数理解析研究所講究録
146巻 1972年 190-197

階数 m の Wiener 函数

名大 理　田中 考松

§1 序

単位円周上に任意に m 個の連続函数 f_i $(1\leqq i\leqq m)$ を与える時，円内に於て

$$\Delta^m u = 0$$

又円周上，各 i $(1\leqq i\leqq m)$ に対して

$$(-\Delta)^{i-1} u = f_i$$

をみたす u を求めることを，Riquier の問題といい，彼により解かれた。伊藤氏は[2]に於て一般に n 次元 Euclid 空間内の有界閉集合に関する上記の問題を掃散測度の系列により積分表示して解いた。このノートでは，掃散測度の系列の性質を調べることにより，上記の問題を非有界閉集合に対して解く方法について述べる。

§2 記号と定義

n 次元 Euclid 空間 R^n 内の開集合 Ω をとるとき，$u\in C^{2m}(\Omega)$，

に対して Ω 内に於て

$$\Delta^m u = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)^m u = 0$$

がみたされるとき，u を Ω に於ける階数 m の多重調和函数という。Ω の Green 函数を $G_\Omega(\cdot,\cdot)$ とかき，$x, y \in \Omega$ に対して

$$G_\Omega^{(i)}(x, y) = \int \cdots \int G_\Omega(x, z_1)\, G_\Omega(z_1, z_2) \cdots G_\Omega(z_{i-1}, y)\, dz_1 dz_2 \cdots dz_{i-1}$$

とおく。定数を適当に補正して

$$(-\Delta_y)^i\, G_\Omega^{(i)}(x, y) = \varepsilon_x$$

なるようにする。今 Ω を有界開集合として，序で述べた伊藤氏[2]の結果，及び掃散測度の系列について記す。

命題1　有界開集合 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に m 個の有界連続函数 f_i $(1 \leqq i \leqq m)$ を与える。この時 $\partial\Omega$ 上に m 個の正 Radon 測度 $\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ が存在して，Ω と f_i $(1 \leqq i \leqq m)$ に関する Riquier 問題の解は

$$H_\Omega(x; (f_i)_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^{m} \int f_i(y)\, d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}(y)$$

により求まる。

ここで各 $x \in \Omega$ に対して得られた m 個の正 Radon 測度 $\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ を測度 ε_x の $\partial\Omega$ への掃散測度の系列という。f を $\partial\Omega$ 上の有界連続函数，H_f^Ω を境界値 f に対する Ω 内の Dirichlet 問題の解とするとき，上の測度は次式で特徴づけられる。

$$\int f(y)\, d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(1)}(y) = H_f^\Omega(x)$$

$$\int f(y)\, d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}(y) = \int H_f^\Omega(z)\, G_\Omega^{(i-1)}(x, z)\, dz$$

次にΩを任意の開集合として，その上の階数 i の Wiener 函数を定義しよう。$\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ をΩの exhaustion とすると各 i $(1\leq i\leq m)$ に対して正 Radon 測度の列 $(\varepsilon^{(i)}_{x,C\Omega_k})_{k=1}^{\infty}$ が得られる。

定義 Ω上の有界連続函数 f がΩ上の階数 i の Wiener 函数であるとは，Ωの任意の exhaustion $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して列

$$\left\{\int f(y)\,d\varepsilon^{(i)}_{x,C\Omega_k}(y)\right\}_{k=1}^{\infty}$$

が各 $x\in\Omega$ に於て収束する場合をいう。

Ω上の階数 i の Wiener 函数全体を $W^{(i)}(\Omega)$ とかき，$f\in W^{(i)}(\Omega)$ に対して

$$h_f^{(i)}(x)=\lim_{k\to\infty}\int f(y)\,d\varepsilon^{(i)}_{x,C\Omega_k}(y)$$

$$W_0^{(i)}(\Omega)=\{f\in W^{(i)}(\Omega)\,;\ h_f^{(i)}=0\}$$

とおく。$W^{(1)}(\Omega)$（又は $W_0^{(1)}(\Omega)$）は[1]で述べられている通常の Wiener 函数（又は Wiener ポテンシャル）である。

以後簡単のためある $x\in\Omega$ に対して

$$\int G_\Omega^{(i-1)}(x,y)\,dy<\infty$$

が成立するとき，Ωは条件[i]をみたすということにする。Ωが条件[i]をみたせば各点 $x\in\Omega$ に対して上記積分は有限である。

§3 函数族 $W^{(i)}(\Omega)$ $(1\leq i\leq m)$ について

函数族 $W^{(i)}(\Omega)$（$W_0^{(i)}(\Omega)$）$(1\leq i\leq m)$ の関係について次のことが成立する。

命題2　Ωを任意の開集合とする。Ωが条件[i]をみたすことと $W^{(i)}(\Omega)=W^{(1)}(\Omega)$, $W_0^{(i)}(\Omega)=W_0^{(1)}(\Omega)$ が成立することは同値。

証明　f をΩで有界連続, $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ をΩの exhaustion とする。
G_{Ω_k} を Ω_k の Green 函数とすると

$$\int\left(\int f(y)\,d\varepsilon^{(1)}_{x\cdot C\Omega_k}(y)\right)G^{(i-1)}_{\Omega_k}(x,z)\,dx=\int f(y)\,d\varepsilon^{(i)}_{z\cdot C\Omega_k}(y)$$

$f\in W^{(1)}(\Omega)$ とすれば各 $x\in\Omega$ に対して

$$\lim_{k\to\infty}\int f(y)\,d\varepsilon^{(1)}_{x\cdot C\Omega_k}(y)=h^{(1)}_f(x)$$

条件[i]より各 $x\in\Omega$ に対して

$$\left|\int\left(\int f(y)\,d\varepsilon^{(1)}_{x\cdot C\Omega_k}(y)\right)G^{(i-1)}_{\Omega_k}(x,z)\,dx\right|\le\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\int G^{(i-1)}_{\Omega}(z,y)\,dy<\infty$$

従って

$$\lim_{k\to\infty}\int f(y)\,d\varepsilon^{(i)}_{z\cdot C\Omega_k}(y)=\int h^{(1)}_f(x)\,G^{(i-1)}_{\Omega}(z,x)\,dx$$

これより $W^{(1)}(\Omega)\subset W^{(i)}(\Omega)$, $W_0^{(1)}(\Omega)\subset W_0^{(i)}(\Omega)$ をうる。
逆に $W^{(i)}(\Omega)\ni f$ とする。$\Omega\ni x_0$ を固定し, $\varphi_{x_0}\in C_0^{(i-1)}(\Omega)$, $\geqq 0$, x_0 の廻りの回転で不変, 且つ $\int\varphi_{x_0}(y)\,dy=1$ なる函数をとる。
条件[i]と $f\in W^{(i)}(\Omega)$ であることから

$$\left\{\int H^{\Omega_k}_f(x)\left(\int G^{(i-1)}_{\Omega_k}(x,z)\,(-\Delta)^{i-1}\varphi_{x_0}(z)\,dz\right)dx\right\}_{k=1}^{\infty}$$

は収束列である。ところが十分大なる k に対しては

$$\int H^{\Omega_k}_f(x)\left(\int G^{(i-1)}_{\Omega_k}(z,x)\,(-\Delta)^{i-1}\varphi_{x_0}(z)\,dz\right)dx=\int H^{\Omega_k}_f(x)\,\varphi_{x_0}(x)\,dx=H^{\Omega_k}_f(x_0)$$

従って函数列 $\left\{\int f(y)\,d\varepsilon^{(1)}_{x\cdot C\Omega_k}(y)\right\}$ は x_0 に於て収束, x_0 は任意にとれたから $f\in W^{(1)}(\Omega)$ をうる。$W_0^{(i)}(\Omega)\subset W_0^{(1)}(\Omega)$ も同様。
又 $W^{(i)}(\Omega)=W^{(1)}(\Omega)$ が成立すれば $1\in W^{(i)}(\Omega)$ となりΩは条件[i]をみたすことがわかる。

系　Ωが条件[m]をみたすことと次は同値である。

$$W^{(1)}(\Omega)=W^{(2)}(\Omega)=\cdots=W^{(m)}(\Omega),\quad W_0^{(1)}(\Omega)=W_0^{(2)}(\Omega)=\cdots=W_0^{(m)}(\Omega)$$

系　Ωが条件[i]をみたし，$f\in W^{(i)}(\Omega)$ とすると

$$\Delta^i h_f^{(i)}=0,\qquad f-(-\Delta)^{i-1}h_f^{(i)}\in W_0^{(i)}(\Omega)$$

§4　非有界開集合Ωに対するRiquier問題

この§ではΩを条件[m]をみたす開集合とする。

Ω_W^*をΩのWienerコンパクト化，$\Delta_W=\Omega_W^*-\Omega$，$\Gamma_W$を$\Omega_W^*$の調和境界即ち $\Gamma_W=\{x\in\Delta_W\ ;\ f(x)=0,\ \forall f\in W_0^{(1)}(\Omega)\}$ とする。

命題3　$\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ をΩのexhaustionとすると測度列 $\{\varepsilon^{(i)}_{x,C\Omega_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は各$x\in\Omega$に対してΩ_W^*内で漠収束する。その極限を$\varepsilon_x^{(i)}$とし，$S_{\varepsilon_x^{(i)}}$をそのsupportとすれば各$x\in\Omega$に対して

$$S_{\varepsilon_x^{(i)}}=S_{\varepsilon_x^{(1)}}=\Gamma_W\quad(2\leq i\leq m)$$

証明　$W^{(1)}(\Omega)=C(\Omega_W^*)$【[1] Satz 9.3】であるから任意の $f\in C(\Omega_W^*)$ に対しその Ωへの制限は $W^{(i)}(\Omega)$ に含まれる。よって函数列 $\{\int f(y)\,d\varepsilon^{(i)}_{x,C\Omega_k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する。

次にfをΔ_W上有界連続，Γ_W上 $f=0$ とし，$f^*\in C(\Omega_W^*)$，Δ_W上 $f^*=f$ とすれば，$f^*\in W_0^{(i)}(\Omega)$ 故

$$\int f(y)\,d\varepsilon_x^{(i)}(y)=\lim_{k\to\infty}\int f^*(y)\,d\varepsilon^{(i)}_{x,C\Omega_k}(y)=0$$

従って $S_{\varepsilon_x^{(i)}}\subset\Gamma_W$．又 $S_{\varepsilon_x^{(1)}}=\Gamma_W$ であるから $S_{\varepsilon_x^{(1)}}\subset S_{\varepsilon_x^{(i)}}$ を示せばよい。それは任意の $f\in C(\Delta_W)$ に対してf^*をそのΩ_W^*への連続拡張とするとき各点について

$$\int f^*(y)\,d\varepsilon^{(i)}_{x,C\Omega_k}(y)=\int\left(\int f^*(y)\,d\varepsilon^{(1)}_{z,C\Omega_k}(y)\right)G^{(i-1)}_{\Omega_k}(x,z)\,dz$$

であるから，f^*のΩへの制限が$W^{(1)}(\Omega)$に含まれることより

$$\int f(y)\,d\varepsilon^{(i)}_x(y)=\int\left(\int f(y)\,d\varepsilon^{(1)}_z(y)\right)G^{(i-1)}_\Omega(x,z)\,dz$$

従って$S_{\varepsilon^{(i)}_x}\subset S_{\varepsilon^{(i)}_z}$.

以上の準備のもとに条件[M]をみたす開集合Ωに対するRiquierの問題は次のようにとかれる。

命題4　任意にm個の$f_i\in C(\Delta_W)$ $(1\leq i\leq m)$を与えるとき次をみたす函数$h_{(f_1,\cdots,f_m)}$が存在する。Ω内に於て

$$\Delta^m h_{(f_1,\cdots,f_m)}=0$$

又各i $(1\leq i\leq m)$に対してΓ_W上

$$(-\Delta)^{i-1}h_{(f_1,\cdots,f_m)}=f_i$$

証明　$f_i^*\in C(\Omega^*_W)$を$f_i^*=f_i$がΔ_W上成立するものとすると

$$h^{(i)}_{f_i^*}(x)=\int f_i(y)\,d\varepsilon^{(i)}_x(y),$$

$$h_{(f_1,\cdots,f_m)}(x)=\sum_{i=1}^{m}h^{(i)}_{f_i^*}(x)$$

とおけばΩ内に於て

$$\Delta^m h_{(f_1,\cdots,f_m)}=0$$

又各i $(1\leq i\leq m)$に対して

$$(-\Delta)^{i-1}h_{(f_1,\cdots,f_m)}(x)=(-\Delta)^{i-1}h^{(i)}_{f_i^*}(x)+\sum_{k=i+1}^{m}(-\Delta)^{i-1}h^{(k)}_{f_k^*}(x)$$

ところが

$$\sum_{k=i+1}^{m}(-\Delta)^{i-1}h^{(k)}_{f_k^*}(x)=\int\left(\sum_{k=1}^{m-i}(-1)^k\int h^{(1)}_{f^*_{i+k}}(z)\,G^{(k-1)}_\Omega(y,z)\,dz\right)G_\Omega(x,y)\,dy.$$

であるからこれは$\overset{\circ}{W}{}^{(1)}(\Omega)$に含まれる。一方$(-\Delta)^{i-1}h^{(i)}_{f_i^*}$は

$W^{(i)}(\Omega)$に含まれるから$(-\Delta)^{i-1}\mathfrak{h}(f_1,\cdots,f_m)$は$\Omega_W^*$に連続拡張することが出来る。各$x\in\Gamma_W$に対して

$$(-\Delta)^{i-1}\mathfrak{h}(f_1,\cdots,f_m)(x) = (-\Delta)^{i-1}\mathfrak{h}^{(i)}_{f_i^*}(x) = \mathfrak{h}^{(i)}_{f_i^*}(x) = f_i(x)$$

注意　上の逆としてΩがもし上のような解をもつとすればΩは条件[m]をみたさねばならない。従って非有界な開集合に対するRiquierの問題は条件[m]という有界性とたいして変らぬ制限のもとにしか解けないことが知れる。勿論非有界で条件[m]をみたす開集合は存在するから上の結果は命題1を含む。

§5　方程式$\Delta u-pu=0$に対する応用

ΩをR^nの任意の開集合，pをΩ上非負連続的微分可能な函数として，Ω上にて方程式

$$L_p u = (\Delta - p)u = \Delta u - pu = 0$$

を考える。この場合についても前記の事実は同様に成立する。今$\inf_{\Omega} p>0$とすれば$L_p u=0$に対するΩのGreen函数を$G_{p,\Omega}$とすれば，いかなるΩに対しても

$$\sup_{x\in\Omega}\int G_{p,\Omega}(x,y)\,dy<\infty$$

従って

$$G^{(m-1)}_{p,\Omega}(x,y)=\int\cdots\int G_{p,\Omega}(x,z_1)G_{p,\Omega}(z_1,z_2)\cdots G_{p,\Omega}(z_{m-2},y)\,dz_1dz_2\cdots dz_{m-2}$$

とするとき各$x\in\Omega$について

$$\int G^{(m-1)}_{p,\Omega}(x,y)\,dy \le \left(\sup_{x\in\Omega}\int G_{p,\Omega}(x,y)\,dy\right)^{m-1}<\infty$$

即ちΩは条件[m]をみたす。

従って $L_p u = 0$ の場合に対する Riquier の問題はいかなる開集合 Ω に於いても次のようにとける。

$\Omega^*_{W_p}$ を Ω の p-Wiener コンパクト化，$\Delta_{W_p} = \Omega^*_{W_p} - \Omega$，$\Gamma_{W_p}$ をその調和境界とする。([3])

命題5　$f_i \in C(\Delta_{W_p})$ $(1 \leq i \leq m)$ を任意に与えると次のような函数 $h^p_{(f_1, \cdots f_m)}$ が存在する。Ω 上に於て

$$(L_p)^m \, h^p_{(f_1, \cdots, f_m)} = 0$$

各 i $(1 \leq i \leq m)$ に於いて Γ_{W_p} 上

$$(-L_p)^{i-1} \, h^p_{(f_1, \cdots, f_m)} = f_i$$

参考文献

[1] C. Constantinescu and A. Cornea : Ideale Ränder Riemannscher Flächen Springer - Verlag (1963).

[2] H. Itô : Sur les fonctions polyharmoniques et le problème de Riquier. Nagoya Math. J., 37. 81—90 (1970)

[3] H. Tanaka : On Wiener compactification of a Riemann surface associated with the equation $\Delta u = pu$. Proc. Japan Acad., 45, 675-679 (1969)