数理解析研究所講究録
143巻 1972年 122-130

ある種の関数空間の maximal ideal space について

山形大 理　富山 淳

§1. 序. ここで問題にするのはテンソル積であらわされる様な関数空間（Banach 代数）における maximal ideal の形である。例えば X を compact Hausdorff 空間 B を可換な Banach 代数 とした時、X 上の B-valued 連続関数のつくる代数 $C(X, B)$ の modular な極大イデヤルのつくる空間 $\mathfrak{M}$ は、X と $\mathfrak{M}(B)$ の積空間に同値なことが知られている。又 G を局所コンパクトな可換群としたとき $L^1(G, B)$ の modular な極大イデアルのつくる空間 $\mathfrak{M}$ は G の dual $\hat{G}$ と $\mathfrak{M}(B)$ との積空間に同値になる。これらの結果は最初は別々にとり扱われていたがこれはテンソル積の問題として考えてみれば前者は $C(X, B) \cong C(X) \otimes_{\lambda} B$（最小のクロスノルム λ でのテンソル積）、又 後者は

$L^1(G, B) \cong L^1(G) \otimes_{\gamma} B$（最大のクロスノルム γ でのテン

ソル積)であり結果はいずれもこれについて

$$\mathfrak{M}(A \underset{\beta}{\otimes} B) \cong \mathfrak{M}(A) \times \mathfrak{M}(B) \quad \text{但し } \beta = \lambda, \gamma$$

となっていることを示している。現在ではA, Bが可換な Banach代数の時は上のような形で結果が(任意のcompatibleなクロスノルムβについて)成立することが[4]によって知られているが最近 K. B. Laursen [1]は Bが非可換でも上のことが成立することを $\beta = \gamma-$ノルムについて示した。ここでは上のことがAが可換, Bは任意という仮定のもとに以前の場合と同様に任意のcompatibleなクロスノルムβについて成立することを証明しそれに続くいくつかの結果をのべる。

§2. A, BをBanach代数とする。この時A, Bの$\beta-$クロスノルムによるテンソル積 $A \underset{\beta}{\otimes} B$ は一般には又Banach代数になるとは限らないので $A \underset{\beta}{\otimes} B$ が又Banach代数になるときβをcompatibleなクロスノルムということにする。今βを$\lambda-$ノルムより小さくないとすると、A上の有界汎関数φに対して対応

$$R_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i, \varphi \rangle b_i$$

は連続であり $A \underset{\beta}{\otimes} B$ 全体に拡大出来る。同様にしてB上の有界線型汎関数ψに対して $A \underset{\beta}{\otimes} B$ からAへの対応

$$L_\psi : A \underset{\beta}{\otimes} B \longrightarrow A$$

$$L_\psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, \psi \rangle a_i$$

が定義出来る. これを夫々φ,ψからひき起こされた右および左 Fubini 写像と呼ぶことにする. 定義から直ちに

$$\langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

が任意の元 $x \in A \otimes_\beta B$ について成立することがわかる.

$\Pi_0(A)$ を A の modular primitive ideal の集合,

$\mathfrak{M}(A)$ を A の modular maximal ideal の集合とする.

定理1. A を可換な Banach 代数 B を任意の Banach 代数とし, β を compatible なクロスノルムとする。このとき1対1対応

$$\Pi_0(A \otimes_\beta B) \longleftrightarrow \Pi_0(A) \times \Pi_0(B)$$

が次の形で与えられる.

$$P = R_\phi^{-1}(P_B)$$

$P \in \Pi_0(A \otimes_\beta B)$, $P_B \in \Pi_0(B)$, $\phi \in \Pi_0(A)$ (character).

更に上の対応を $\mathfrak{M}(A \otimes_\beta B)$ に制限すると

$$\mathfrak{M}(A \otimes_\beta B) \longleftrightarrow \mathfrak{M}(A) \times \mathfrak{M}(B)$$

をひきおこす。

証明. ϕ を A の homomorphism とすると R_ϕ は $A \otimes_\beta B$ から B への homomorphism になる. 証明の主要部は $P \in \Pi_0(A \otimes_\beta B)$ が上の形にかけることであるから, それについてのみここでは

のべる。pによる$A\underset{\beta}{\otimes}B$の quotient algebra $A\underset{\beta}{\otimes}B/p$ は単位元をもつから $k=\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i$ をとらんで $\pi(k)$ が逆元をもつように出来る。ここで π は

$$\pi : A\underset{\beta}{\otimes}B \longrightarrow A\underset{\beta}{\otimes}B/p.$$

$x\in A$ について

$$\rho(x) = \pi\Big(\sum_{i=1}^{n} x a_i\otimes b_i\Big)\pi(k)^{-1}$$

とおく。つくり方から $\rho(x)$ は $\pi(k)$ 及び $\pi(k)^{-1}$ と可換であり線型写像であるが更に、

$$\begin{aligned}
\rho(x)\rho(y) &= \pi\Big(\sum_{i=1}^{n} x a_i\otimes b_i\Big)\pi(k)^{-1}\pi\Big(\sum_{i=1}^{n} y a_i\otimes b_i\Big)\pi(k)^{-1} \\
&= \pi\Big(\sum_{i,j} xy\, a_i a_j\otimes b_i b_j\Big)\pi(k)^{-2} \\
&= \pi\Big(\sum_{i=1}^{n} xy\, a_i\otimes b_i\Big)\pi(k)^{-1} \\
&= \rho(xy)
\end{aligned}$$

となるから ρ は homomorphism である。ところが

$$\begin{aligned}
\pi(y\otimes b)\rho(x) &= \pi\Big(\sum_{i=1}^{n} xy\, a_i\otimes b b_i\Big)\pi(k)^{-1} \\
&= \pi(xy\otimes b) \\
&= \pi(k)^{-1}\pi(k)\,\pi(xy\otimes b) \\
&= \pi(k)^{-1}\pi\Big(\sum_{i=1}^{n} xy\, a_i\otimes b_i b\Big) \\
&= \rho(x)\,\pi(y\otimes b)
\end{aligned}$$

であるから $\rho(x)$ は $A\underset{\beta}{\otimes}B/p$ の center に属する。

$A \underset{\beta}{\otimes} B/p$ は primitive な Banach 代数であるから，その center は複素数体と同型である。ρ は 0 でない homomorphism であるから結局 A 上の複素数体への homomorphism ϕ が存在して

$$\rho(x) = \langle x, \phi \rangle 1 \qquad \text{(但し 1 は modular unit)}$$

次に $\langle e, \phi \rangle = 1$ となる A の元 e をとる．

$$\pi_B(x) \equiv \pi(e \otimes x) \qquad (x \in B) \text{ とおく}$$

先ず

$$\pi_B(xy) = \pi(e \otimes xy) = \pi(e^2 \otimes xy)$$
$$= \pi(e \otimes x)\pi(e \otimes y) = \pi_B(x)\pi_B(y).$$

よって π_B は B より $A \underset{\beta}{\otimes} B/p$ への連続な homomorphism である．ここで

$$\pi(a \otimes b) = \pi(ae \otimes b) = \pi(e \otimes b)\rho(a)$$
$$= \langle a, \phi \rangle \pi_B(b) = \pi_B(\langle a, \phi \rangle b)$$
$$= \pi_B \circ R_\phi (a \otimes b)$$

であるから

$$\pi = \pi_B \circ R_\phi$$

となり，$P_B = \pi_B^{-1}(0)$ は B の modular primitive ideal となる．又上の式から

$$P = \pi^{-1}(0) = R_\phi^{-1}(P_B).$$

最後に，上の関係は $A \underset{\beta}{\otimes} B/p$ と B/P_B との間の同型対応

をひきおこすから、Pが modular maximal ideal その時に限って P_B はBの modular maximal ideal になることがわかる。　証明了。

以上から、又A及びBが単位元をもつとき、上の形で $A \underset{\beta}{\otimes} B$ の structure space とA, Bの structure space の積と1対1に対応することがわかる。　定理にあてはまる具体的な例としては、Bが非可換の時の $C(X, B)$, $L^1(G, B)$ などがある。特に、Hをコンパクト群とした時 $L^1(G \times H)$ の結果は [3] にのべられているものである。

§3.　よくしられている極大なイデヤルと primitive ideal との間の関係を考えれば上の定理から更に Lebow [2] の次の結果を導びくことが出来る。

定理2.　定理1の状況で、A, Bが共に単位元をもつとすると $A \underset{\beta}{\otimes} B$ の極大なイデヤルLは

$$L = R_\phi^{-1}(L_B)$$

と一意にかける。ここで L_B はBの極大なイデヤル、ϕ はAの character である。

証明．上のようにLがかけることだけのべてみよう。ρ

を $E = A \otimes_\beta B / L$ 上への $A \otimes_\beta B$ の canonical な既約表現とする. $P = \rho^{-1}(0)$ とおくとこれは primitive ideal であるから定理1により A の character ϕ と B の primitive ideal P_B が存在して

$$P = R_\phi^{-1}(P_B).$$

よって B の既約表現 ρ_B があって $\rho_B^{-1}(0) = P_B$,

$$\rho = \rho_B \circ R_\phi .$$

ξ_0 を $A \otimes_\beta B$ の単位元の E での class とする. つくり方から

$$L = \{ x \in A \otimes_\beta B \mid \rho(x)\xi_0 = 0 \}$$

今 $L_B = \{ b \in B \mid \rho_B(b)\xi_0 = 0 \}$

とおくと, $L = R_\phi^{-1}(L_B)$ で L_B は B の極大左イデアルである.

Laursen [1] では $A \otimes_\gamma B$ での §2 の対応の結果として, strongly semi-simple の性質の遺伝性を調べているが定理1が得られた以上それらは $A \otimes_\beta B$ についての結果として自然に拡張される.

定理3. 定理1の状況のもとで A, B を strongly semi-simple とする. このとき $A \otimes_\beta B$ が又 strongly semisimple になるためには次の canonical な対応

$$\tau : A \otimes_\beta B \longrightarrow A \otimes_\lambda B$$

が1対1であることが必要十分である.

証明. $A\otimes_\beta B$ の strong radical R_0 が $\tau^{-1}(0)$ に一致することを示す。それは次の同値関係によるものである。

$$x\in R_0 \rightleftarrows R_\phi(x)\in M_B \quad \text{for any } \phi\in m(A),\ M_B\in m(B)$$
$$\rightleftarrows R_\phi(x)=0 \quad \text{for } \forall\phi\in m(A).$$
$$\rightleftarrows \langle R_\phi(x),\psi\rangle=\langle L_\psi(x),\phi\rangle=0$$
$$\text{for } \forall\phi\in m(A),\ \psi\in B^*$$
$$\rightleftarrows L_\psi(x)=0 \quad \text{for } \forall\psi\in B^*$$
$$\rightleftarrows x\in\tau^{-1}(0)$$

尚 $A\otimes_\beta B$ が strongly semisimple であるときは、A B は常に strongly semisimple である。ここで compatible なクロスノルムの特別なものをとれば結果としてはもっと一般のことが判明している。例えば A を可分な I 型の C^*–代数とし B を任意の可分な C^*–代数とすると、最小の C^*–クロス・ノルム α については、$A\otimes_\alpha B$ の structure space (primitive ideal の空間で hull–kernel 位相を考えたもの) は A と B の structure space の積空間に同位相になる。しかし定理 I の様などのノルムについてもよい一様な結果がどこまで言えるのかは一寸予想がつき難い。

文献

1. K. B. Laursen, Maximal two sided ideals in tensor products of Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970), 475 − 480

2. A. Lebow, Maximal ideals in tensor products of Banach algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 1020 − 1022

3. I. E. Segal, The group algebra of a locally compact group, Trans. ~~Amer~~. Amer. Math. Soc., 61 (1941), 69 − 105.

4. J. Tomiyama, Tensor products of commutative Banach algebras, Tôhoku Math. J., 12 (1960), 147 − 154

5. J. Tomiyama, Applications of Fubini mappings to tensor products of Banach algebras, Seminar, Copenhagen 1971.