数理解析研究所講究録
145巻 1972年 109-122

超函数の台と特異台の関係

東大 理 森本光生

はじめに　Vを向きづけられた実解析的多様体とし，$\mathcal{B}$でV上の（佐藤のいみの）超函数の芽の層，$\mathcal{A}$でV上の実解析的函数の芽の層を表わす．T^*Vを，V上の余接バンドルとする．

$$S^*V = (T^*V - V)/\mathbb{R}^+$$

はV上の余接球バンドルと呼ばれる．$(x, \xi) \in T^*V$，$(\xi \neq 0)$の代表するS^*Vの点を$(x, i\xi\infty)$と書く．S^*VからVの上への標準的な射影をπで記す．

我々の考察の土台となる層CはS^*V上の層として定義される．しかも次の系列の写像が標準的に構成され，完全系列が得られる：

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \pi_* C \longrightarrow 0$$

ここでαは自然な埋蔵写像で，$\pi_* C$は層Cの射影πによる順像である．（この理論の詳細については，[4, 5, 6]を参照されたい．）V上の超函数fに対し，層Cの断面βfの台をfの（分解された）特異台と呼び，

$$S.S.f = \mathrm{supp}\, \beta f$$

と書く．上の完全系列より $S.S.f$ が空であれば f は実解析的である．通常のいみの特異台は $S.S.f$ の π による射影である。

超函数の芽の層 $\mathcal{B}$ が軟弱であることは良く知られているが，柏原［2］により層 $\mathcal{C}$ が軟弱であることも証明された．したがって 任意の形状の台をもつ超函数も，任意の形状の特異台をもつ超函数も存在する．然し，f の特異台の形は f の台のとりうる形を制限するし，逆に f の台の形は特異台の形を規制する．このような台と特異台の相互依存性の例を示すのがこの記事の目的である．

最も簡単な場合として，V が連結とすると，

$$S.S.f=\phi \implies \operatorname{supp} f = V \text{ 又は } \phi .$$

実際 仮定より f が実解析的であるからである．この事実をふくむ一般的な結果は，河合－柏原の補題である．この補題は Holmgren の定理の証明に用いられたものである．

<u>補題</u>（［6］の補題 8.5）（河合－柏原）

f を 点 $x_0\in V$ の近傍 Ω で定義された超函数とする．φ を Ω 上の実解析函数で，$d\varphi_{x_0}\neq 0$ とする．今 f が次の２条件を満足すると仮定する：

(a) $S.S.f \not\ni (x_0, i(d\varphi_{x_0})\infty)$ または

$S.S.f \not\ni (x_0, -i(d\varphi_{x_0})\infty)$

(b) $\quad \mathrm{supp}\, f \subset \{x \in \Omega \,;\, \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$

この時 f は x_0 のある近傍でゼロである。

我々が説明するのは、ある種の超函数に対する"準解析性"(quasi-analyticity)の定理で、これは、超函数の台と特異台の相互依存関係を示す、河合-柏原の補題とは別の、現象を記述している。

Schwartz 超函数に対しては、我々の定理に類似の定理はいくつか知られており、公理論的な場の量子論に応用されている。(Vladimirov の教科書[7]の第5章を見られたい。)この書物の用語で説明すると、我々の定理は、領域 G の $B(G)$ 包にあたり、河合-柏原の補題は $B_p(G)$ 包にあたる。

<u>定理の定式化</u> 定理を定式化するために記号をいくつか準備しよう。今後、実解析的多様体 V は $n+1$ 次元実ユークリッド空間 E の開集合とする。E の点 x は $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ で、E の双対空間 E^* の点 ξ は $(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ で表わす。$S^* = (E^* - \{0\})/\mathbb{R}^+$ とおく。$\xi \in E^*$, $\xi \neq 0$ に対し、ξ の代表する S^* の点を $i\xi\infty$ と書く。E^* の部分集合 A に対し、

$$iA\infty = \{i\xi\infty \,;\, \xi \in A,\ \xi \neq 0\}$$

と書く。このとき余接球バンドル S^*V は自然に積多様体

$V \times S^*$ と同一視できる:

$$S^*V \cong V \times S^* = V \times iE^*_\infty .$$

<u>定理</u>

f をユークリッド空間 E の原点の近傍 Ω で定義された超函数とする。f が次の2条件を満足すると仮定する。

i) $\quad S.S.\, f \ni (x, i\xi\infty) \Longrightarrow \xi_0 \neq 0 .$

ii) $\quad a > 0$ が存在して

$$\operatorname{supp} f \ni x \quad \Longrightarrow \quad x_0 \geq a|x_1| .$$

このとき、f は原点のある近傍でゼロである。

<u>結果の復習</u> 定理の証明に用いる道具の準備をする。今ひとつ別のユークリッド空間 $\tilde{E}$, $\dim \tilde{E} = m+1$ を考える。$\tilde{E}$ の双対空間を $\tilde{E}^*$ で表わす。$y \in \tilde{E}$ と $\eta \in \tilde{E}^*$ の座標をそれぞれ $(y_0, y_1, \cdots, y_m)$, $(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_m)$ で表わす。$\tilde{E}$ にミンコフスキー内積

$$(y, y) = y_0^2 - y_1^2 - \cdots - y_m^2$$

を導入する。$\tilde{E}$ の正の光錐を Γ_m で表わす:

$$\Gamma_m = \{ y \in \tilde{E} \,;\, y_0 > 0,\ (y, y) > 0 \} .$$

さらに、

$$\square_m(\eta) = \eta_0^2 - \eta_1^2 - \cdots - \eta_m^2$$

とおく。$\tilde{\Omega}$ で一般に $\tilde{E}$ の開集合を表わす。

オ1に，河合－柏原の補題よりただちに導かれる2つの命題を述べよう．

命題1　もし$\tilde{E}$の開集合$\tilde{\Omega}$が時間的線分lとlのまわりの2重錐D_l

$$D_l = (l + \Gamma_m) \cap (l - \Gamma_m)$$

を含むとする．

このとき

$$S.S.\,u \subset \tilde{\Omega} \times i\{\eta\,;\ \square_m(\eta) \geq 0\}\infty$$

をみたす$\tilde{\Omega}$上の超函数uが，lの近傍でゼロであれば，uは2重錐D_lの中までゼロである．

Hを$\tilde{E}$の空間的な超平面とし，ωをHの開集合とする．ωに底をもつ2重錐D_ωとは，次のように定義される：

$$D_\omega = \{ y \in \tilde{E}\,;\ ((y - \Gamma_m) \cup (y + \Gamma_m)) \cap H \subset \omega \}$$

命題2　$\tilde{E}$の開集合$\tilde{\Omega}$がωを底にもつ2重錐D_ωをふくむと仮定する．

$$S.S.\,u \subset \tilde{\Omega} \times i\{\eta\,;\ \square_m(\eta) \leq 0\}\infty$$

なる$\tilde{\Omega}$上の超函数uが，ωの$\tilde{E}$における近傍でゼロであるならば，2重錐D_ωの中でもゼロである．

次に微分作用素

$$\square_m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial y_m^2}$$

を考える．$\hat{\Omega}$ 上の超函数uが微分方程式

$$\square_m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0 \qquad (\hat{\Omega}\text{上で})$$

を満足していると仮定する．このとき，微分方程式の超函数解の正則性に関する佐藤の基本定理［5，6］によれば，uの特異台 S.S. uは

$$\text{S.S.}\,u\subset\hat{\Omega}\times i\{\eta\,;\,\square_m(\eta)=0\}\infty$$

をみたす．このような特異台をもつuに対しては，命題1と2が成立することに注意しておく．

これから$m=n+1$とし，$\tilde{E}=E\times\mathbb{R}$と考える．

$$(y_0,y_1,\cdots,y_n,y_{n+1})=(x_0,x_1,\cdots,x_n,t)$$
$$(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_n,\eta_{n+1})=(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n,\tau)$$

とおく．$E=E\times\{0\}\subset\tilde{E}$と考える．$u$を$\hat{\Omega}$上の超函数で$\hat{\Omega}$上$\square_m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0$を満足するものと仮定すると，$u$の$\Omega=\hat{\Omega}\cap E$上への制限$u(x,0)$は定義でき，$\Omega$上の超函数として，

$$\text{S.S.}\,u(x,0)\subset\Omega\times i\{\xi\,;\,\square_n(\xi)\geq 0\}\infty$$

をみたす．逆に，次の Cauchy 問題を考える：

$$
(*)\quad \begin{cases} \square_{n+1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = \mu_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \mu_1(x) \end{cases}
$$

ここで Cauchyデータ μ_0 と μ_1 は E の開集合 Ω 上の超函数である。微分作用素 $\square_{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ は t に関して双曲型でないから、上の Cauchy問題は任意に初期データを与えたとき、常に可解ではない。次の河合[3, 3 bis]の定理は、可解性のための一つの十分条件を与えている：

<u>命題3</u>　もし2つの超函数 μ_0, μ_1 が

$$S.S.\,\mu_i \subset \Omega \times i\{\xi\,;\,\square_n(\xi) > 0\}\infty,\quad i=1,2$$

を満足すれば、上のコーシー問題は局所的に可解、しかも解は一意的である。

実際、$\square_{n+1}(\xi, \tau) = \square_n(\xi) - \tau^2$ であるから、$\square_n(\xi) > 0$ なら、τ に関する2次方程式 $\square_n(\xi, \tau) = 0$ は、2つの相異なる実根をもつ。故に、$\square_{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ は、$I = \Omega \times i\{\xi\,;\,\square_n(\xi) > 0\}\infty$ とおくとき、I－双曲型である。したがって、命題3は河合の定理の特殊な場合である。

<u>定理の証明</u>

必要ならば ゼロの近傍 Ω を縮小して 正数 $M > 0$ を見付

けて，

$$S.S.f \ni (x, i\xi\infty)$$
$$\Longrightarrow M^2\xi_0^2 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_n^2 > 0$$

としてよい．xの座標のスケールをとりかえれば（正数aも適当に変更して），条件 i) ii) のかわりに，次の条件 i') と ii) をはじめから仮定してよい．

i') $S.S.f \subset\subset \Omega \times i\{\xi ; \square_M(\xi) > 0\}\infty$.

以下 荒木[1]に従って，命題1，2，3を用いて議論をすすめる．(論文[1]の存在は，荒木不二洋氏に教えていただいた．)

Cauchy 問題 (*) を 初期条件

$$\mu_0 = f, \qquad \mu_1 = 0$$

とおいて解く．εを十分小さい正数とすると，

$$\tilde{\Omega} = \{(x, t) ; |x| < \varepsilon, |t| < \varepsilon\}$$

において，Cauchy 問題 (*) の解（超函数解）$u(x, t)$ が存在する．(命題3) ここで εはfに依存して定まることに注意する．

fの台は $\{x ; x_0 \geq a|x_1|\}$ に含まれている（条件ii) ことに注意する．解uはfにより一意的に定まるからuは次の2つの時間的線分l_1，l_2の近傍でゼロになる：

$$l_1 = \{(x_0, r, 0, \cdots, 0) ; -ar-2s < x_0 < ar\}$$

$$l_2=\{(x_0,-r,0,\cdots,0);-ar-2s<x_0<ar\}$$

命題1より，uはl_1のまわりの2重錐D_{l_1}とl_2のまわりの2重錐D_{l_2}の内部でゼロである。(図1を見よ。) 故に u は

$$\omega\equiv D_{l_1}\cap D_{l_2}\cap\{x;x_0=-s\}$$

の近傍でゼロである．図2より ωは

$$d\equiv\{x;x_0=-s,\ x_1^2+\cdots+x_n^2+t^2<(s+ra)^2-r^2\}$$

を含む．uはとくにdの近傍でゼロであるから，命題2により，uはdを底とする2重錐D_dの中でゼロである．D_dは

$$-s<x_0<\sqrt{(s+ra)^2-r^2}-s,\ x_1=\cdots=x_n=t=0$$

なる線分を含む．いま正数r, sが

$$(s+ra)^2-r^2-s^2=r(2as-(1-a^2)r)>0$$

つまり，

$$(\ast)\quad 2as-(1-a^2)r>0$$

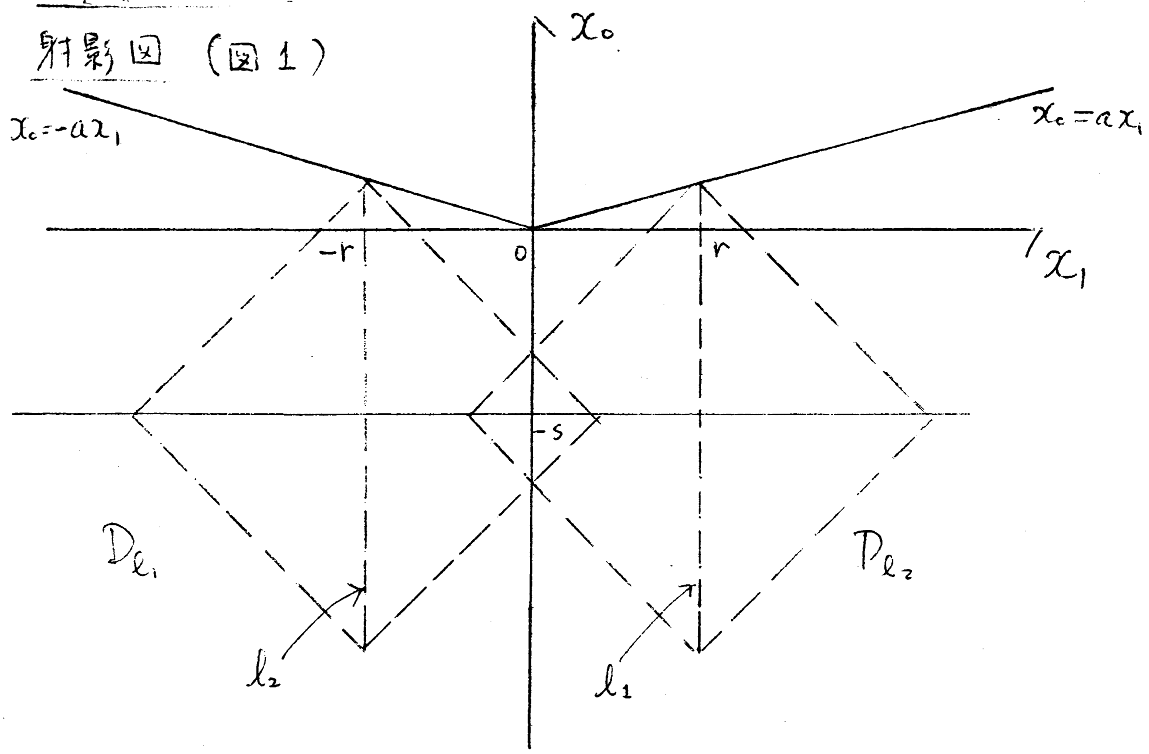
なるかぎり，uはEの原点でゼロとなる．($\ast$)を満足しつつ，正数r, sはいくらでも小さくできるから，証明は完結した．

注意 定理では，ある正数aに対し閉集合

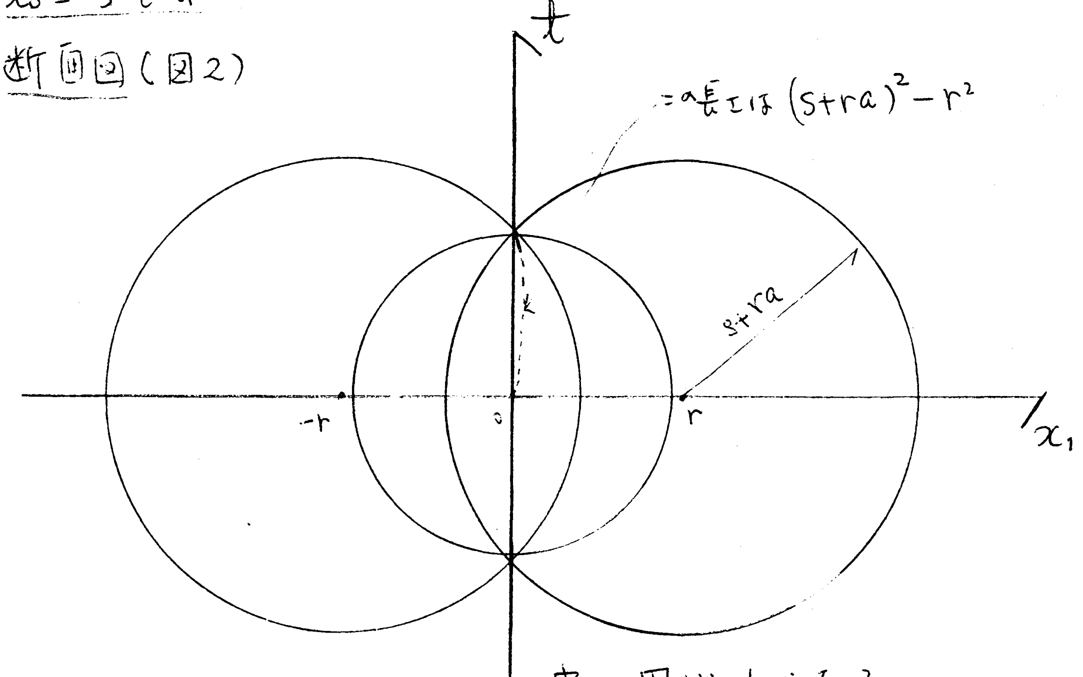
$$F_a=\{x\in\Omega;\ x_0\geq a|x_1|\}$$

がfの台を含むと仮定した．この条件は次のように弱められ

x_0, x_1 平面への射影図（図1）



$x_0=-s$ での断面図（図2）



中の円が d である.

る：

定理の ii) を ii') でおきかえても定理は正しい。

ii') 任意の $\delta>0$ に対し、

$$\complement(\mathrm{supp}\, f)\cap\{x;(x_0-\delta)^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<\delta^2\}\neq\phi.$$

系　$\dim E=n+1\geq 2$　とする．E の原点の近傍 Ω 上の超函数 f が次の 2 条件を満足するとしよう：

i) $E\ni y,\ y\neq 0$ が存在して，

$$S.S.f\ni(x,i\xi\infty)\Longrightarrow\langle y,\xi\rangle\neq 0.$$

ii) $\xi,\eta\in E^*$ なる一次独立なベクトルが存在して，

$$\mathrm{supp}\, f\ni x\Longrightarrow\langle x,\xi\rangle\geqq 0 \text{ かつ } \langle x,\eta\rangle\geqq 0.$$

このとき f は原点のある近傍でゼロである．

証明

E に座標を入れ，

$$y=(1,0,\cdots,0)$$

としてよい．このとき　系の条件 i) は定理の条件 1) と一致する．定理の証明と同じに，ア 0 座標のスケールをとりかえて，

i') $S.S.f\subset\subset\Omega\times\{\xi;\ \square_n(\xi)=0\}$

としてよい，

Eのミンコフスキー内積

$$(x, y) = x_0y_0 - x_1y_1 - \cdots - x_ny_n$$

を不変にする一次変換T（ローレンツ変換）により，原点の近傍は別の近傍に同相にうつり，Tに共役な変換により，$\square_n(\xi)$は保存される．Eのゼロでないベクトルは，ローレンツ変換により，（mod $\mathbb{R}^+$ で）

$(1, 0, 0, \cdots, 0)$　（時間的ベクトル）

$(1, 1, 0, \cdots, 0)$　（光的ベクトル）

$(0, 1, 0, \cdots, 0)$　（空間的ベクトル）

のうちいずれか一つにうつる．

今ベクトルξ又はηが時間的でないとする．どちらでも同じであるから，ξが光的または空間的とする．つまり

$$\square_n(\xi) \leqq 0$$

と仮定する．今（i'）を仮定しているから，

$$x \in \Omega \text{に対し} \quad (x, i\xi\infty) \notin S.S.f.$$

他方，条件（ii）より，

$$\operatorname{supp} f \ni x \Rightarrow \langle x, \xi \rangle \geqq 0$$

故に，河合柏原の補題が適用でき，系の結論が成立する．

ξとηが共に時間的と仮定する．このとき，$\zeta = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$もまた時間的である．ローレンツ変換により，（mod $\mathbb{R}^+$で）

$$\frac{1}{2}(\xi + \eta) = (1, 0, \cdots 0)$$

$$\xi = (1, a, 0, \cdots, 0)$$
$$\eta = (1, -a, 0, \cdots, 0) \qquad (a > 0)$$

とできる. こう座標をとると 系の条件 ii) は定理の条件 ii) と一致する. 故に系が証明された.

さいごに 系の条件 i) を満足するような超函数 u の台は $\{x \in \Omega ; \langle x, \xi \rangle \geqq 0, \ \langle x, \eta \rangle \geqq 0\}$ と一致しえないことを系は主張している. 超函数のこのような性質を Vladimirov の教科書では quasi-analyticity と呼んでいる.

我々の定理, 河合-柏原の補題等は, 領域の正則包 (holomorphic hull) の詳しい性質と密接にむすびついている. このことは, 双対コホモロジーの消滅定理の形で表現されるであろう.

文献.

[1] Araki, H. A generalization of Borchers' theorem, Helv. Acta Phys. 36 (1963), 132-139.

[2] Kashiwara, M. C-flabbyness と Radon 変換 数理研講究録 114 佐藤の超函数とその応用, (1970) 1-4.

[3] Kawai, T. Construction of elementary

solutions for I-hyperbolic operators and solutions with small singularities. Proc Japan Acad. 46 (1970), 912-916.
[3 bis] Kawai, T. Construction of local elementary solutions with real analytic coefficient, I. Publ. R.I.M.S (出版予定)
[4] Morimoto, M. Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions J. Fac. Sci. Univ Tokyo. Sect. IA 17 (1970) 215-239.
[5] Sato, M. Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations Proc. Intern. Congress Math. Nice (1970) (出版予定) 数理研講究録 114 (1970), 105-123
[6] Sato, M - Kashiwara, M. 超函数の構造 数学の歩み 15 (1970) 9-71.
[7] Vladimirov, Methods of the theory of functions of several Complex Variables 1966, MIT Press