数理解析研究所講究録
143巻 1972年 86-91

ROYDEN ALGEBRAS AND QUASIISOMETRIES OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

名大 理　中井 三留

§1. 序

m次元 $(m \geq 2)$ Euclid 空間 E^m の部分領域 D を考える. 次の問題を論ずる: "D上の調和函数論は Dのいかなる幾何学的対象によって決まるか?" Dの開集合 O と O上の調和函数 h の組 (O, h) の全体が D上の調和函数論であるが, ここでは h の O 上の Dirichlet 積分 $D_O(h) = \int_O |\mathrm{grad}\, h(x)|^2 dx$ が有限となるものに限定するいわゆる 'Dirichlet 有限調和函数論' を考えることにする. 答えは, 大ざっぱに言って次元 $m=2$ なら角度であり $m \geq 3$ なら距離である. 次の様に考える: Dirichlet 原理を通じて, 又 Virtanen 現象を通じて Dirichlet 有限調和函数論は D上有界連続 Dirichlet 有限函数の作るいわゆる Royden algebra $R(D)$ で決まっていると思ってよい. そこで Dのどんな幾何学的構造が $R(D)$ を定めるかと言う問題を考える. 2個の領域 D_1, D_2 をとり $R(D_1)$ と $R(D_2)$ がいつ代数的に同型かを

幾何学的に答えたらよい．その答が $m=2$ なら D_1 と D_2 の間のあまり角度を変えない位相同型のあること，$m\geq 3$ なら D_1 と D_2 の間のあまり距離を変えない位相同型のあること，となる．

§2. 定義と定理

以下 Riemann 多様体 M とは連結可分可符号 m 次元（$m\geq 2$）C^1 多様体で次の条件を満足する計量テンソル (g_{ij}) をもつものとする：局所座標 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ の局所座標球 B における g_{ij} の局所表現 $g_{ij}(x)$ は x の Borel 可測函数で，ある有限定数 $k_B\geq 1$ があって

$$(1)\qquad k_B^{-1}\sum_{i=1}^{m}(\xi^i)^2\leq\sum_{i,j=1}^{m}g_{ij}(x)\xi^i\xi^j\leq k_B\sum_{i=1}^{m}(\xi^i)^2$$

がすべての $x\in B$ とすべてのベクトル $(\xi^1,\cdots,\xi^m)$ について成り立ち，更にある座標球による M の被覆 $\{B\}$ ですべての B で

$$(2)\qquad 1\leq k_B\leq\tau$$

となる有限定数 τ が存在する．$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$，$g=\det(g_{ij})$ とおく．M 上の線要素 $ds^2=\sum_{i,j=1}^{m}g_{ij}(x)dx^idx^j$ により M の 2 点の距離（$p,q\in M$）は

$$(3)\qquad \rho_M(p,q)=\inf\int_\gamma ds$$

で与えられる．こゝに inf は p と q を結ぶ長さのある曲線 γ

についてとる．

座標直方体 B：$a^i < x^i < b^i$ 上の函数 f が 'absolutely continuous on lines'（ACL と略記）とは B の $x^i = a^i$ となる面を B_i と記すとき $f(\zeta + \xi e_i)$ $(e_i = (\delta^{i1}, \ldots, \delta^{im}))$ が殆んどすべての $\zeta \in B_i$（$(m-1)$-次元 Lebesgue measure について）をとめるごとに $\xi \in (a^i, b^i)$ の函数として絶対連続なことゝする $(i=1, \ldots, m)$．
M 上の函数 f が ACL とは $f|B$ がすべての座標直方体 B について ACL なことゝする．かゝる f に対しては Dirichlet 積分

(4) $$D_M(f) = \int_M \int \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdots dx^m$$

が定義できる．M 上有界連続 ACL 函数 f で $D_M(f) < \infty$ となるものの全体を $\mathcal{R}(M)$ と記す．これは通常の函数の和積に関して algebra を作り，Royden algebra と呼ぶ．

２個の Riemann 多様体 M_1, M_2 の間の位相同型 T を考える．$\rho_i(p, q) = \rho_{M_i}(p, q)$ として，もしある有限定数 K があって

(5) $$\limsup_{r \to 0} \frac{\max_{\rho_i(p, p_0) = r} \rho_j(T_i p, T_i p_0)}{\min_{\rho_i(p, p_0) = r} \rho_j(T_i p, T_i p_0)} \le K$$

が M_i のすべての点 p_0 で成り立つならば，T は quasiconformal mapping と呼び M_1 と M_2 は同一の quasiconformal structure をもつと言う．こゝで $(i, j) = (1, 2)$ 又は $(2, 1)$，$T_1 = T$，$T_2 = T^{-1}$．

もし(5)の代りに更に強く

$$(6) \qquad K^{-1}\rho_1(p,q) \leq \rho_2(Tp,Tq) \leq K\rho_1(p,q)$$

が M_1 のすべての2点 p, q で成り立つならば T は quasiisometry と呼ばれ, M_1 と M_2 は同一の quasiisometric structure をもつと言う.

以上の定義のもとに次の結果をのべることが出来る:

定理: m次元 Riemann 多様体 M に付ずいした Royden algebra $\mathcal{R}(M)$ の代数的構造は, M の quasiconformal structure $(m=2)$ 又は M の quasiisometric structure $(m \geq 3)$ によりかつそれのみにより決定される.

この定理の証明は Pacific J. Math. に近刊の筆者の二論文 (Radon-Nikodym densities and Jacobians ; Royden algebras and quasi-isometries of Riemannian manifolds) に与えられているが, こゝでは M が E^m の部分領域の場合に証明する. その場合更に $m=2$ のときは Sario と筆者の本 (Classification Theory of Riemann surfaces, Springer, 1970) に詳しくのべてあるので, $m \geq 3$ に限定して話をする. 更に, M_1 から M_2 への quasiisometry があれば, それが $\mathcal{R}(M_1)$ から $\mathcal{R}(M_2)$ への代数同型を induce

することもほゞ自明だから，

"E^m $(m \geq 3)$ の部分領域 M_1，M_2 に対し，$\mathcal{R}(M_1)$ と $\mathcal{R}(M_2)$ の間の代数同型は M_1 から M_2 への quasiisometry を induce する"

ことのみを證明する．

§3．證明の大要

$\mathcal{R}(M)$ の maximal ideal space（$\mathcal{R}(M)$ は norm $|||f|||_M = \|f\|_\infty + \sqrt{D_M(f)}$ による norm 環となる）M^* は M の Royden 完閉化と呼ばれ M を open dense に包んでいる．$p^* \in M^*$ が $p^* \in M$ となる為の必要十分條件は $\{p^*\}$ が G_δ-set となることである．これより $\mathcal{R}(M_2)$ から $\mathcal{R}(M_1)$ への代数同型は M_1 から M_2 への位相同型 T により $f \to f \circ T$ と表される．又これが norm 環の代数同型なことからある有限定数 $K \geq 1$ があって

$$K^{-1} |||f|||_{M_2} \leq |||f \circ T|||_{M_1} \leq K |||f|||_{M_2}$$

がすべての $f \in \mathcal{R}(M_2)$ に対して成立する．$\mathcal{R}(M)$ が之例の函数の max, min に関してベクトル束を作ることゝ，norms $\|f\|_\infty$，$\sqrt{D_M(f)}$ の特殊性により（筆者：Continuity in mixed norms, Proc. Japan Acad. 45 (1969), 385-387）

(7) $\quad K^{-2} D_{M_2}(f) \leq D_{M_1}(f \circ T) \leq K^2 D_{M_2}(f)$

がすべての $f \in \mathcal{R}(M_2)$，従ってすべての M_2 上 ACL で $D_{M_2}(f) < \infty$ な函数 f について成立する．この様な T は Dirichlet mapping と呼ばれる．したがって "Dirichet mapping は quasiisometry $(m \geq 3)$" を示せばよい．球環領域の harmonic modulus を利用すると T は measurable，従って Randon-Nikodym density R_T をもつことがわかる．他方 T は常に a.e. に Jacobian J_T をもつ．こゝで実函的定理が必要となる：一般に

定理：T が $E^m\ (m \geq 1)$ の領域 M_1 から M_2 への位相同型で measurable 且つ M_1 の殆んどいたる点で偏微分可能とする．そのとき常に

$$(8) \qquad R_T(x) \leq |J_T(x)|$$

が殆んどすべての点 $x \in M_1$ で成立する．

これと(7)式を使って，ある定数 K_1 に対し

$$(9) \qquad |J_T(x)|^2 \leq K_1^m\ |J_T(x)|^m$$

が M_1 の殆んどすべての点で成り立つことがわかる．$m \geq 3$ の仮定が本質的にきいてくるのはこの点であって，(9)から

$$\operatorname*{ess.\,inf}_{x \in M_1} |J_T(x)| > 0$$

が得られ，証明が終る．$m = 2$ なら end up with nothing である．この点大変筆者には面白く思われ，技術上の $m \geq 3$ の意味はよくわかるが，真の本質が何か未だよくわからない．