数理解析研究所講究録
141巻 1972年 148-158

Cousin-II 問題と正則領域の関係について

福岡大理　吉田守

§1. 序

$\mathbb{C}^n$の任意の領域DはCousin-Iであり(Oka[11]),逆に$\mathbb{C}^2$の任意のCousin-I領域は正則領域である(Cartan[4]—Behnke-Stein[3])。更に連続な境界をもつ$\mathbb{C}^n$の領域Dは,$\mathbb{C}^n$の単連結な任意の柱状領域Kに対してD∩KがCousin-I開集合であるとき,正則領域である(Kajiwara[7])。

ところでCousin-II問題については事情がやや異なる。$\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}$はCousin-II領域であるが正則領域ではない例である(Thullen[12])。

$\mathcal{O}^*$を値0をとらない正則関数の芽の乗法群の層とするとき,$H^1(X,\mathcal{O}^*)=0$をみたす任意の複素解析空間XはCousin-II空間である。Kajiwara[8]は$H^1(D,\mathcal{O}^*)=0$をみたす$\mathbb{C}^2$の任意の領域Dは正則領域であることを示し,更にKajiwara[7]は連続な境界をもつ$\mathbb{C}^n$の領域Dは,$\mathbb{C}^n$の単連結な任意の柱状領域

Kに対して $H^1(D\cap K, \mathcal{O}^*)=0$ をみたすとき，正則領域であることを示した。端的にいえば，多くのCousin-II問題が解ける領域は正則領域である。

Thullen [13] は $\mathbb{C}^2$ の任意のCousin-II領域 D の閉包 $\bar{D}$ は D の正則包 $H(D)$ を含む，即ち $\bar{D}\supset H(D)$ を示した。その系として，連続な境界をもつ $\mathbb{C}^2$ 内の任意のCousin-II領域は正則領域であることが示される。

本講演では，このThullenの結果を述べ，その結果とHitotumatuの結果 [5] の応用として，上述のKajiwaraの結果で $H^1(D, \mathcal{O}^*)=0$ をCousin-IIでおきかえたもの，即ち「連続な境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の領域は，$\mathbb{C}^n$ の単連結な任意の柱状領域 K に対して $D\cap K$ がCousin-II開集合であるとき，正則領域である」という我々の先著論文Adachi-Suzuki-Yoshidaの結果 [1] を紹介する。

§2. 定義と若干の準備.

D を $\mathbb{C}^n$ 内の開集合とする。族 $\mathcal{C}=\{(m_i, V_i)\ ;\ i\in I\}$ は次の条件をみたすとき D の'Cousin-II分布'という：

(1) $\mathcal{U}=\{V_i\ ;\ i\in I\}$ は D の開被覆である。

(2) 任意の $i\in I$ に対して m_i は V_i での有理型関数。

(3) 任意の $i, j\in I$ に対して m_i/m_j は，$V_i\cap V_j\neq\phi$ のとき，$V_i\cap V_j$ で値 0 をとらない正則関数。

Dにおける有理型関数mは，任意の$i\in I$に対してm/m_iが値0をとらない正則関数であるとき，Cousin-II分布$\mathcal{C}$の“解”という。$\{(m_i, V_i)\}$を有理型関数の鎖とよぶ。同様に正則関数の鎖のなすCousin-II分布が考えられるがDで正則関数の鎖のなすCousin-II分布が常に解をもてば，有理型関数の鎖のなすCousin-II分布も常に解をもつことがわかっている。また，$\mathbb{C}^n$の開集合Dは，Dの任意のCousin-II分布が解をもつとき，Cousin-II開集合とよび，更にDが連結であればCousin-II領域とよぶ。

K_iを複素平面$\mathbb{C}$内の単連結領域とするとき，K_iの直積$K\equiv K_1\times K_2\times\cdots\times K_n$を以後単に柱状領域とよぶ。$\mathbb{C}^n$の開集合Dは，任意の柱状領域Kに対して$D\cap K$がCousin-II開集合のとき‘II-regular’とよぶ。Kは任意であるので，$\mathbb{C}^n$のII-regular開集合は勿論Cousin-II開集合である。

また，$\mathbb{C}^n$の領域Gが‘II-regular領域達の単調増加列の極限’とは，$G_p\subset\subset G_{p+1}$ $(p=1,2,\cdots)$，$G=\bigcup_{p=1}^{\infty}G_p$であるようなII-regular領域達の列$\{G_p, p=1,2,\cdots\}$が存在するときをいう。

実m次元ユークリッド空間R^mの部分集合SがSの点xで連続とは，xの近傍Vで，あるjに対して変数$x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n$の連続関数$f$が存在して，

$$S \cap V = \{x \in V \ ; \ x_j = g(x_1, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_m)\}$$

とかけるときをいう。ここに記号^はその成分が除かれることを示す。またR^mの開集合Gの境界点xは，境界∂Gがxで連続のとき，連続な境界点という。各境界点が連続であるような$\mathbb{C}^n$の領域Dは連続な境界をもつという。

$\mathbb{C}^n$の領域DがDの境界点xで擬凸とは，適当なxの開近傍Vが存在して，$D \cap V$が正則凸となる場合をいう。Dの各境界点で擬凸のとき，Dは，単に，擬凸という。

Oka [11] による Levi の問題への肯定的解決により次を得る。

定理1. $\mathbb{C}^n$の領域Dは，Dが擬凸のときに限って正則領域である。

Hitotumatu [5] は次の定理2が Levi の問題に同値であることを示したが，Leviの問題は肯定的に解かれたので次の定理2を得る。

定理2. $\mathbb{C}^n$ $(n \geqq 3)$ の領域Dは，$\mathbb{C}^n$の任意の(複素)2次元の解析的平面Eに対して $D \cap E$ がEで正則開集合のとき，正則領域である。

(注) 以後断りなく単に'2次元'というときは複素2次元を表わすものとする。

次の定理は Kajiwara [6] の特別な場合である。

定理3．$\mathbb{C}^n$の単連結領域Dは，単連結なCousin-II領域達の単調増加列の極限であるとき，Cousin-II領域である。

§3. Cousin-II問題に関するThullenの結果

P. Thullen [13] は次の定理を示した。

定理4．Gは$\mathbb{C}^2$内のCousin-II領域とし，$H(G)$をその正則包，$\overline{G}$をその閉包とするとき，$H(G) \subset \overline{G}$

(証明)　証明は$\mathbb{C}^2$内の2重円板Uの外では解析的で，$\overline{U}$では真性特異点をもつ解析的平面が存在することからでてくる。簡単のため，$\mathbb{C}^2$の2つの独立変数をw, zで表わす。

$\mathfrak{G}^{(z)}$はz-平面上の円板$|z|<\delta$内にある単連結領域でその連続な境界はいたるところ実解析的でないようにえらんでおく。

$w=f(z)$は$\mathfrak{G}^{(z)}$の外部を円板$|w|<\delta$に正則に写し，$\mathfrak{G}^{(z)}$の境界$\partial\mathfrak{G}^{(z)}$は円$|w|=\delta$に写すようなリーマンの写像関数とする。

多様体$A=\{(w,z)\,;\ w-f(z)=0\}$が求める解析的平面である。Aは$\{(w,z)\,;\ |w|=\delta,\ |z|<\delta\}$の上でそのすべての点がAの特異点であるような閉じた実1次元の境界曲線をもっている。またAはそれ以外には特異点をもたず，平面$\{(w,z)\,;\ z=z',\ |z'|\geqq\delta\}$は円板$|w|<\delta$の内部ではAと唯一度しか交わらない。

$H(G)-G$が内点P_0をもつと仮定して矛盾を導こう。

今 P_0 のある近傍 $U(P_0)$ が $H(G)-G$ に含まれていたとする。$P_0=(0,0)$，$U(P_0)=\{(w,z);\ |w|<\delta,\ |z|<\delta\}$ として一般性を失なわない。

G の内点 (w_1, z_1) を点 $P_1=(0, z_1)$ に写し，G の像は（柱状領域 $\{|w|<\delta,\ |z|>\delta\}$ に含まれる）近傍

$U(P_1)=\{(w,z);\ |w|<\varepsilon,\ |z-z_1|<\varepsilon\}$

を含むような1次変換がある。

$A=\{(w,z);\ w-f(z)=0\}$ が上述の方法で作られたものであれば，A は縮小された柱状領域 $\{|w|<\varepsilon,\ |z|>\delta\}$ で解析的であるが，$\overline{U(P_0)}$ では特異点をもつ。A は $U(P_1)$ を通り G 全体で解析的で Cousin-II 分布を与える。

Cousin-II 問題が G で解ければ A を零点面とする G における正則解 $F(z,w)$ が存在する。$F(z,w)$ は $H(G)$ でも正則で

$U(P_0)\subset H(G)$。

$F(z,w)$ は $U(P_0)$ の近傍へも解析的に接続されることになるが，A は $\overline{U(P_0)}$ で真性特異点をもっていたことに反する。

（証了）

この定理の系として次を得る。

定理5. C^2 の連続な境界をもつ Cousin-II 領域 G は正則領域である。

（証明）G は連続な境界をもっているので G の閉包 $\overline{G}$ の

開核 $(\mathring{G})$ はG自身，即ち $(\mathring{G}) = G$ である。

前定理より $\overline{G} \supset H(G)$. 故に $G = (\mathring{G}) \supset H(G)$

逆に $G \subset H(G)$ は明らか。故に $G = H(G)$

これは G が正則領域であることを意味する。（証了）

§4. Thullen の結果の応用

定理 6. II-regular 領域達の単調増加列 $\{D_\nu ; \nu=1,2\cdots\}$ の極限で，連続な境界をもつような $\mathbb{C}^n\ (n \geqq 3)$ の領域 D は，$\mathbb{C}^n$ の任意の２次元解析的平面 H に対して，$D \cap H$ 及び $D_\nu \cap H$ $(\nu=1,2,\cdots)$ が単連結であるとき，正則領域である。

（証明）$D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu$ ， $D_\nu \subset\subset D_{\nu+1} \subset\subset D$. $(\nu=1,2,\cdots)$

ここに各 D_ν は $\mathbb{C}^n$ の連続な境界をもつ II-regular 領域達。

$\mathbb{C}^n$ の２次元解析的平面を $H = \{(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n) ; z_3 = \cdots = z_n = 0\}$ としてかまわない。 $\mathcal{C} = \{(m_i, V_i) , i \in I\}$ を $D \cap H$ における Cousin-II 分布とする。十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$E_\nu \equiv D_\nu \cap \{(z_1, \cdots, z_n) ; |z_3| < \varepsilon, \cdots, |z_n| < \varepsilon\}$$

$$\subset \{(z_1, \cdots, z_n) , |z_3| < \varepsilon, \cdots, |z_n| < \varepsilon, (z_1, z_2, 0, \cdots, 0) \in D \cap H\}$$

D_ν は II-regular であるから E_ν は $\mathbb{C}^n$ の Cousin-II 領域である。

$$V_i^\nu \equiv D_\nu \cap \{|z_3| < \varepsilon, \cdots, |z_n| < \varepsilon, (z_1, z_2, 0, \cdots, 0) \in V_i\}$$

V_i では $M_i^\nu(z) = m_i(z_1, z_2)$ とおくとき，$\mathcal{C}_\nu \equiv \{(M_i^\nu, V_i^\nu), i \in I\}$ は E_ν の Cousin-II であり，E_ν は Cousin-II であるので $\mathcal{C}_\nu$ は解 $M^\nu(z)$ をもつ。$M^\nu(z)$ の $D_\nu \cap H$ への制限 $m^\nu(z)$ は，制限分布

$\{(m_i | D_\nu \cap H,\ V_i \cap D_\nu \cap H)\ ;\ i \in I\}$ の解である。

このとき定理3により $\mathfrak{C}$ は $D \cap H$ で解をもつ。

従って $D \cap H$ は $\mathbb{C}^2$ の連続な境界をもつ Cousin-II領域となり定理5から $D \cap H$ は $\mathbb{C}^2$ の正則領域である。H は任意の2次元解析的平面であったことに注意すれば定理2より D は正則領域となる。（証了）

定理7. $\mathbb{C}^n\ (n \geqq 3)$ の連続な境界をもつII-regular領域Dは正則領域である。

(証明) 定理1から，Dの任意の境界点z^0に対して $D \cap V$ が正則開集合であるような z^0の近傍Vが存在することをいえばよい。一般性を失うことなく，z^0はDの連続な境界点であるので，z^0のある多重円板Vである連続関数gに対して，

$$\partial D \cap V = \{z \in V\ ;\ x_n = g(z_1, \cdots, z_{n-1}, y_n)\}$$

としてよい。ここに $z_n = x_n + \sqrt{-1}\, y_n$.

十分小さいVに対して次の3つの場合(1),(2),(3)が起る。

(1) $D \cap V = \{z \in V\ ;\ x_n < g(z_1, \cdots, z_{n-1}, y_n)\}$

(2) $D \cap V = \{z \in V\ ;\ x_n > g(z_1, \cdots, z_{n-1}, y_n)\}$

(3) $D \cap V = \{z \in V\ ;\ x_n \neq g(z_1, \cdots, z_{n-1}, y_n)\}$

(1)の場合：Vを多重円板にとりその半径をrとし，V_tは中心z^0，半径 $r-t$ の多重円板とする。$(0 \leqq t \leqq r)$

$E_t = \{z \in V_t\ ;\ x_n < g(z_1, \cdots, z_{n-1}, y_n) - t\}$ はII-regularな開集合

である。実際，Pを柱状領域とし，双正則写像
$\varphi:(z_1,\cdots,z_n)\to(w_1,\cdots,w_n)$ を次で定義する；

$$w_j=z_j\quad(j=1,2,\cdots,n-1),\qquad w_n=z_n+t$$

このとき，$E_t\cap P$ は φ により

$$\{w\,;\,u_n<g(w_1,\cdots,w_{n-1},v_n),\ (w_1,\cdots,w_{n-1},w_n-t)\in V_t\cap P\}$$

$$=D\cap\varphi(V_t)\cap\varphi(P)$$ の上に写される。

ここに $\varphi(V_t)$ は中心 $(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n+t)$，半径 $r-t$ の多重円板で，$\varphi(P)$ は Pの像であるところの柱状領域である。

Dは II-regular であるので $D\cap\varphi(V_t)\cap\varphi(P)$ は Cousin-II 領域，従って $E_t\cap P$ も Cousin-II 領域である。故に E_t は II-regular 開集合である。

任意の2次元解析的平面Hに対して，$E_t\cap H$ はVを適当にえらべば単連結にとれる。$D\cap V$ は II-regular 領域 E_t の単調増加列の極限であるから，定理6により $D\cap V$ は正則領域である。

(2)の場合は(1)の場合と同様である。

(3)の場合：$D_1\equiv\{z\in V\,;\,x_n<g(z_1,\cdots,z_{n-1},y_n)\}$

$D_2\equiv\{z\in V\,;\,x_n>g(z_1,\cdots,z_{n-1},y_n)\}$

とおくとき，D_1，D_2 は II-regular 開集合達であり，(1),(2)の場合と同様にして z^0 で擬凸，従って $D\cap V=D_1\cup D_2$ は正則開集合である。(証了)

参考文献

[1] K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, Cousin-II domains and domain of holomorphy, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 2 (1970) p.242-248

[2] H. Behnke, Généralisation du théorème de Runge pour les fonctions multiformes des variables complexes. Coll. sur les fonct. des plus. var. Bruxelles (1953)

[3] H. Behnke und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zur vorgegebenen Null- und Pollstellenflächen. Jber. Deut. Math. Verein. 47 (1937) p.177-192

[4] H. Cartan, Sur les premières problemes de Cousin. C.R.Paris 207 (1938) p.558-560

[5] S. Hitotumatu, On some conjectures concerning pseudoconvex domains, J. Math. Soc. Japan 6 (1954) p.177-195

[6] J. Kajiwara, On the limit of a monotonous sequence of Cousin's domains. J. Math. Soc. Japan 17 (1965) p.36-46

[7] ____, Some characterizations of Stein manifold through the notion of locally regular boundary points. Kodai. Math. Sem. Rep. 16 (1964) p.191-198

[8] ____, Note on a Cousin-II domain over $\mathbf{C}^2$, Ibid. 17 (1965) p.44-47

[9] J. Kajiwara, Relations between domains of holomorphy and multiple Cousin's problems. Ibid. p.261-272

[10] ____, Some extentions of Cartan-Behnke-Stein's theorem, Math. Sci. Kyoto Univ. 1 (1966) p.133-156

[11] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables: II Domains d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ. 7 (1937) p.115-130

[12] P. Thullen, Sur les deusième probleme de Cousin. C.R.Paris

[13] ____, Bemerkungen über analytische Flächen im Räume von n komplexen Veränderlichen im Zusammenhang mit dem zweiten Cousinischen Problem. Math. Ann. 183 (1969) p.1-5