値が 1 となる入力ベクトルに於ける $\sum_{i=1}^n w_i x_i$ の値の集合。

各 $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ に対してとりうる $\sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$ の範囲を次に示す。

$$(0, 0, \dots, 0) \Rightarrow [0, k], \quad (1, 0, \dots, 0) \Rightarrow [w_{k+1}, k + w_{k+1}],$$

$$(0, 1, \dots, 0) \Rightarrow [w_{k+2}, k + w_{k+2}], \quad \dots, \quad (1, 1, \dots, 1) \Rightarrow \left[\sum_{i=k+1}^n w_i, k + \sum_{i=k+1}^n w_i \right].$$

各 $(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n)$ での順序集合 $\left[\sum_{i=1}^n w_i \alpha_i \right]$ の各々を互に素にすることを考える。図3.2の配列をすれば $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ の各々のおこみは次の様になる。

$$w_{k+1} = k+1, \quad w_{k+2} = 2(k+1), \quad w_{k+3} = 4(k+1), \quad \dots, \quad w_{k+j} = 2^{j-1}(k+1).$$

[性質3.9] n 変数論理関数 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が、変数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ に関して対称な場合、それらのおこみを1とし、 α_{k+j} に対しては、おこみを $w_{k+j} = 2^{j-1}(k+1)$ とすれば、これがおこみの上限となる。

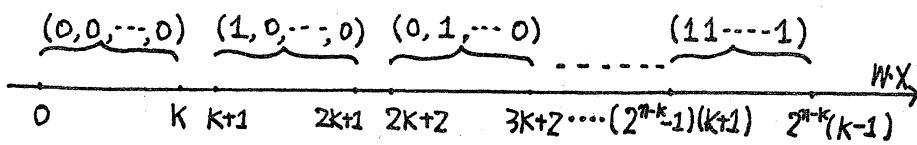


図3.2.

次の例は、 w_{k+j} の値を $2^{j-1}(k+1)$ より下にする。

例] $f = \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_4 \alpha_5$.

この関数は $(\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5)$ に関して各々対称となつてゐる。この場合、 α_2 と α_3, α_4 と α_5 のおこみは各々同じくできる。 $w_2 = w_3 = 1, w_4 = w_5 = 3, w_1 = 6$ 。しきい値の数は3。

3.4. 3変数, 4変数論理関数の実現。

論理関数は変数の否定, 関数の否定, 変数の置換をどのようにほどこしても相互に移り得ない, いくつかの族に分けられる。これらの各族を非同族関数と云い, その数は3変数関数では10, 4変数関数では221ある。変数の否定, 関数の否定は, しきい値論理からみれば, 各々対応あるパラメータの符号を変えることであり, 変数の置換はおもひの置換に対応あるから, 各族の代表関数を実現すれば, あとはパラメータの変換で関数全体が実現できる。その結果3変数論理関数の実現に必要なしきい値の最大個数は3, 4変数論理関数では5である。従って回路網による実現には各々2個, 3個で十分である。

3.5. 関数展開に基づく実現。

n 変数論理関数はある変数 x_i に関して

$$f = x_i f(x_i=1) + \bar{x}_i f(x_i=0) \quad \text{と展開できる。}$$

但し $f(x_i=C)$ は論理関数 f の変数 x_i に $C (=1, 0)$ を代入した関数。

[補題 3.5] f_n が n 変数しきい値関数であれば, $f_p = x_k f_n$ もしきい値関数である。

(証明) $f_p = x_k f_n$ についてのしきい値, おもひを次の様にとれば x_k と f_n に関する真理値表から補題が成り立つ。

$$\Gamma^P = \sum_{i=1}^n w_i^n + 1, \quad w_k^P = \Gamma^P - \Gamma^n, (k=n+1);$$

$$w_k^P = \Gamma^P - \Gamma^n + w_k^n, (k < n+1); \quad w_i^P = w_i^n \quad (i \neq k).$$

上部の添数 P , n は各々 f_P, f_n に関することを表わす。 |

$f(x_i=1)$ が 2.2 で述べた k_1 個の素子のカスケード回路網で実現されるとき, (2.2), 又は (2.3) と [補題 3.5] より $f(x_i=1)$ は高々 k_1 個の素子のカスケード回路網で実現されることがわかる。同様に, $f(x_i=0)$ が k_2 個の素子のカスケード回路網で実現されるならば, $\bar{x}_i \cdot f(x_i=0)$ は高々 k_2 個の素子のカスケード回路網で実現される。

[性質 3.10] $f(x_i=1)$ が k_1 , $f(x_i=0)$ が k_2 個の素子で実現されるとき, f は $\max(k_1, k_2) \leq k \leq k_1 + k_2$ なる k で実現される。

[性質 3.10] と 4 変数論理関数が素子数 3 個のカスケード回路網で実現できることから次の性質が成り立つ。

[性質 3.11]. n 変数論理関数を実現するのに必要な素子数を M_n とすれば, 次の範囲で与えられる。

$$3 \cdot 2^{n-5} \leq M_n \leq 3 \cdot 2^{n-4}.$$

[性質 3.12]. $(n+1)$ 変数論理関数 f^{sd} (又は f^{scd}) は, n 変数論理関数 f が p 個の素子で実現されるならば, 次の範囲の m 個の素子で実現される。

$$p \leq m \leq 2p.$$

(証明) $f^{sd} = \lambda_{n+1} \cdot f + \bar{\lambda}_{n+1} \cdot f^d$ であるから, f が p 個の素子で実現されるから, $\lambda_{n+1} \cdot f$ も p 個で実現される。 $\bar{\lambda}_{n+1} \cdot f^d$ も [補題 3.4] より p 個で実現される。従って [性質 3.10] より $p \leq m \leq 2p$ なる m で f^{sd} は実現される。 f^{scd} も同様。 ■

結論

本論文では, しきい値回路網の教種類のモデルについて, その性質や能力について考察した。特にハイブリッド回路網の構成についてくわしく述べた。

今後の問題としては, 同一おもむベクトルを如何に決定するかということ, 各素子のおもむベクトルが異なった場合の可変しきい値回路網の解析, ハイブリッド回路網による擬似論理関数, 多値論理関数の合成等がある。

おわりに日頃熱心に討論して下さる研究室の諸氏に感謝する。

文献

- 1) 安宅彦三郎 "ブール代数" 共立, 昭44.
- 2) M. A. Harrison "Introduction to switching & automata theory" McGraw-Hill, 1965.
- 3) W. Feller "An introduction to probability theory &

its applications Vol 1" John Wiley & Sons, 1957.

4) G.G. Lendaris & G.L. Stanley "On the structure - dependent properties of adaptive logic networks" G. M. Defence Research Lab. July, 1963.

5). 室賀, 産田 "多数決素子の理論" 信学誌 Vol.43, No10, 昭35。

6). 室賀, 高須, 産田 "線形計画法に於る多数決素子の構造決定" 信学誌, Vol.43, No12, 昭35。

7). W.S.Meisel "Variable-threshold threshold elements" IE^3 , Vol.C-17, No7, 1968.

8). W.S.Meisel "Nets of variable-threshold threshold elements" IE^3 , Vol.C-17, No7, 1968.

9). D.R.Haring, & D. Ohori. "A tabular method for the synthesis of multi-threshold threshold elements" IE^3 , Vol.EC-16 No4, 1967.

10) R.F. Arnold & M.A Harrison "Algebraic properties of symmetric and partially symmetric Boolean functions" IE^3 , Vol.EC-12, No3, 1963.

11). R.H. Canaday "Two-dimensional iterative logic" Proc. F.J.C.C. 1965.

12). 今宮, 野口, 大泉 "とぎら値回路網の性質について" 通研談話会

記録, Vol. 40, No 2. 1971.

付録.

A.1. カスケット回路網の出力関数(1.4b)の証明.

$$\begin{aligned} H_k &= h_{k-1,k} + h_k \bar{H}_{k-1} = h_{k-1,k} + h_k \{ \bar{h}_{k-1} + \bar{h}_{k-2,k-1} H_{k-2} \} \\ &= h_{k-1,k} + h_k \bar{h}_{k-1} + h_k \bar{h}_{k-2,k-1} H_{k-2}. \end{aligned}$$

k を奇数として, k-2 まで (1.4b) が成り立つと仮定。

$$\begin{aligned} H_{k-2} &= \sum_{j=1}^{k-1/2} \left\{ \prod_{\ell=j}^{k-1/2} h_{zj-2, 2j-1} \cdot \bar{h}_{2\ell-1, 2\ell} \cdot h_{2\ell+1} + \prod_{\ell=j}^{k-1/2} \bar{h}_{zj} \cdot h_{2\ell+1} \cdot \bar{h}_{2\ell+1, 2\ell+2} \right\} \\ H_k &= h_{k-1,k} + h_k \bar{h}_{k-1} + h_k \bar{h}_{k-2,k-1} \sum_{j=1}^{k-1/2} \left\{ \prod_{\ell=j}^{k-1/2} h_{zj-2, 2j-1} \cdot \bar{h}_{2\ell-1, 2\ell} \cdot h_{2\ell+1} \right. \\ &\quad \left. + \prod_{\ell=j}^{k-1/2} \bar{h}_{zj} \cdot h_{2\ell+1} \cdot \bar{h}_{2\ell+1, 2\ell+2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1/2} \left\{ \prod_{\ell=j}^{k+1/2} h_{zj-2, 2j-1} \cdot \bar{h}_{2\ell-1, 2\ell} \cdot h_{2\ell+1} + \prod_{\ell=j}^{k+1/2} \bar{h}_{zj} \cdot h_{2\ell+1} \cdot \bar{h}_{2\ell+1, 2\ell+2} \right\} \end{aligned}$$

A.2. (2.2) 又は (2.3) の証明. ⇒ [性質 2.1] の証明.

k (奇数) まで (2.2) を満足すると仮定。

$$\begin{aligned} H_k &= (1^{\omega_{0,k+1}}, \lambda_w, H_k^{\omega_{k,k+1}}) = H_k (1^{\omega_{0,k+1} + \omega_{k,k+1}}, \lambda_w) \\ &\quad + \bar{H}_k (1^{\omega_{0,k+1} - \omega_{k,k+1}}, \lambda_w) \end{aligned}$$

$$\therefore H_{k+1} = H_k \cdot g_{k+1} + \bar{H}_k \cdot \bar{f}_{k+1},$$

$$\omega_{0,k+1} - \omega_{k,k+1} > \omega_{0k} - \omega_{k-1,k}, \quad \omega_{0k} + \omega_{k-1,k} > \omega_{0,k+1} + \omega_{k,k+1} \quad \& \text{ 1) ,}$$

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= g_{k+1} + f_{k+1} \bar{f}_k + f_{k-1} \bar{f}_{k-2} + \dots + f_2 \bar{f}_1 + g_2 \bar{g}_3 + \dots + g_{k-1} \bar{g}_k \\ &= \sum_{j=1}^{k+1/2} \left\{ f_{2j} \bar{f}_{2j-1} + g_{2j} \bar{g}_{2j+1} \right\}. \end{aligned}$$