

## 強擬凸領域における正則関数の 積分表示

富山大 文理 鈴木正昭

序

最近 Ramirez [13], Henkin [5] は  $\mathbb{C}^n$  内の有界強擬凸領域で正則関数に対する正則核をもつ積分表示を具体的に与えている。(  $\mathbb{C}^n$  内の有界領域における積分表示で正則核をもつものが存在することはそれ以前に Bungart [1], Gleason [2] が示している。)

一方 Hörmander は 1964 年  $\bar{\partial}$ -問題を Stein 多様体内の強擬凸部分領域において肯定的にといた。 ([7], [8])。つまり  $\bar{\partial}$  で  $\bar{\partial}$ -closed な係数を  $L^2$  にもつ  $(0,1)$ -form  $\alpha$  に対して  $\bar{\partial}u = \alpha$  ( $\bar{\partial}$  は超関数の意味で) とするよう  $L^2$ -関数  $u$  が存在することを示した。その  $u$  の解  $u$  は  $L^2$ -estimate  $\|u\|_{L^2} \leq K \|\alpha\|_{L^2}$  をみたす。(  $K$  は  $\alpha$  に無関係だが領域に depend する定数)

Grauert-Lieb [3] は  $\mathbb{C}^n$  内の有界強擬凸領域  $G$  での  $\bar{\partial}u = \alpha$  の解  $u$  を Ramirez の核をもちいて積分であらわし,

それから解の sup-norm estimate をえた。Kergmann [9] は Ramirez, Granert-Lieb らの方法を locally に用いることにより、 $\bar{\omega}$ -問題の解の estimate に対してよりくわしく論じた。そして次の結果をえた。「Stein 多様体上の relatively compact な強擬凸領域  $G$  において  $\alpha \in L^p(G)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) なる  $\bar{\omega}u = \alpha$  の解  $u$  が  $L^p(G)$  に存在し、かつ

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq K \|\alpha\|_{L^p(G)}$$

をみたす。」

この小論では以上のことについての  $\bar{\omega}$  と共にこれらの応用について少しふれる。

### §1. 強擬凸領域における正則関数の積分表示.

以下  $G$  は  $\mathbb{C}^m$  内の有界強擬凸領域でその境界  $\partial G$  は  $C^{k+2}$  級 ( $k \geq 2$ ) とする。つまり  $G$  は  $\partial G$  の近傍  $U$  と  $\bar{\omega}$  での強多重調和関数中により  $G \cap U = \{x \in U; \phi(x) < 0\}$  とあらわされる。(ただし  $d\phi \neq 0$  on  $\partial G$ ).

$G$  で正則な関数全体の作る ring を  $H(G)$ ,  $H(G)$  の元で  $\bar{\omega}$  で連続なものの全体を  $A(G)$  とかく。

$A(G)$  の関数に対する積分表示の核は Ramirez の方法でつくろ。まず出発点となるのは次の補題である (Koppelman [10]).

$D$  は  $\mathbb{C}^n$  内の有界領域とし、その境界  $\partial D$  は有限個の  $C^1$ -部分からなる。 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$  内で  $\partial D \times D$  の近傍  $W$  とする。 $g_j(x, y)$  は  $W$  上の  $C^2$ -級関数 ( $j=1, \dots, n$ ) であるとき  $g(x, y) \equiv \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) g_j(x, y)$  とおく。 $\partial D \times D$  上で  $g(x, y) \neq 0$  のとき次のように  $\partial D \times D$  上の微分形式をつくる。

$$(1) \quad \Omega_y^*(x) = \frac{(n-1)! \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g_j \wedge \bar{\partial}_x g_j \right) \wedge \prod_{k=1}^n dx_k}{(2\pi i)^n g(x, y)^n}$$

$$x \in \partial D, \quad y \in D$$

補題 1.1 a)  $d_x \Omega_y(x) = \bar{\partial}_x \Omega_y(x) = 0$

b) for  $\forall f \in A(D)$

$$f(y) = \int_{\partial D} f(x) \Omega_y(x) \quad y \in D.$$

まず前記の領域  $G$  に対して  $g(x, y) \neq 0$  on  $\partial G \times G$ ,  $g(x, x) = 0$  for  $x \in \partial G$  なる関数をつくる。

補題 1.2  $\partial G$  の近傍  $U$  と  $\bar{G}$  の近傍  $V$  があて、 $U \times V$  上で定義され  $y \in V$  に関して正則  $x \in U$  に関して  $C^k$ -級の関数  $f(x, y)$  で次の条件をみたすものがあつた。

a)  $\operatorname{Re} f(x, y) > 0$  for  $(x, y) \in \partial G \times \bar{G} - D$

b)  $f(x, y) = 0$  for  $(x, y) \in (U \times V) \cap D$

ただし  $D$  は  $U \times V$  の対角集合。

[証] 概略をのべる(くわしくは問をみてください。)  $G$  は一

様に Levi 全微分  $\tau$  から,  $x \in \partial G$  に対し  $y$  の 2 次多項式

$$P_x(y) = 2 \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) - \sum_{i,j=1}^n (x_i - y_i)(x_j - y_j) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

が  $(\partial G \times \partial G) \cap D$  の近傍で条件をみたすことはすぐわかる。

そしてこれを  $\{x\} \times \bar{G}$  の近傍へ拡張するのだが, そのとき

Fréchet space に値をもつ Cousin I-分布を解く必要が

おこる。そうして  $\partial G$  を有限個の近傍で cover し各近傍

$W \times \bar{G}$  で与られ  $K$   $g_W(x, y)$  と単位の分解をもつておく。

補題 1.3 補題 1.2 の  $g$  に対して次のような分解がある;

$$g(x, y) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) g_j(x, y) \quad (x, y) \in U \times V$$

ここで  $g_j(x, y)$  は  $y$  にかんして正則で,  $x$  にかん

しては  $C^k$ -級の関数

[証]  $g(x, x) = 0$  故に  $g(x, y)$  に Riemann の分解定理

([13] 定理 2) を適用すればよい。

この  $g$  および  $g_j$  を用いて (1) をつくれば  $y$  にかんして正則な核  $\hat{\Omega}_y(x)$  をえる。

$$(3) \quad \hat{\Omega}_y(x) \equiv \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g_j \wedge \bar{\partial}_x g_n \right) \wedge \prod_{l=1}^n dx_l}{\left\{ \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) g_j(x, y) \right\}^n}$$

これは  $A \equiv \{(x, y) \in U \times V, \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) g_j(x, y) \neq 0\}$

上で定義され  $K$   $x$  による  $\text{type}(n, n-1)$  の微分形式である。

補題 1.1 より次の定理をえる。

定理 1.1 a)  $d_x \hat{\Omega}_y(x) = \bar{\partial}_x \hat{\Omega}_y(x) = 0$

b)  $\bar{\partial}_y \hat{\Omega}_y(x) = 0$  (つまり  $\hat{\Omega}_y(x)$  は正則核である)

c) for  $\forall f \in A(G)$

$$f(y) = \int_{\partial G} f(x) \hat{\Omega}_y(x) \quad y \in G$$

$\hat{\Omega}_y(x)$  は  $y \in G$  によって正則ではあるが Bochner-Martinelli の核のような点特異性をもたない。そこで  $\hat{\Omega}_y(x)$  の  $C^\infty$ -拡張により点特異性をもつ正則核をつくろう。 $\partial G \times G$  上で  $\operatorname{Re} g > 0$  という条件はこれを可能にする。

$U_1 \subset U$  を  $\partial G$  の近傍をとる。 $U^* = U \cup G$  とおく。また

$$N = \{(x, y) \in \bar{U}_1 \times G : \operatorname{Re} g(x, y) \leq 0\}$$
 とする。

このとき次の条件をみたすような  $U^* \times G$  上の  $C^\infty$ -級関数  $\psi$  がある。

i)  $0 \leq \psi \leq 1$

ii)  $\partial G \times G$  のある近傍  $W_1$  と  $N \cup ((U^* - U_1) \times G)$  の近傍

$W_2$  に対して

$$\psi|_{W_1} \equiv 1 \quad \psi|_{W_2} \equiv 0$$

そこでこの  $\psi$  を用いて  $g_j, g'_j$  を次のようにつくる。

$$g_j(x, y) = \psi g_j(x, y) + (1 - \psi)(\bar{x}_j - \bar{y}_j) \quad j=1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} g'_j(x, y) &= \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) g'_j(x, y) \\ &= \psi g(x, y) + (1 - \psi) \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

このとき明らかに  $W_1$  では  $g'_j = g_j$ , また  $g_j$  は  $\partial G \times G$  の近傍 ( $\text{in } \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ ) で  $y$  にかんして正則だから  $g'_j$  もそうである。かつ

$$\operatorname{Re}(g'(x, y)) > 0 \quad \text{for } \forall (x, y) \in (U \cup G) \times G - D$$

この  $g'_j$  をもちいてつくりたい核  $\Omega_y(x) \in \text{Ramierey}$  の核とよぼう。Ramierey の核は  $y \in G$  にかんして正則かつ点特異性をもつ  $B \equiv (V \times G) - D$  ( $V: G$  のある近傍) 上で定義されたい微分形式である。

$$(3') \quad \Omega_y(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g'_j \wedge \bar{\partial}_x g'_k \right) \wedge \prod_{l=1}^n dx_l}{g'(x, y)^n}$$

定理 1.2 a)  $dx \Omega_y(x) = \bar{\partial}_x \Omega_y(x) = 0$  in  $B$

b)  $\bar{\partial}_y \Omega_y(x) = 0$  in a neighbourhood of  $\partial G \times G$

c) for  $\forall f \in A(D)$

$$f(y) = \int_{\partial G} f(x) \Omega_y(x) \quad \text{for } \forall y \in G$$

注) Denkin [5] もやはり補題 1.1 から出発して (3) で与えられる正則核  $\hat{\Omega}_y(x)$  をえてゐる。彼は Hörmander [7] の結果と Hefer の公式を使って  $y \in G$  にかんして正則な  $g_j(x, y)$  をつくりてゐる。

§2.  $\bar{\partial}$ -問題の解とその estimate.

$\omega$  を複素平面の領域とすると、任意の  $f(y) \in A(\omega)$  に対し Cauchy の積分表示が成立する。 ( $\omega$  は有界とする.)

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(x)}{x-y} dx \quad \text{for } \forall y \in \omega$$

この核  $\frac{1}{x-y}$  は  $y$  にかんして正則で点特異性をもち、

$$\int_{\omega} \frac{d\lambda(x)}{|x-y|} \leq K$$

を示す。  $K$  は  $y$  に無関係な constant で  $\omega$  が有界だから  $K < +\infty$ 。  $d\lambda(x)$  は複素平面上の Lebesgue measure.

Grauert-Lieb [3] は Ramirez の核  $\Omega_y(x)$  についても同じような  $L^1$ -estimate が成立することを証明した。つまり

定理 2.1  $G$  は今まで通りの領域とする。  $G$  に対する (3) で定義した Ramirez の核  $\Omega_y(x)$  の各項の係数  $b(x, y)$  に対して

$$\int_G |b(x, y)| d\lambda(x) \leq K$$

ここで  $d\lambda(x)$  は  $\mathbb{C}^m$  の Lebesgue measure が成立する。  $K$  は  $y$  に無関係な定数だが  $G$  および多重調和関数中に関係する。

$\alpha$  は有界強擬凸領域  $G$  上で定義された  $\bar{\partial}$ -closed な  $C^p$  form of type  $(0, 1)$  とする。 つまり

$$(4) \quad \alpha = \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu}(x) d\bar{x}_{\nu} \quad \frac{\partial \alpha_{\nu}}{\partial \bar{x}_{\mu}} = \frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial \bar{x}_{\nu}} \quad (\nu, \mu=1, \dots, m)$$

この  $\alpha$  に対し

$$(5) \quad \bar{\partial} u = \alpha \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_{\nu}} = \alpha_{\nu} \quad (\nu=1, \dots, m)$$

となる  $C^{\infty}$  関数  $u$  を求めるのが  $\bar{\partial}$ -問題であるが、その解が存在することはいろいろな方法で証明されている。(例えば Gunning-Rossi [4] Hörmander [7] など) もちろんその解は一意的には定まらない。

補題 2.1 ([3])  $G$  において

$$(6) \quad u(y) = - \int_G \alpha(x) \wedge \Omega_y(x)$$

は (5) の一つの解である。

証明  $G$  は強擬凸であるから  $\bar{\partial} v = \alpha$  となる  $G$  上の  $C^{\infty}$  関数  $v$  がある。  $u = v + (\text{正則関数})$  を示せばよい。くわしいことは省略する。〃

定理 2.1 を使って (6) を評価すると次の定理がえられる。

定理 2.2.  $G$  に対して  $G$  のみに  $\text{depend}$  する次のような定数  $K$  がある:  $G$  上の任意の  $\bar{\partial}$ -closed な  $C^{\infty}$ -form  $\alpha$  of type  $(0,1)$  に対し  $G$  上の  $C^{\infty}$ -関数  $u$  があって

$$\bar{\partial} u = \alpha \quad |u| < K|\alpha|$$

$$\text{K に対し} \quad |\alpha| \equiv \max_{\nu} \sup_{x \in G} |\alpha_{\nu}(x)|$$

$$|u| \equiv \sup_{x \in G} |u(x)|$$

とする。



注) Henkin [6] も同じ結果を示している。

- 一方 Kergmann [9] は Hörmander, Ramirez, Grauert-Lieb などの考えをまとめて  $\bar{G}$  の各点の近傍での  $\bar{u} = \alpha$  の local 解の 1 つを積分であらわし、それを評価し、local theorem を示した後、global theorem を証明した。それによってのべるためにいくつか記号を説明する。

$V \subset \mathbb{C}^m$  は開集合とし、 $\phi$  は  $C^1[V]$  に与えられる強多重調和関数、 $D = \{z \in V \mid \phi(z) < 0\}$  とする。  $B(z, r)$  は  $z$  を中心、半径  $r$  の  $\mathbb{C}^m$  内の ball とする。

$1 \leq p \leq +\infty$  に対して  $L_{0,1}^p(V)$  を係数が  $L^p(V)$  に与えられる  $(0,1)$ -form の全体とする。  $|\alpha(z)| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j(z)|$  とおく。

$L_{0,1}^p(V)$  は norm  $\|\alpha\|_p = \|\alpha\|_p$  によって Banach space をなす。 正しく  $1 \leq p < +\infty$  のとき  $\|\alpha\|_p = \left( \int_V |\alpha(z)|^p d\mu(z) \right)^{1/p}$  と  $\|\alpha\|_\infty$  は  $|\alpha(z)|$ ,  $z \in V$  の essential sup とする。 このとき

定理 2.3 ([9] Theorem 1.3.1) 境界に近い  $\bar{D}$  の点  $z$  に

対し次の  $F$  を ball  $B(z, r)$  がある:  $\forall \alpha \in L_{0,1}^p(D)$

$(\bar{\partial}\alpha = 0)$  に対し  $u \in L^p(D \cap B(z, r))$  があって

$$\bar{\partial}u = \alpha \quad (\bar{\partial} \text{ は distribution の意味で})$$

$$(7) \quad \|u\|_{L^p(D \cap B(z, r))} \leq K \|\alpha\|_{L_{0,1}^p(D)}$$

をみたす。

これから次の global theorem がえられる。

定理 2.4.  $G$  は前の通りとする。  $\alpha$  は  $\bar{\partial}$ -closed な  $(0,1)$ -form で  $\alpha \in L_{0,1}^p(G)$ , このとき  $\bar{\partial}u = \alpha$  の解  $u$  で

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq K \|\alpha\|_{L_{0,1}^p(G)} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

をみたすものがある。

注).  $p=2$  のときは Hörmander [7] によりすでに知られ,  $p=\infty$  のときは Grauert-Lieb の結果である。また定理 2.3 は定理 2.4, 従ってこの節で知られた結果が Stein 多様体  $M$  内の強擬凸領域  $G \subset M$  への拡張できるとを示している。

### §3. 応用

定理 2.2 よりすぐに Čech の cohomology に対する次の結果をえる。  $G$  は前の通りの領域とする。

$\mathcal{U} = \{\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_r\}$  を  $G$  の有限開被ふく,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}|_G = \{U_p = \hat{U}_p \cap G\}$  とする。

1-cocycle  $\tau \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$  をとる。  $\tau = \{\tau_{ij}\}$

$$|\tau| \equiv \max_{i,j} |\tau_{ij}| \quad |\tau_{ij}| \equiv \sup_{x \in U_i \cap U_j} |\tau_{ij}(x)|$$

とおく。

定理 3.1 ([3] Satz 5)  $G$  に対し  $G$  のみに depend する定数  $K < +\infty$  がある; 任意の  $\tau \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$  に対して  $\tau' \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$  があって  $\delta\tau' = \tau$ ,  $|\tau'| \leq K|\tau|$

系.  $G$  で正則,  $G$  で有界な関数の芽の作る sheaf を  $\beta$  と

$$\text{すれば } H^1(\mathcal{U}, \beta) = 0$$

注) Kergmann によればこれらの結果は Stein 多様体内の強複凸領域に対しても成立する。

また次の近似定理が証明される。(Lieb [11], Kergmann [9]).

定理 3.2  $G$  は前の通りとする。

1°) ある open set  $\hat{G} \supset G$  があって  $A(\hat{G})$  に属する関数は  $\hat{G}$  の正則関数により  $G$  で一様に近似される。

2°)  $G$  で正則かつ  $L^p(G)$  ( $0 \leq p \leq \infty$ ) に属する関数  $f$  に対して  $\hat{G}$  で正則な関数の列  $\hat{f}_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) があって  $\hat{f}_n$  は  $f$  に  $G$  内で compactly uniformly converge する。かつ

$$\|\hat{f}_n\|_{L^p(G)} \leq K \|f\|_{L^p(G)}$$

ここで  $K = K(G)$  は  $f, n, p$  に無関係な定数。

注) Henkin [5] も 1°) と同じ近似定理を与えている。また定理 3.2 は Stein 多様体内の強複凸領域  $G$  でも成立する。

## 文 献

- [1] Bungart, L: Holomorphic functions with values in

locally convex spaces and applications to  
integral formulas. Trans. Am. Math. Soc (2)  
111. 317 ~ 344 (1964)

- [2] Gleason, A: The abstract theorem of Cauchy-Weil.  
Pacific J. Math 12, 511 ~ 525 (1962)
- [3] Grauert, H and Lieb, I; Das Ramirezsche  
Integral und die Lösung der Gleichung  $\bar{\partial}f = a$   
in Bereich der beschränkten Formen.  
Rice Univ. Studies 5/6 No. 2
- [4] Gunning, R and Rossi, H Analytic functions of  
several complex variables. Prentice Hall 1965
- [5] Henkin, G: Integral representations of holomorphic  
functions in strongly pseudoconvex domains  
and certain applications. Math. Sbor. Vol  
78 (1969)
- [6] Henkin, G: Integral representations of functions  
in a strongly pseudoconvex domain and  
application to the  $\bar{\partial}$ -problem. Math Sbor.  
Vol 82 (1970)
- [7] Hörmander, L;  $L^2$ -estimate and existence  
theorems for the  $\bar{\partial}$  operator, Acta Math.

Vol. 113 (1965) pp 89 ~ 152

- [8]. Hörmander, L; An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966
- [9]. Kergzmann, N; Hölder and  $L^p$ -estimate for solutions of  $\bar{\partial}u = f$  in strongly pseudoconvex domains, Comm. pure and appl. math, Vol XXIV, (1971) pp 301 ~ 379
- [10] Koppelman, W; The Cauchy integral for functions of several complex variables, Bull. Amer. Math. Soc. Vol 73 (1967) pp 373 - 377.
- [11] Lieb, I; Ein Approximationssatz auf streng pseudokonvexen Gebieten. Math. Ann, Vol 84 (1969) pp 56 - 60
- [12] Lieb, I; Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten. Math. Ann. 190, 6 ~ 44 (1970)
- [13] Ramirez, de A. E; Ein Divisionsproblem in der komplexen Analysis mit einer Anwendung auf Randintegraldarstellungen. Math. Ann Vol 184 (1970) pp 172 - 187