数理解析研究所講究録
145巻 1972年 147-156

留数理論と超函数
—Local cohomology 理論よりみた留数理論—

名大 理　浪川幸彦

留数は一変数解析函数論で良くしられるが、この多変数への拡張は Poincaré, Picard, Leray, Norguet らによってなされた。([5] の文献参照) 特に Leray の仕事([3]) は決定的である。こゝでは、この理論を category of "holomorphy" に於て、local cohomology を用いてみなおすことを目標にする。たゞし初等的部分に話を限る。注)

§0. 記号

次の記号達は、最後まで断わりなしに用いる。

X :(複素)n-次元 複素解析多様体。

$\mathcal{O}_X$: X 上の正則函数の芽の層。

注) 他に、例えば Cauchy - Fantapiè の公式なども、書き直すことができる。

Ω_X^p :　X上の正則 p-形式の芽の層。

—o—

Y :　X の余次元 d, 次元 m の閉部分(解析)多様体。

$U = X - Y$

$j : U \to X$　自然な単射。

§1. Fundamental quasi-isomorphism.

次のようにして、自然な単射 : $\Omega_Y^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{d+p})$ がえられる。任意に $0 \in Y$ をとるとき、0 を中心とする X の局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ で、さらに $Y = \{(x) ; x^{m+1} = \cdots = x^n = 0\}$ となっているものをとる。このとき写像を

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega_{Y,0}^p & \longrightarrow & \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{p+d})_0 \\
\upin & & \upin \\
\omega_0 & \longmapsto & \omega_0 \wedge \left(\dfrac{dx^{m+1}}{x^{m+1}}\right)_0 \wedge \cdots \wedge \left(\dfrac{dx^n}{x^n}\right)_0
\end{array}
$$

によって定める。これが座標のとりかたによらず、層の単射を与えることがわかる。別に intrinsic な定義の仕方もある。(cf. [2] p.151～)

定理(相対的 Poincaré 補題): 上に定義した

$$\Omega_Y^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{d+p}) \qquad (p = 0, \cdots, m)$$

は、外微分 d を微分作用素とする複体の射で、しかもその cohomology はひとしい。とくに、

$$(*) \qquad \mathcal{H}^i(\mathcal{H}^d_Y(\Omega^{\cdot}_X)) = \begin{cases} \mathbb{C}_Y & i=d \\ 0 & i \neq d \end{cases}$$

（$\mathbb{C}_Y$ は Y 上の、fibre を $\mathbb{C}$ とする定数層）。

証明： 複体の射であることは、

$$d\left(\omega \wedge \frac{dx}{x}\right) = d\omega \wedge \frac{dx}{x} + (-1)^p \omega \wedge \underbrace{d\left(\frac{dx}{x}\right)}_{=0}$$

よりあきらか。

後半については、導来函手の一般的手法から、(具体的には超曲面で cut してゆく論法により) $d=1$ の場合に帰着される。Poincaré 補題から、

$$\mathcal{H}^i(\Omega^{\cdot}_Y) = \begin{cases} \mathbb{C}_Y & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$$

は分っているから、(*) を証明すれば足りる。

話は局所的であるから、

$$X = \{ (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{C}^n \ ; \ |x^i| < \varepsilon \ \ (\varepsilon > 0) \}$$

$$Y = \{ (x) \ ; \ x^n = 0 \} \subset X$$

としてよい。

$$0 \longrightarrow \Omega^p_X \longrightarrow j_* \Omega^p_U \longrightarrow \mathcal{H}^1_Y(\Omega^p_X) \longrightarrow 0 \quad \text{(完全)}$$

だから、Xについての Poincaré 補題と併せれば、(ホ)は次の補題から従う。

補題 (Atiyah - Hodge)

$$\mathcal{H}^i(j_*\Omega_U^{\cdot}) = \begin{cases} \mathbb{C}_X & i=0 \\ \mathbb{C}_Y & i=1 \\ 0 & i>1 \end{cases}$$

Atiyah - Hodge の [1] に於ける証明が、そのまゝ用いられる。仲々おもしろいが、少々長くなるので省略する。

系： $H^i(Y,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_Y^{i+2d}(X,\mathbb{C})$。

この同型を homology にうつした

$$H_i^c(Y,\mathbb{C}) \longrightarrow H_{i+2d-1}^c(X,\mathbb{C})$$

は、Yの cycle を、Yの管状近傍の境界に射影する写像である。

§2. $\mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^n)$ の積分。

抽象的な一般論はこゝで述べるのはやめるとして、ともかくX上の積分の理論から、次のような積分が定義される。

1) Y上の大域的積分。

$$\int_Y : H^n_Y(\Omega^n_X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

2) とくにXがYにretractできるときは、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\sigma"'] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "id"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Res} : \mathcal{H}^d_Y(\Omega^n_X) \longrightarrow \Omega^m_Y$$

が定義され、§1で定義した $\Omega^m_Y \longrightarrow \mathcal{H}^d_Y(\Omega^n_X)$ はその右逆写像である。これを留数写像とよぶ。Res はまた、fibre方向のd-次微分形式の芽の層 $\Omega^d_{X/Y}$ を用いて、

$$\mathrm{Res}' : \mathcal{H}^d_Y(\Omega^d_{X/Y}) \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

ともかける。

さて、このように強い条件を加えないと留数写像が定義できないのがholomorphicな場合の特徴である。C^∞なら、Xを、Yに十分近い近傍でおきかえてやればretractが存在するのに対し、holomorphicには、局所的には~~無論~~あるが、大域的(Yについて)には必ずしも存在しない。

§3. 幾つかの応用。

1) $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ を対角線写像(i.e. $x \longmapsto (x, x)$)、$p : X \times X \longrightarrow X$ を第一成分への射影とする。これはΔ

の retract である。ところで
$\mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X})$ には $\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)}$
が作用しているから、

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)} \times \mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X}) \longrightarrow \mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X})$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Res}'} \mathcal{O}_X$$

なる写像の合成により、自然な写像

$$(**) \qquad \mathcal{H}^n_{\Delta(X)}(\Omega^n_{X\times X/X}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)}, \mathcal{O}_X)$$

が定義される。これは容易に分るように単射であるが、全射ではない。しかし、$\mathcal{O}_{X\times X|\Delta(X)}$, $\mathcal{O}_X$ を適当な意味で位相環層とみれば、その連続射の全体と、上の(**)の像とが一致すると思われる。$\Delta(X)$ の決める ideal層を $\mathcal{J}$ とするとき、

$$\mathcal{P} = \varprojlim_{k\geq 0} \mathcal{O}_{X\times X}/\mathcal{J}^{k+1}$$

に離散空間の射影的極限の位相をいれて、その意味で連続な射の全体、($\mathcal{O}_X$ は離散位相)

$$\mathcal{D}iff = \mathcal{H}om.\mathrm{cont}._{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{O}_X)$$

が、ふつうの微分作用素であることを考えれば (**) は local operator の層のより具体的な意味付けとみられる。

2) たかだか一次の極の特異性をもつ形式の層（Yが余次元1の場合）

§1で定義した $\Omega_Y^{p-1} \longrightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p)$ の像の、自然な写像 $j_*\Omega_U^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p)$ による逆像を $\Omega_X^p\langle Y\rangle$ とかき、Yにたかだか一次の極の特異性をもつ p-形式の層とよび、自然な射 $res : \Omega_X^p\langle Y\rangle \longrightarrow \Omega_Y^{p-1}$ を留数写像とよぶ。定義よりあきらかに、次の可換図式がなりたつ。

$$\begin{array}{ccccccccl}
0 & \longrightarrow & \Omega_X^p & \longrightarrow & \Omega_X^p\langle Y\rangle & \longrightarrow & \Omega_Y^{p-1} & \longrightarrow & 0 \quad (\text{完全}) \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_X^p & \longrightarrow & j_*\Omega_U^p & \longrightarrow & \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p) & \longrightarrow & 0 \quad (\text{完全})
\end{array}$$

これらの hypercohomology をとり、§1の定理を用いれば、

命題： $\mathbb{H}^p(\Omega_X^{\cdot}\langle Y\rangle) \xrightarrow{\sim} H^p(U, \mathbb{C})$

注意： $\Omega_X^p(Y) = \{\omega \in j_*\Omega_U^p : \omega$ はYでたかだか一位の極をもつ p-形式$\}$ とすれば、一般に $\Omega_X^p\langle Y\rangle \subsetneqq \Omega_X^p(Y)$ である。しかし容易にわかるように、$\Omega^p(Y)$ の閉形式はすべて $\Omega_X^p\langle Y\rangle$ に含まれる。とくに $p=n$ ならば $\Omega_X^n\langle Y\rangle = \Omega_X^n(Y)$ であり、このときの留数写像

$$res : \Omega_X^n(Y) \longrightarrow \Omega_Y^{n-1}$$

は Poincaré residue map とよばれる。

3) Cauchy-Weil 積分。

§1でのべた $\Omega^p_Y \longrightarrow \mathcal{H}^d_Y(\Omega^{d+p}_X)$ が座標によらないことと，積分論とであわせれば，ただちにいわゆるCauchy-Weil積分の式がえられる。つまり，$Y=\{0\}$ $(0\in X)$ とし，0を中心とする二種の局所座標を $(x^1,\dots,x^n)$, $(y^1,\dots,y^n)$ とすれば，0の近傍で正則な函数達 g^i_j $(i,j=1,\dots,n)$ が存在して，

$$y^i = \sum_j g^i_j x^j$$

とかゝれ，$g=\det(g^i_j)$ は0の近傍で0にならない。

$\varphi(x)$ を0の近傍で正則な函数とすれば，

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\oint_{|y^i|=\varepsilon}\frac{\varphi(y)\,g\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n}{y^1\cdots y^n}$$

$$=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\oint_{|y^i|=\varepsilon}\frac{\varphi(y)\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n}{y^1\cdots y^n}$$

$$=\varphi(0)$$

(こゝでは最も単純な場合をとりあつかった。cf [6])

4) Cauchy-Martinelli 積分

Yがまず一般の場合を考える。X上の C^∞-級 (p,q)-形

式の芽の作る層を $\mathcal{A}^{(p,q)}$ とすれば、これは fine sheaf であるから

$$H^i_Y(\mathcal{A}^{(p,q)}) = 0 \quad (i \neq 1)。$$

従って

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \mathcal{A}^{(p,\cdot)}$$

が resolution である（Grothendieck 補題）ことと併せて、

$$(***) \qquad H^q_Y(X, \Omega^p) = \mathcal{H}^{q-1}(H^1_Y(\mathcal{A}^{(p,\cdot)}))$$

をうる。

さて、$Y = \{0\}$ $(0 \in X)$ の場合にもどろう。0を中心とする局所座標を $(x^1, \cdots, x^n)$ とする。このとき $p = q = n$ での (***) の対応を具体的にみてやると

$$\frac{dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}{x^1 \cdots x^n} \longmapsto \frac{(n-1)! \sum_i (-1)^i \bar{x}^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge d\bar{x}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{x}^i} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n}{(r^2)^n}$$

$$(r^2 = \sum_i x^i \bar{x}^i)$$

となる。これから、

定理：(Cauchy - Martinelli [4])

$$S = \{ (x) \; ; \; \sum x^i \bar{x}^i = \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0) \}$$

とし、$\varphi(x)$ を S およびその内部で正則な函数とする。このとき、

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(2\sqrt{-1}\pi)^n} \int_S \varphi(x) \frac{\sum_i (-1)^i \bar{x}^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge d\bar{x}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{x}^i} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n}{(r^2)^n}$$

References

[1] Atiyah, M.F. and Hodge, W.V.D. : Integrals of the second kind on an algebraic variety, Ann. of Math., Vol.62(1955), pp56-91.

[2] Hartshorne, R. : Ample subvarieties of algebraic varieties, Lect. Notes in Math. 156, Springer, Berlin, (1970).

[3] Leray, J. : Le problème de Cauchy, III, Bull. Soc. Math. France, Vol.87(1959), pp81-180.

[4] Martinelli, E. : Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes, Colloques sur les fonctions de plusieurs variables, Georges Thone, Liège, (1953)

[5] Norguet, F. : Dérivées partielles et résidus de formes différentielles sur une variété analytique complexe, Sém. Lelong, 1958/59.

[6] Weil, A. : L'integrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. Vol.111(1935), pp178-182.