数理解析研究所講究録
141巻 1972年 141-147

ある積多様体上の Leviの問題について

九大理　　真 次 康 夫

§1. 序

Sを$Stein$多様体, Tを1次元の複素トーラス, $E=S\times T$, $\pi: E\to S$を射影, DをEの部分領域とする。本講演の目的はDが$Stein$多様体であるための必要十分条件は, Dが$Cartan$擬凸であるとともにSの任意の点xに対して$\pi^{-1}(x)\not\subset D$が成立することであるという, 講演者が最近えた結果を紹介することにある。Tが任意のコンパクト$Riemann$面の場合に同じ命題を予想しているが, まだ証明に完全に成功してはいない。証明にはまず$\mathbb{C}^n$においては$H\ddot{o}rmander$ [2]の流儀に従って$Friedrichs$の軟化子や強烈に凸な関数を用いてD上の多重劣調和関数や強多重劣調和関数を作り, $Narasimhan$[3]の結果に帰着させる。$Stein$多様体の場合には, $Docquier$-$Grauert$ [1]の埋蔵を用いて$\mathbb{C}^n$の場合に帰着させる。

§2. $\mathbb{C}^n$における場合

(B,β)を$\mathbb{C}^n$の上の正則領域とする。$T=\mathbb{C}/\Gamma$を1次元の複素トーラスとする。但しω_1, ω_2を$\mathbb{R}$上一次独立な二つの複素数とし，これらによって生成される$\mathbb{Z}$-加群をΓで表わす：$\Gamma=\{m_1\omega_1+m_2\omega_2\ ;\ m_1, m_2\in\mathbb{Z}\}$。トーラス$T$はコンパクトなRiemann面である。また$\mathbb{C}$から$T$への自然な写像$\tau$は局所双正則写像である。二つの複素多様体$B$, Tの直積多様体$B\times T$をEで表わし，EからBへの射影をπで表わすことにする。

先づ，次の補題を証明する：

<u>補題</u>　DをEのCartan擬凸な開部分集合とする。即ち，Dの任意の境界点xに対し$D\cap U$がStein多様体となるような，xの近傍Uが存在する。このとき，Bの任意の点xに対し，$\pi^{-1}(x)\not\subset D$が成立すれば，DはStein多様体である。

証明．Bの恒等写像1と$\mathbb{C}$からTへの写像τとの直積写像を$1\times\tau$とする：$(1\times\tau)(y,z)=(y,\tau(z))$。写像$1\times\tau$は$B\times\mathbb{C}$から$E$への局所双正則写像である。写像$1\times\tau$による$D$の逆像$(1\times\tau)^{-1}(D)$を$A$とおけば，$D$がCartan擬凸であることから容易にわかるように，AはCartan擬凸である。AはΓ-不変である。即ち，Γの任意の元γを固定するとき，Aは$B\times\mathbb{C}$の変換：$(y,z)\mapsto(y,z+\gamma)$によって不変。$B\times\mathbb{C}$から$\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}=\mathbb{C}^{n+1}$への写像$\beta\times 1$の$A$への制限を$\alpha$とする：$\alpha=(\beta\times 1)|A$.。$(A,\alpha)$は$\mathbb{C}^{n+1}$の

上のCartan擬凸な領域である。$\mathbb{C}^{n+1}$の上の領域$B\times\mathbb{C}$の距離関数$d(y,z)$はD上の関数$d(y,t)$を導く。実際，Dの任意の点(y,t)，$y\in B$，$t\in T$に対し，同値類tの二つの代表元$z,z'\in\mathbb{C}$を取るとき$z'=z+\gamma$なる$\gamma\in\Gamma$が存在する。ところがAはΓー不変であった。従って$d(y,z')=d(y,z)$が成立するからである。Aは擬凸だから，Oka [4]により関数$-\log d(y,z)$はA上で連続な多重劣調和関数である。したがって，関数$-\log(y,t)$はD上で連続な多重劣調和関数になる。従ってまた，$1/d(y,t)=e^{-\log d(y,t)}$も$D$上で連続な多重劣調和関数である。

他方，BはSteinだから，次のような性質をみたす無限回連続微分可能な強多重劣調和関数$\varphi>0$が存在する：任意の実数$c>0$に対し　$B_c=\{y\in B;\ \varphi(y)<c\}\subset\subset B$.

D上の関数　$r(y,t)=\dfrac{1}{d(y,t)}+\varphi(y)$　は連続な多重劣調和関数である。任意の実数$c>0$に対し

$$
\begin{aligned}
D_c&=\{(y,t)\in D;\ r(y,t)<c\}\\
&\subset B_c\cap\{(y,t)\in D;\ d(y,t)>\tfrac{1}{c}\}\subset\subset D
\end{aligned}
$$

が成立する。

$D=\bigcup_{c>0}D_c$であるから，D_cがSteinであることを示せば，D自身がSteinである事が知れる。そこでD_cがSteinであることをみることにする。

任意の$y\in B$に対し

$$A(y)=\{z\in\mathbb{C}\,;\,(y,\tau(z))\in D\}$$

とおく。補題の仮定により，$A(y)\subsetneqq\mathbb{C}$

B上の可測関数$a(y)$を，Bの各点yに対し，条件

$$a(y)\in\mathbb{C}-A(y)$$

を満たすように取る。

$0<\varepsilon<\frac{1}{c+1}<\frac{1}{c}$なる十分小さな実数$\varepsilon$に対し，$D_{c+1}$上の関数$p(y,t)$を次のように定義する：

$$p(y,t)=\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{\xi\in B}\rho\left(\frac{y-\xi}{\varepsilon}\right)\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda(\xi)}{|z-a(\xi)-m_1\omega_1-m_2\omega_2|^2}+\chi(g(y))$$

但し，ρはFriedrichsの軟化子，χは$\mathbb{R}$上のC^∞級単調増加凸関数で，$\chi'>0$，$\chi''>0$が大きいものとする。また，$\sum$内のzはtの一つの代表元である。明らかに，和$\sum$は一様収束し，代表元zの選び方によらない。

第一項を$S(y,z)$とおき，pのLevi形式$L(p)$を評価する：

$$L(p)=\frac{\partial^2 S}{\partial z\partial\bar z}dz\,d\bar z+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial z\partial\bar y_j}dz\,d\bar y_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial\bar z\partial y_j}d\bar z\,dy_j$$
$$+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial y_j\partial\bar y_k}dy_j\,d\bar y_k+\chi'(g(y))\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial y_j\partial\bar y_k}dy_j\,d\bar y_k+\chi''(g(y))\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_j}dy_j\right|^2$$

項別微分を行うと

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z\partial\bar z}=\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{\xi\in B}\rho\left(\frac{y-\xi}{\varepsilon}\right)\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda(\xi)}{|z-a(\xi)-m_1\omega_1-m_2\omega_2|^4}>0$$

$D_c\subset\subset D_{c+1}$だから，

$$3m_c^2=\inf_{D_c}\frac{\partial^2 S}{\partial z\partial\bar z}>0$$

gは強多重劣調和関数であったから定数$M_c>0$が存在して

$$L(g)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial y_j\partial \bar{y}_k}dy_j d\bar{y}_k \geqq 4M_c^2\sum_{j=1}^{n}|dy_j|^2$$

が成立する。また十分大きな数$L_c>0$を取れば，D_c上で

$$\left|\frac{\partial^2 s}{\partial z\partial y_j}\right|\leqq L_c,\ \left|\frac{\partial^2 s}{\partial \bar{z}\partial y_j}\right|\leqq L_c,\ \left|\frac{\partial^2 s}{\partial y_j\partial \bar{y}_k}\right|\leqq L_c\quad (j,k=1,\cdots,n)$$

が成立する。ゆえに

$$L(p)\geqq 3m_c^2|dz|^2+4\chi'(g(y))M_c^2\sum_{j=1}^{n}|dy_j|^2-2L_c|dz|\sum_{j=1}^{n}|dy_j|$$
$$-L_c\sum_{j=1}^{n}|dy_j|^2$$

従って，

$$\chi'(g(y))\geqq \max\left(\frac{L_c}{M_c^2},\frac{L_c^2}{m_c^2M_c^2}\right)\quad \text{on } D_c$$

に取っておけば，

$$\begin{aligned}L(p)&\geqq m_c^2|dz|^2+L_c\sum_{j=1}^{n}|dy_j|^2\\&\quad+2m_c^2|dz|^2+2\frac{L_c^2}{m_c^2}\sum_{j=1}^{n}|dy_j|^2-2L_c|dz|\sum_{j=1}^{n}|dy_j|\\&\geqq m_c^2|dz|^2+L_c\sum_{j=1}^{n}|dy_j|^2\end{aligned}$$

が成立する。よって，$p(y,t)$はD_cで強多重劣調和である。ゆえに，Narasimhan [3] により，D_cは Stein である。(証明終).

§3. Stein 多様体における場合

§2 で証明した補題により，次の定理が導かれる：

<u>定理</u>. Sを Stein 多様体とする。EをSと1次元トーラスTとの直積，πをEからSへの射影とする。DをEの開部分集合とする。このとき，Dが Stein 多様体であるための必要十

分条件は，Dが Cartan 擬凸であり且つSの任意の点xに対し$\pi^{-1}(x) \not\subset D$が成立することである。

証明．埋蔵定理により，Stein 多様体Sを$\mathbb{C}^n$の特異点をもたない解析的集合とみることができる。Docquier-Grauert [1] により，Sに対し正則領域(B, β)および

$$\rho : B \longrightarrow S \quad , \quad \rho | S = S\text{の恒等写像}$$

なる正則写像ρが存在する。直積$G = B \times T$から直積$E = S \times T$への正則写像$\xi = \rho \times 1$の$S \times T$への制限は恒等写像である。写像ξによるDの逆像$\xi^{-1}(D)$は補題の条件をみたすGの Cartan 擬凸な開部分集合である。従って，$\xi^{-1}(D)$は Stein である。Dは$\xi^{-1}(D)$の特異点をもたない解析的集合になっているから，やはり Stein である。（証明終）

引用文献

[1] Docquier, F., u. H. Grauert : Levisches Problem und Rungerscher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten.
Math. Ann. 140, 94-123(1960).

[2] Hörmander, L. : An introduction to complex analysis in several variables. D. Van Nostrand, (1966).

[3] Narasimhan, R. : The Levi problem for complex spaces I,II Math. Ann. 142, 355-365(1961), 146, 195-201(1962).

[4] Oka, K. : Sur les fonctions analytiques des plusieurs variables. IX. Domaines finis sans points critiques intérieur, Japan. J. Math. 23, 97-155(1953).