数理解析研究所講究録
143巻 1972年 45-54

$H^1(U^n)$ の端点と極値問題について

茨城大 理　荷見守助

§1、序、　複素平面上の単位円板 U 上の Hardy 族に関しては古くから論じられてゐるが、その中で単位球の端点と極値問題について最近薮田氏は多重円板 U^n 上の Hardy 族への拡張ならびに函数環的な抽象化を考へ種々な結果を出してゐる。この小文では，薮田氏の結果への簡単な注意を述べる．

U を $\mathbb{C}$ 上の単位開円板，T を単位円周とし，U^n, T^n で n 次元の多重円板及びトーラスを表はす．また我々は $H^1(U^n)$ により U^n 上の正則函数 f で

$$\|f\|_1 = \sup\left\{\int_{T^n}|f(r\omega)|\,dm_n(\omega) : 0<r<1\right\} < +\infty$$

なるものの全体を表はす．こゝで m_n は T^n 上の正規化された Lebesgue 測度を表はす．よく知られてゐるやうに([5] 参照) $f\in H^1(U^n)$ は T^n 上の殆んど全ての点で非接線方向の境界値を持ち，それは $L^1(m_n)$ の要素 f^* を一意に決定し，しかも対応 $f\longmapsto f^*$ は $H^1(U^n)$ から $L^1(m_n)$ への linear isometry である．

我々は記号を簡単にする為に，f と f^* を区別せずに同じく f と書き，$H^1(U^n)$ を $L^1(m_n)$ の部分空間とも看做す事にする．

さて，$n=1$ の時，de Leeuw と Rudin [1] は $f \in H^1(U^n)$ が $H^1(U^n)$ の単位球の端点なる為の必要充分條件は $\|f\| = 1$ 且つ f が outer，即ち

$$\log|f(0)| = \int_T \log|f(w)|\,dm_1(w) > -\infty,$$

である事を示した．また $n > 1$ に対して，Rudin [5] は $f \in H^1(U^n)$ が

$$\log|f(0)| = \int_{T^n} \log|f(w)|\,dm_n(w) > -\infty$$

を満す時 outer であると定義した．薮田氏も注意しているやうに，$f \in H^1(U^n)$ がノルム 1 で且つ outer ならば，f は $H^1(U^n)$ の単位球の端点である．ところが同氏によれば，この逆は成立せず（$n \geqq 2$），$\pi(z_1 + z_2)/4$ なる反例が与へられた [4]．また同氏は n 次元の Hardy 族に於ける極値問題の一意性について，de Leeuw-Rudin [1] 等の結果を拡張すべく種々の面白い議論を展開している．

本稿では，1 次元の結果を帰納法で拡張する事により，此迄の結果が殆んど全て得られる事、しかもそれ等が拡張される事、議論が可成単純化される事などを示したい．

§2. *Quasi-analytic subspaces.* (X,μ)を有限測度空間，$L^1(\mu)$をX上の測度μに関する複素L^1-空間とする．そのノルムを$\|\cdot\|_1$または$\|\cdot\|_\mu$と書く．$L^1(\mu)$の線型部分空間Eが(X,μ)について<u>quasi-analytic</u>（略して q.a.）とは，$f\in E$がXの正測度の部分集合上で0ならば$f=0$なる事とする．例へば$H^1(T^n)$は(T^n, m_n)について q.a. である．

補題 2.1. (X,μ)，(Y,ν)を二つの有限測度空間とし，E，F，Gを夫々$L^1(\mu)$，$L^1(\nu)$，$L^1(\mu\times\nu)$の部分空間で次を満すものとする．

(2.2) E，Fは夫々(X,μ)，(Y,ν)について q.a.

(2.3) 任意の$h\in G$に対し，殆んど全ての$x\in X$について$h(x,\cdot)\in F$ 且つ殆んど全ての$y\in Y$について$h(\cdot,y)\in E$.

この時，Gは$(X\times Y, \mu\times\nu)$について q.a. である．

我々は，$h\in G$に対して，$X_h=\{x\in X : h(x,\cdot)\in F\}$，$Y_h=\{y\in Y : h(\cdot,y)\in E\}$と置く．これ等は零集合を度外視すれば一意に決定される．帰納法により次も簡単に示される．

系 2.4. (X_i,μ_i) $(1\leqq i\leqq n)$を有限測度空間とし，E_iを$L^1(\mu_i)$の q.a. 部分空間とする．またJ_nを$L^1(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)$の部分空間で次を満すものとする．

(2.5) 任意の$h\in J_n$に対し次が成立する：任意のi $(1\leqq i\leqq n)$

に対し，函数 $x_i \longmapsto h(x_i, y_{(i)})$ は殆んど全ての $y_{(i)} \in X_1 \times \cdots \times \hat{X}_i \times \cdots \times X_n$ に対し E_i に属する．但し記号 ^ はその因子が除かれる事を示す．

この時，J_n は $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ について q. a. である．

§3. *Extremal functions*. E を $L^1(\mu)$ の部分空間とする．$f \in E$ が <u>E で extremal</u> とは，$f = 0$ であるか或は $\|f\|_\mu \neq 0$ 且つ $f/\|f\|_\mu$ が E の単位球の端点である事を云う．

定理 3.1．E, F, G は補題 2.1 の通りとし，$f \in G$ とする．いま，殆んど全ての $y \in Y_f$ に対して $f(\cdot, y)$ は E で extremal，且つ殆んど全ての $x \in X_f$ に対して $f(x, \cdot)$ は F で extremal とすれば，f は G で extremal である．

これを示すには，$h \in G$ に対し $\|f + h\|_{\mu\times\nu} = \|f - h\|_{\mu\times\nu} = \|f\|_{\mu\times\nu} = 1$ として $h = 0$ を出せばよいが，これは Fubini の定理と性質 q. a. を組合せて簡単に得られる．この定理から帰納法によって次が得られる．

系 3.2．E_i $(1 \leqq i \leqq n)$ は $L^1(\mu_i)$ の q. a. 部分空間，J_n は $L^1(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ の部分空間で條件 (2.5) を満すものとする．また $f \in J_n$ は次の條件を全ての i に対して満足するとする：

$(3.3)_i$ 殆んど全ての $y_{(i)} \in X_1 \times \cdots \times \hat{X}_i \times \cdots \times X_n$ に対し，函数 $x_i \longmapsto f(x_i, y_{(i)})$ は E_i に属し且つ E_i で extremal．

この時、f は J_n で extremal である。

これ等の結果を $H^1(U^n)$ に応用して次の結果を得る。

系 3.4. k, k' は自然数で $k+k'=n$ とし、$f \in H^1(U^n)$ とする。もし殆んど全ての $w_1 \in T^k$ に対し $f(w_1, \cdot)$ は $H^1(U^{k'})$ で extremal であり、殆んど全ての $w_2 \in T^{k'}$ に対し $f(\cdot, w_2)$ は $H^1(U^k)$ で extremal であるならば、f は $H^1(U^n)$ で extremal である。

次に、$U_1 = U_2 = \cdots = U_n = U$、$T_1 = T_2 = \cdots = T_n = T$ として、$U^n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$、$T^n = T_1 \times \cdots \times T_n$ と表はす事にする。

系 3.5. $f \in H^1(U^n)$ は全ての i に対し次の條件を満すとする：

$(3.6)_i$ 　殆んど全ての $w_{(i)} \in T_1 \times \cdots \times \hat{T}_i \times \cdots \times T_n$ に対し、$z_i \longmapsto f(z_i, w_{(i)})$ は $H^1(U_i)$ に属し且つ outer である。

この時、f は $H^1(U^n)$ で extremal である。

これは系 3.2 を deLeeuw-Rudin [1] の結果と組合せれば分る。系 3.5 を用ひれば、outer でない extremal な函数をいくつか作る事が出来る。

(i) 藪田氏の例 z_1+z_2. 任意に固定した実数 θ に対して、$e^{i\theta}+z$ は outer である。従て (3.5) によって z_1+z_2 が extremal であることが知られる。但し $n \geqq 2$.

(ii) f, g が夫々 $H^1(U^k)$, $H^1(U^{n-k})$ での inner function ならば、$f(z_1, \cdots, z_k) + g(z_{k+1}, \cdots, z_n)$ は extremal である。

$f\in H^1(U^n)$が全ての i に対し條件$(3.6)_i$ を満足する時，<u>分離的に outer</u> と呼ぶ事にすれば、上の結果は，分離的に outer ならば extremal である事を示してゐる．勿論，任意の outer な $f\in H^1(U^n)$ は分離的にも outer である．

問題．$f\in H^1(U^n)$ が extremal ならば，分離的に outer であるか？

§4．極値問題の一意性．(X,μ) を有限測度空間とし，E を $L^1(\mu)$ の部分空間とする．E 上の有界線型汎函数 Φ に対し，$S^\Phi\equiv\{f\in E:\|f\|_1=1,\ \Phi(f)=\|\Phi\|\}$ と置く．Hahn-Banach の定理により $\varphi\in L^\infty(\mu)$ で，$\|\varphi\|_\infty=\|\Phi\|$ 且つ

$$\Phi(f)=\int_X f\varphi\,d\mu \qquad (\forall f\in E)$$

なるものが存在する．この時，$f\in S^\Phi$ ならば

(1) $$f(x)\varphi(x)\geqq 0 \qquad \mu\text{-a.e.},$$

(2) $$|\varphi(x)|=\|\varphi\|_\infty \qquad (\forall x\in S(f))$$

が成立つ．ここで $S(f)=\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ であり，零集合を度外視すれば一意に定まる．逆に，$f\in E$, $\|f\|_1=1$ が (1), (2) を満せば、$f\in S^\Phi$ である．

さて，E が (X,μ) について $q.a.$ ならば、E の任意の $f(\neq 0)$ に対して $S(f)=X$ であり，従て S^Φ はその中の要素を一つ知

れば完全に決定される．即ち，$f\in S^{\Phi}$ ならば，$S^{\Phi}=\{g\in E:\|g\|_1=1,\ \arg g(x)=\arg f(x)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\ \text{a.e.}\}$．従て，$S^{\Phi}$ の代りに S^f と書いてもよい．さて我々は次の定義を置く．$f\in E$ が <u>E で unicity property</u> を持つとは，$f\neq 0$ 且つ $g=f/\|f\|_1$ と置く時 $S^g=\{g\}$ なる事．

定理 4.1．E，F，G は補題 2.1 の通りとし，$f\in G$ を 0 でないとする．もし殆んど全ての $x\in X_f$ に対し $f(x,\cdot)$ は F で u.p. を持ち，殆んど全ての $y\in Y_f$ に対し $f(\cdot,y)$ は E で u.p. を持つとすれば，f は G で u.p. を持つ．

系 4.2．E_i $(1\leqq i\leqq n)$ 及び J_n は系 3.2 の通りとし，$f\in J_n$ は全ての i に対し次の条件を満すものとする．

$(4.3)_i$　殆んど全ての $y_{(i)}\in X_1\times\cdots\times\hat{X}_i\times\cdots\times X_n$ に対し，$x_i\longmapsto f(x_i,y_{(i)})$ は E_i に属し，且つ E_i で u.p. を持つ．

この時，f は J_n で u.p. を持つ．

これを $H^1(U^n)$ に適用すれば次を得る．

系 4.3．$f\in H^1(U^n)$ は 0 でなく，次の條件を満すものとする $(1\leqq i\leqq n)$．

$(4.4)_i$　殆んど全ての $w_{(i)}\in T_1\times\cdots\times\hat{T}_i\times\cdots\times T_n$ に対し，$z_i\longmapsto f(z_i,w_{(i)})$ $(z_i\in U_i)$ は $H^1(U_i)$ に属し且つ $H^1(U_i)$ で u.p. を持つ．

この時，f は $H^1(U^n)$ で u.p. を持つ．

この系により，薮田氏の結果のいくつかを統一的に拡張された形で導き出す事が出来る．例へば，

定理 4.5 (薮田 [5])．$f \in H^1(U^n)$ とする．もし f が outer で且つ $1/f \in L^1(m_n)$ ならば，f は $H^1(U^n)$ で u.p. を持つ．

この定理の $n=1$ の場合と (4.3) を組合はせれば，

系 4.6．$f \in H^1(U^n)$ とする．もし f が分離的に outer で，且つ全ての i について次の条件を満すとすれば，f は $H^1(U^n)$ で u.p. を持つ：

$(4.7)_i$ 殆んど全ての $w_{(i)} \in T_1 \times \cdots \times \hat{T}_i \times \cdots \times T_n$ に対し，$w_i \longmapsto 1/f(w_i, w_{(i)})$ $(w_i \in T_i)$ は T_i 上で integrable．

また，次の結果を考へる．

定理 4.8 (薮田 [7])．$f \in H^1(U^n)$ が 0 ではなく，且つ T^n 上殆んど到る処 $\mathrm{Re}\, f \geq 0$ を満せば，f は $H^1(U^n)$ で u.p. を持つ．

薮田氏はこれを証明する為に，n-調和函数の性質などを用いた．しかし我々の結果によれば，$n=1$ の時が分れば，一般の場合は (4.3) から直ぐ分る訳である．$n=1$ の時は調和函数の普通に知られた性質だけで簡単に証明が出来る．しかも，

系 4.9．$f \in H^1(U^n)$ が 0 ではなく，且つ全ての i に対し次の条件を満すとする．

$(4.10)_i$ 殆んど全ての $w_{(i)} \in T_1 \times \cdots \times \hat{T}_i \times \cdots \times T_n$ に対し，$w_{(i)}$ と

f とに依存する実数 θ で

$$\theta-\pi/2 \leqq f(w_i, w_{(i)}) \leqq \theta+\pi/2 \quad \text{a.e.} \pmod{2\pi}$$

を殆んど全ての $w_i\in T_i$ に対し満足するものが存在する．この時，f は $H^1(U^n)$ で u.p. を持つ．

この系の極く特殊な場合として，z_1+z_2 が $H^1(U^n)$ $(n\geqq 2)$ で u.p. を持つ事（薮田 [6]）が分る．更に一般に

系 4.11. f, g が夫々 $H^1(U^k)$, $H^1(U^{n-k})$ で inner ならば，$f(z_1,\cdots,z_k)+g(z_{k+1},\cdots,z_n)$ は $H^1(U^n)$ で u.p. を持つ．

もっと複雑な条件を与へる事も出来るが余り意味があるとも思はれないので止める．いづれにしても，u.p. を持つ函数の特徴付けは $n=1$ の時にも出来てはゐないやうなのでその解決が望まれる処である．詳しい議論は後に譲って問題を一つだけ挙げる．

問題． f, g は $H^1(U)$ で u.p. を持ち且つ $fg\in H^1(U)$ とする．この時，fg も $H^1(U)$ で u.p. を持つにはどんな条件が必要（で充分）か？

参考文献

[1] K. deLeeuw and W. Rudin, Extreme points and extremum problems in H_1, Pacific J. Math. 8 (1958), 463–485.

[2] M. Hasumi, A remark on extreme points in H^1 on polydiscs, Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A. Math. 3 (1971), 25–28.

[3] W. Rudin, Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

[4] K. Yabuta, Extreme points and outer functions in $H^1(U^n)$, Tôhoku Math. J. 22 (1970), 320-324.

[5] ———, Unicity of the extremum problems in $H^1(U^n)$, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 181-184.

[6] ———, Remarks on extremum problems in H^1, Tôhoku Math. J., forthcoming.

[7] ———, Some uniqueness theorems for $H^p(U^n)$ functions, forthcoming.

註 1) §3の末尾に述べた問題は否定的に解かれた。任意の複素数 α ($|\alpha| > 1$) に対して、函数 $\alpha z_1 - z_2$ は $H^1(U^2)$ で extremal ではあるが、分離的に outer ではない。Extremal であることは、[2] の方法で示される。この反例は W. Rudin による。

註 2) この報告で述べられた定理の証明等については、次の論文を参照されたい: M. Hasumi, Extreme points and unicity of extremum problems in H^1 on polydiscs, Pacific J. Math. (近刊).