数理解析研究所講究録
142巻 1972年 118-125

Invariant Measure in the Plane

神大 工学部 江川治朗

§1. 序

コンパクト距離空間を相空間とする力学系に対しては，不変測度の存在が証明されている([3]) が，そこで存在が保証されている測度は空でない開集合の上で常に正であるとは限らない。こゝでは R^2 上の特異点が有限個であるような(局所)力学系に対して，任意の空でない開集合の上で正で，コンパクト集合上で有限な値をとる不変測度の存在するための必要十分条件を求める。

§2. Local existence.

(X, μ) を測度空間，π を X 上の局所力学系とする。たゞしこれから考察する測度 μ は次の条件(1), (2) を満たすルベック測度とする。

(1) $G \subset X$ が空でない開集合 $\Rightarrow$ $\mu(G) > 0$.

(2) $K \subset X$ がコンパクト集合 $\Rightarrow$ $\mu(K) < \infty$.

<u>定義 1.</u> $A \subset X$ を任意の可測集合，$t \in R$ とする。任意の $x \in A$ に対して $\pi(x, t)$ が定義される限り，

$$\mu(\pi(A, t)) = \mu(A).$$

が成り立つとき，μ は π に関して不変である（又は π は不変測度 μ を持つ）という。

$U \subset X$ を開集合とするとき，π の U への制限 $\pi \| U$ は局所力学系を定める（[1], [8]）。

<u>定義 2.</u> $x_0 \in X$ とする。$\pi \| U$ が不変測度を持つような x_0 の開近傍 U が存在するとき，π は x_0 の近傍で不変測度を持つという。

π を R^2 上の局所力学系とする。このとき次の定理が得られる。

<u>定理 1.</u> x_0 が特異点でなければ，x_0 の近傍で不変測度が存在する。

次に x_0 を孤立特異点とする。x_0 の近傍で不変測度が存在するならば，x_0 は center か generalized saddle であることは証明されている（[7]）。逆に次のことも証明できる。

<u>定理 2.</u> x_0 が center か generalized saddle であるならば x_0 の近傍で不変測度が存在する。

§3. Global existence.

特異点が有限個であるような R^2 上の局所力学系 π を考察する。Local existence の議論より特異点はすべて center か generalized saddle であると仮定して一般性を失わない。このとき次の定理が得られる。

定理3. π が不変測度を持つための必要十分条件は周期点でない点の +(−) 極限集合が高々一点であることである。(又は極限集合が空でない軌道(周期軌道を除く)は高々有限個である。)。

定理3の証明の概略を述べる。

必要: 周期点でない点の + 又は − の極限集合が2点を含めば必ず特異点でない点を含むことが力学系の一般論より証明される。特異点でない点を含む local section の議論と、R^2 の特性を使って矛盾を導くことができる。

十分: 定理の仮定のもとで不変測度を構成する。まず記号の説明をする。

$\mathcal{S}$: 特異点の集合。　　　　P : 周期点の集合。

$P_0 = P - \mathcal{S}$　　　　$M = R^2 - P$

$C = \{ x \in R^2 \mid x \in M,\ L^+(x) \neq \phi \text{ or } L^-(x) \neq \phi \}$

$M_0 = R^2 - \bar{P}_0 - \mathcal{S} - \bar{C}$

命題1. P_0, M_0 は R^2 の開集合で, $P_0 \cup M_0$ は R^2 で

dense である。

証明. M_0 が開集合であることはあきらか。P_0 が開集合であることは仮定より導かれる。又 $R^2 = P_0 \cup M_0 \cup \partial P_0 \cup S \cup C$ で S は有限集合, C は有限個の軌道よりなるから $P_0 \cup M_0$ は R^2 で dense である。

命題 2. $\pi \| P_0$ は有限不変測度を持つ。μ_1 とする。

証明. Local existence のときと同様にして証明される。

命題 3. $\pi \| M_0$ は次の条件を満足する不変測度 μ_2 を持つ。

(*) 任意のコンパクト集合 $K \subset R^2$ に対して,

$\mu_2(K \cap M_0) < \infty$.

命題 3 が証明されれば, 任意の可測集合 $A \subset R^2$ に対して,

$$\mu(A) = \mu_1(P_0 \cap A) + \mu_2(M_0 \cap A)$$

と置くと求める不変測度である。これより命題 3 の証明をする。議論を簡単にするため, π は力学系であると仮定する。

定義 4. π, ρ を X, Y 上の力学系とする。次の (1) (2) が成り立つとき, $h : \pi \longrightarrow \rho$ を同型写像という。

(1). $h : X \to Y$ 位相同型写像.

(2). 任意の $x \in X$, $t \in R$ に対して

$$h(\pi(x, t)) = \rho(h(x), t).$$

次の命題 5 は容易に証明される。

命題5. π, ρ を X, Y 上の力学系とし, $h: \pi \to \rho$ を同型写像とする。μ_Y を ρ に関する不変測度とする。このとき, 可測集合 $A \subset X$ に対して

$$\mu_X(A) = \mu_Y(h(A))$$

と置くと, μ_X は π に関する不変測度である。

定義6. X 上の力学系 π が次の条件 (1), (2) を満たすとき, π を平行流であるという。

(1). $X = S \times R$ とかける。

(2). 任意の $s \in S$, $r, t \in R$ に対して,

$$\pi((s, r), t) = (s, r+t).$$

定理の仮定より, $\pi \| M$ は completely unstable であることが導かれる。即ち, 任意の $x \in M$ に対して $x \notin J^+(x)$。従って, Parallelizable の議論より ([1], [9]), 次の条件を満たす M_0 の開被覆 $\{V_i\}$ と $\{\rho_i\}$, $\{Y_i = S_i \times R\}$, $\{h_i\}$ が存在する。

(1). ρ_i は Y_i 上の平行流。

(2) h_i : $\pi \| V_i \longrightarrow \rho_i$ 同型写像。

(3) S_i は $(0, 1) \subset R$ と位相同型.

これより S_i を $(0, 1) \subset R$ と同一視して考える。

命題7. V を $\overline{V}$ が R^2 のコンパクト集合であるような開集合とする。任意の i, $s \in S_i$ に対して,

$$\psi_i^V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{h_i(V \cap V_i)}(s, r)\, dr$$

（たゞし，$\varphi_{h_i(V\cap V_i)}$ は $h_i(V \cap V_i)$ の特性関数）.
と置くと，$\psi_i^V(s)$ は S_i 上の有限な値をとる可測関数である。さらに，任意の $|t| > T$ に対して $\pi(V, t) \cap V = \phi$ であるような $T > 0$ が存在するならば，

$$\psi_i^V(s) \leqq 2T$$

が成り立つ。

証明. h_i が time による座標の入れ換えであることに注意すれば，証明は容易である。

次に μ_2 の構成にうつる。

V_0 を $\mathcal{S}$ の開近傍で $\bar{V}_0$ がコンパクトであるようにとる。任意の $A \subset Y_i$ に対して，

$$\nu_i(A) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_A(s, r)}{\psi_i^{V_0}(s) + 1}\, dr\, ds$$

と置くと，ν_i は ρ_i に関しての不変測度であることが証明される。ν_i の逆像として V_i 上に導入される測度を μ_i と置く。$A \subset M_0$ に対して，

$$\mu_2(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(A \cap V_n)$$

と置くと求めるものであることが証明される。

REFERENCES

[1] J.Egawa, Global Parallelizability of Local Dynamical Systems, Math. Syst. Theory, 6, No.1 (1972) (to appear).

[2] R.C.McCann, A Classification of Centers, Pacific J. Math., 30 (1969), 733-746.

[3] V.V.Nemytskii and V.V.Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.

[4] J.C.Oxtoby, Stepanoff Flows on the Torus, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 982-987.

[5] J.C.Oxtoby and S.M.Ulam, On the Existence of a Measure Invariant under a Transformation, Ann. of Math., 40 (1939), 560-566.

[6] O.Hajek, Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, London and New York, 1968.

[7] T.Ura and Y.Hirasawa, Sur les Points Singuliers des Equations Différentielles Admettant un Invariant Intégral, Proc. Japan Acad. 30 (1954), 726-730.

[8] T.Ura, Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 99-122.

[9] T.Ura, Local Isomorphism and Local Parallelizability in

ynamical Systems Theory, Math. Syst. Theory, 3 (1969), 1-16.