

双曲型偏微分方程式系の
絶対安定問題について

東北大 理数 内藤 敏 機

二独立変数の偏微分方程式系

$$(1) \begin{cases} u_t = C u - A u_x + b \xi \\ \xi_t = f(\sigma) \\ \sigma = \nu' u - \mu' u_x - \varepsilon \xi \end{cases}$$

を考える。但し、 $b, u, \mu, \nu \in \mathbb{R}^n$, n 次元実vector, $\varepsilon, \xi \in \mathbb{R}$
 A, C は $n \times n$ 実定数行列, ν', μ' はそれぞれ ν, μ の転置
 vector とする。 A の固有値は実数で、対角化可能とする。

$f(\omega)$ は $\omega \in \mathbb{R}$ に対して定義された C^2 級の関数で、 $\omega \neq 0$ なら
 は、 $\omega f(\omega) > 0$ とする。導関数もこめて有界な C^k 級の関数。

$g(x) = (g^1(x), \dots, g^m(x))$ に対して、ノルム $\|\cdot\|_k$ を、

$$\|g(\cdot)\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in \mathbb{R}} \max_{i=1}^m \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} g^i(x) \right|$$

によって定義する。

半線形双曲型方程式系

$$(2) \quad W_t = [W - A W_x + h(w)]$$

に関する下記の定理1は Jeffrey と Kato [3] による。系(2)において、 $w \in \mathbb{R}^m$, A, C は $m \times m$ 実定数行列で、 A の固有値はすべて実数で、対角化可能であるとする。 $h(w)$ は、 $|w| \equiv \max_{i=1}^m |w^i| < \Omega$ で定義された C^2 級の関数で、 $h(0) = 0$, $h_w(0) = 0$ とする。

定理1. 系(2)に対して、上記の条件を仮定する。初期関数、 $\bar{w}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, は C^2 級で、 $\|\bar{w}(\cdot)\|_2 < \infty$ とする。

この時、正数 T が存在して、

$$(3) \quad w(0, x) = \bar{w}(x)$$

を満たす系(2)の解 $w(t, x)$ が、 $R_T \equiv [0, T] \times \mathbb{R}$ で存在する。 $w(t, x)$ は C^2 級で、 $t \in [0, T]$ に対して、 $\|w(t, \cdot)\|_2 < \infty$ である。 T は $\|\bar{w}(\cdot)\|_0$ にだけ関係して定まる。

系(2)の0-解の安定性については、同じく Jeffrey と Kato [3] による次の定理2が知られている。一般の偏微分方程式の安定問題については Zubov [6] を参照されたい。さて、 $\|w(\cdot)\|_1 < \infty$ である関数 $w(x)$ と、 $\rho > 0$, $y \in \mathbb{R}$ に対して、Liapunov 汎関数 $V_{\rho, y}$ を

$$(4) \quad V_{\rho, y} = \int_{-\infty}^{\infty} [\langle w, Bw \rangle + \langle w_x, Bw_x \rangle] e^{-\rho|x-y|} dx$$

によって定義する。但し、 B は正定値 $m \times m$ 行列で、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$

は内積を表わす。

$$(5) \quad V_{\rho} = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} V_{\rho} \cdot \gamma$$

とあくと, $\rho \leq 1$, $\|w\|_1 < \infty$, $w \in C^2(X)$ に対して, 不等式

$$(6) \quad \|w(\cdot)\|_0^2 \leq K V_{\rho}$$

が成立する ([3]). 但し, K は w に関係しない定数である。

定義 ([3]). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $V_{\rho}(w(\cdot)) < \delta$ ならば初期値問題 (2), (3) の解 $w(t, x)$ が $t \geq 0$ で存在して, $t \geq 0$ において $V_{\rho}(w(t, \cdot)) < \varepsilon$ が成立する時, 系 (2) の 0-解は ρ -安定であるという。0-解が ρ -安定で, さらにある $\gamma > 0$ が存在して, $V_{\rho}(w(\cdot)) < \gamma$ ならば, $\lim_{t \rightarrow \infty} V_{\rho}(w(t, \cdot)) = 0$ が成立する時 ρ -漸近安定であるという。

定理 2. 正定値行列 B, D で条件

$$(7) \quad \begin{cases} B C + C' B = -D \\ B A - A' B = 0 \end{cases}$$

を満足するものが存在すれば, 系 (2) の 0-解は ρ -漸近安定である。

注意 1. 定理 2 の証明では, 不等式 (6) を使うので,

初期関数 $W(x)$ は C^2 級とする。このとき (1), (3) の解 $W(t, x)$ は $[0, \infty) \times R$ で C^2 級である。 V_p に対して 明きらかな不等式 $V_p \leq M(p) \|W(\cdot)\|_1$ が成立するので、定理 2) により、 $\|W(\cdot)\|_1$ が小さければ、 $t \rightarrow \infty$ の時、 $\|W(t, \cdot)\|_0 \rightarrow 0$ である。

さて、我々は系 (1) の絶対安定問題を考える。絶対安定問題については、[2], [4] を参照された。

変数変換

$$(8) \quad L: \begin{cases} v = C u - A u_x + b \xi \\ \sigma = v' u - \mu' u_x - I \xi \end{cases}$$

によつて、系 (1) は

$$(9) \quad \begin{cases} v_t = C v - A v_x + b f(\sigma) \\ \sigma_t = v' v - \mu' v_x - I f(\sigma) \end{cases}$$

に変換される。関数 $u: R \rightarrow R^n$, $u \in C^p$, $\|u(\cdot)\|_p < \infty$ と、関数 $\xi: R \rightarrow R$, $\xi \in C^q$, $\|\xi(\cdot)\|_q < \infty$ の対 (u, ξ) の全体が作る関数空間を $X_{p,q}$ で表わす。 $(u, \xi) \in X_{p,q}$ のノルム $\|(u, \xi)\|_{p,q} \equiv \|u\|_p + \|\xi\|_q$ で定義する。系 (1) (又は系 (9)) の、 R_T で定義され、各 $t \in [0, T]$ において、 $X_{p,q}$ に属する解の全体を $X_{p,q}(1)$ (又は $X_{p,q}(9)$) と表わす。次の命題 3. 4 は容易である。

命題3. $A^{-1}C$ の固有値の実部はすべて0でないとする。しからは、 $|L|$ が十分大きければ、変換 L は $X_{p+1,p}$ から $X_{p,p}$ の上への1対1、連続な線形変換である。(p : 正整数)

命題4. 命題3と同じ仮定の下に、 $|L|$ が十分大きければ、任意の $T > 0$ と任意の整数 $p \geq 1$ に対して、変換 L は $X_{p+1,p}(1)$ から $X_{p,p}(T)$ の上への1対1、両連続な線形変換である。

この命題4によって、系(1)を考える事と、系(9)を考える事とは、ある程度、同等である。系(1)は (u, z) の方程式として、半線形 (semi-linear) でも、準線形 (quasi-linear) でもない。しかし、系(9)は (v, w) の方程式として、半線形である。系(9)については議論がしやすい。次の定理5.6は系(9)について述べたものである。証明は[5]を参照されたい。定理5.6では $\mu = 0$ と仮定した。したがって、この場合には、系(1)は (u, z) の半線形方程式となり、変換 L は、不必要に見えるかも知れないが、そうではない。定理5.6の条件は、系(9)に変換されて、はじめで導かれる。

定理5. 系(9)において、 $\mu = 0$ とする。正定

値な行列 B, D が存在して,

$$(10) \quad \begin{cases} BC + C'B = -D \\ BA - A'B = 0 \end{cases}$$

を満足するとする。

そうすれば, ある $\rho_0 > 0$ と $\rho_0 > 0$ とが存在して, 次の事が成立する。 $f(\alpha)$ が条件;

(i) $f(\alpha)$ は C^2 級である,

(ii) $f(\alpha)$ の $\alpha = 0$ における微係数 $f'(0)$ は正である,
 をみたせば, また $\rho > \rho_0$ であればどんな数でも, 系 (9) の 0-解は ρ -漸近安定である ($\rho < \rho_0$)。

定理 6. μ, B, D に対して, 定理 5 と同じ条件を仮定する。 $f(\alpha)$ は $\alpha \in \mathbb{R}$ で定義された C^2 級の関数で, ある $f_1 > 0, f_2 > 0$ に対して, $f_1 \leq f'(\alpha) \leq f_2$ がすべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して 成立するとする。

そうすれば, ρ が十分大きく, ρ が十分小さければ, 系 (9) の 0-解は, 大域的に ρ -漸近安定である。即ち, $V_\rho((\bar{v}, \bar{c}))$ がどんな大きさでも, $t \rightarrow \infty$ のとき, $V_\rho((V(t, \cdot), \alpha(t, \cdot))) \rightarrow 0$ である。

注意 1 で見たように, 定理 5 から $\bar{v}, \bar{c} \in C^2$ で $\|(\bar{v}, \bar{c})\|_{1,1}$

が十分小さければ, $v(t, x), \sigma(t, x) \in C^2$ で, $\|v(t, \cdot), \sigma(t, \cdot)\|_{0,0} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ である。従って, 系 (1) では, $\bar{u} \in C^3, \bar{z} \in C^2$ で, $\|(\bar{u}, \bar{z})\|_{2,1}$ が十分小さければ, $u(t, x) \in C^3, \sigma(t, x) \in C^2$ で, $t \rightarrow \infty$ のとき $\|u(t, \cdot), \sigma(t, \cdot)\|_{1,0} \rightarrow 0$ である。また定理 6 の条件の下では, $\bar{u} \in C^3, \bar{z} \in C^2, \|(\bar{u}, \bar{z})\|_{2,1} < \infty$ ならば, $u(t, x) \in C^3, z(t, x) \in C^2$ で, $\|u(t, \cdot), \sigma(t, \cdot)\|_{1,0} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ である。

定理 5 で, 仮定 $f'(0) > 0$ を $f'(0) \geq 0$ に弱くできるか, また定理 6 で, 仮定 $f_1 > 0$ を $f_1 \geq 0$ に弱くできるかどうかは解らない。問題は, できれば, 仮定 $\alpha f(0) > 0, \alpha \neq 0$ の下で解きたい。この種の制御問題では $f(\alpha)$ も可測関数の枠内で考える事が重要である。

参 考 文 献

- [1] K.O. Friedrichs, Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables, Amer. J. Math., 70 (1948), 555-589.
- [2] M.A. Aizerman and F.R. Gantmacher, "Absolute Stability of Regulator Systems", Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1964.
- [3] A. Jeffrey and Y. Kato, Liapunov's direct method in

stability problems for semilinear and quasilinear hyperbolic systems, J. of Math. and Mechanics, 18 (1969) 659-682.

- [4] 内藤, 偏微分方程式系における Lyapunov の方法について, 京大数理研講究録 117, 8-15.
- [5] T. Naito, On the absolute stability of a class of hyperbolic systems, Proceedings of Japan United States seminar on ordinary differential and functional equations, Springer, (To appear).
- [6] V. I. Zubov, "Methods of A. M. Lyapunov and their application", P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1964.