

EXISTENCE OF VARIOUS BOUNDED
SOLUTIONS OF BIHARMONIC EQUATIONS

名大理 中井 三留

§ 1. 分類問題

次元 $m \geq 2$ の非完南連結 C^∞ Riemann 多様体 M を考える. M の計量テンソルを g_{ij} , 又 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $g = \det(g_{ij})$ とかくと, 局所座標 $x = (x^1, \dots, x^m)$ により Laplace-Beltrami 作用素 Δ は

$$(1) \quad \Delta \cdot = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^m \sqrt{g(x)} g^{ij}(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x^j} \right)$$

と表される. 調和方程式

$$(2) \quad \Delta u = 0$$

の M 上の解の作る函数空間を $H(M) = H^1(M)$ を考える. 又函数に対する種々の有界性 X を考える. 代表的なものとしては, 函数値の有界性を意味する B , 正值性を意味する P , Dirichlet 積分 $D_M(u)$ の有限性を意味する D , 又これらの性質の組合せとして BD 等も考える. ここで $D_M(u)$ は

$$(3) \quad I_M(u) = \int_M du \wedge *du = \int_M \sum_{j=1}^m g^{jj}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^j} \frac{\partial u(x)}{\partial x^j} dx,$$

但し $dx = \sqrt{g(x)} dx^1 dx^2 \dots dx^m$ と与えられる $HX(M)$ を性質 X をもつ調和函数からなる $H(M)$ の部分空間とし, $HX(M) = \mathbb{R}$ (実数体) となる M の全体を \mathcal{O}_{HX} と表す. 又調和グリーン函数 $G_M(x, y)$ が存在しないといふいわゆる放物型の M の全体を \mathcal{O}_G とかく. 調和分類問題とは, 族 \mathcal{O} の特性及び各族の相互関係を明白にすることを目的とし, Sario, Ahlfors 等多くの函数論関係の人々により研究され, 例えば

$$(4) \quad \emptyset = \mathcal{O}_H < \mathcal{O}_G < \mathcal{O}_{HP} < \mathcal{O}_{HB} < \mathcal{O}_{HD} = \mathcal{O}_{HBD}$$

算が一つの結論である (詳しくは例えば Sario-Nakai [11] 参照) ことには \mathcal{O} の意味である

方程式 (2) の代りに

$$(5) \quad \Delta u = Pu, \quad P \geq 0, \quad P \neq 0$$

を考える. P は例えば(局所)Hölder連続とする. 解空間 $P(M)$ 及びその部分空間 $PX(M)$ を考える. X としては更に, いわゆる P -エネルギー積分

$$(6) \quad E_M^P(u) = D_M(u) + \int_M P(x)[u(x)]^2 dx$$

が有限であるといふ性質 E も考える. $PX(M) = \{0\}$ とする

M と P の組 (M, P) の全体を \mathcal{O}_X , 又 M が(調和)放物型

となる組 (M, P) の全体を \mathcal{O}_G と前の記号の意味を拡大解し
 やくし、やはり (5) に関する分類問題を同様に論じうる。こ
 れは Bredt, Ozawa 等多くの人々により研究され

$$(7) \quad \emptyset = \mathcal{O}_P < \mathcal{O}_G < \mathcal{O}_B < \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{BD} < \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{BE}$$

が得られている (詳しくは Nakai [2] 参照)。

同一思想のもとで分類問題を、双調和方程式

$$(8) \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$$

について論じたらどうなるであろうかを Sario と筆者が去年
 から少し調べ始めた。(8) の解空間を $H^2(M)$ 又その部分
 空間 $H^2X(M)$ と記し、 $H^2X(M) = H^1X(M)$ となる M 全体
 を \mathcal{O}_{H^2X} と記す。良く知られている様に

$$(9) \quad \mathcal{O}_{H^2} = \emptyset$$

である。問題は、いつ $M \in \mathcal{O}_{H^2X}$ となるか、又 \mathcal{O}_{H^2X} 相互の
 関係はどうであるを明かにすることである。調べたのは
 $X = B, D, BD$ の場合だけであるが様子は (4), (7) とはづ
 い分異なる。 X としては、函数 u に対する有界性 Y 及び Δu に
 対する有界性 Z_Δ を併せて課する $X = YZ_\Delta$ を取る方が更に自
 然であろうか、手始めとして $X = B, D, BD$ の場合を考え
 た。

Ω を常に M の存あらか存境界をもつ相対完内な部分領域と

130

する。方程式(8)は Poisson 方程式の族

$$(9) \quad \Delta u = f, \quad f \in H^1(M)$$

と同等であるから、(9)の解空間を $H_f^2(M)$ と記すと、いわゆる reduction relation

$$(10) \quad H^2X(M) = \bigcup_{f \in H^1(M)} H_f^2X(M)$$

となり、 $M \in \mathcal{C}_{H^2X}$ はすべての $f \in H^1(M) - \{0\}$ に対して $H_f^2X(M) = \emptyset$ となることと同様である。だから単一の Poisson 方程式

$$(11) \quad \Delta u = \varphi,$$

φ は例えば Hölder 連続、が性質 X をもつ解をいつ持つかを調べるのが先決となる。(11)の $\bar{\Omega}$ 上の解 u は

$$(12) \quad u(x) = H_u^\Omega(x) - \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) \varphi(y) dy$$

だから本質的な部分の Green ポテンシャル $G_\Omega \varphi$ の研究である。(5)の $\bar{\Omega}$ 上の解 u についても同様に

$$(13) \quad u(x) = H_u^\Omega(x) - \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) u(y) P(y) dy$$

だから事情は同じである。この意味で方程式(5), (8)の分類問題は「(1)の分類問題」+「Green ポテンシャル論」と言える。ただし(5)の場合、(13)は大域的極限移向可能で Ω は M

でおきかえうるが, (11) の場合 (例え H_u^Q が H_u^M に収束しても) $\int_M G_M(x, y) \varphi(y) dy$ が存在せぬ方がむしろ普通である (Nakai-Sario [4]) これが困難な点であり (7) と類似の関係がもはや (8) について期待できぬ一つの理由である.

§2. Virtanen 現象

表(4)の $\sigma_{HD} = \sigma_{HBD}$ は Virtanen [12] が発見したもので Virtanen 現象と呼ばれている: Dirichlet 積分有限な解があるとき必ず有界かつ Dirichlet 積分有限な解がある. (5) について Virtanen 現象がやはり成立することは筆者の最近の結果である ([2]). これより弱い結論 $\sigma_E = \sigma_{BE}$ は久しく知られていた (Ozawa [9], Royden [10], Glasner-Katz [11]). (8) についても Virtanen 現象が起るか否か, 即ち $\sigma_{H^2D} = \sigma_{H^2BD}$ かどうかに視点を置く. 結論は

$$(14) \quad \sigma_{H^2D} < \sigma_{H^2BD}$$

である (Nakai-Sario [5]) 実はもっと強く

$$(15) \quad \sigma_{H^2B} \not\subset \sigma_{H^2D}, \quad \sigma_{H^2D} \not\subset \sigma_{H^2B}$$

もわかる (Nakai-Sario [7]). 以下いかにしてこのことがわかるかを説明する.

§ 3. Dirichlet 有限解

$G_\Omega \varphi$ は Green ポテンシャル $\int_\Omega G_\Omega(\cdot, y) \varphi(y) dy$, $G_\Omega(\varphi, \varphi)$ は φ の Green エネルギー $-\int_{\Omega \times \Omega} G_\Omega(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy$ を意味するとする。 φ が Ω 上で C^2 連続とすると、特に Evans 関係と呼ばれる

$$(16) \quad D_\Omega(G_\Omega \varphi) = G_\Omega(\varphi, \varphi)$$

が成立する。これを基礎とすると

LEMMA 3.1 方程式 (11) が Dirichlet 積分有限解をもつための必要十分条件は

$$(17) \quad \sup_{\Omega \subset M} G_\Omega(\varphi, \varphi) < \infty$$

完備な台をもつ Dirichlet 積分が有限な連続関数の族を $C_0 D(M)$ と記すと

LEMMA 3.2. 条件 (17) は次の条件と同等である

$$(18) \quad \sup_{\psi \in C_0 D(M) \setminus \{0\}} \left(\int_M \varphi(x) \psi(x) \right)^2 / D_M(\psi) < \infty$$

これら 2 つの初等的な事実に基づき簡単な 2 つの例を考へよう。複素平面 \mathbb{C} に Riemann 計量

$$(19) \quad ds = (1+|z|)^{-\alpha} |dz|$$

を与えた Riemann 多様体を C_α と表す. すると (Nakai [3])

THEOREM 3.1. $C_\alpha \in \mathcal{O}_{H^2D} \iff \alpha \leq 3/2$.

次に単位円板 $|z| < 1$ を D とし, Riemann 計量

$$(20) \quad ds = (1-|z|)^{-\alpha} |dz|$$

を与えたものを D_α とかく. すると (Nakai-Sario [6], O'Malley [8])

THEOREM 3.2. $D_\alpha \in \mathcal{O}_{H^2D} \iff \alpha \geq 3/4$.

すべての α に対し $C_\alpha \in \mathcal{O}_G$, $D_\alpha \notin \mathcal{O}_G$ であるから上記の定理より直ちに

$$(21) \quad \mathcal{O}_G \not\subset \mathcal{O}_{H^2D}, \quad \mathcal{O}_{H^2D} \not\subset \mathcal{O}_G.$$

即ち $M \in \mathcal{O}_{H^2D}$ は M の境界の調和的強度と何のかかりも持たぬ. $C_2 \notin \mathcal{O}_{H^2D}$ 故ある $h \in H^1(M) - \{0\}$ に対し

$$u = \lim_{\Omega \rightarrow C} G_\Omega h$$

は (8) の Dirichlet 有限解となる. しかし $G_\Omega \uparrow \infty$ である

これは大変面白いことだと思ふ. u はてきとうな核の

ポテンシャルに存しているだろうか。

§4. 有界解

前節の類似を有界解について考える。補題 3.1 に対応してほとんど自明ながら

LEMMA 4.1 方程式 (11) が有界解をもつ必要十分の条件は

$$(22) \quad \sup_{\Omega \subset M} \left(\sup_{x \in \Omega} |G_{\Omega} \varphi(x)| \right) < \infty.$$

条件 (17) より (18) の方が計算しやすいことが多い。事実 \mathbb{C}_{α} , \mathbb{D}_{α} についてそうである。所が (22) と同様な (18) 型の条件はありそうもない。ゆずかに

LEMMA 4.2 条件 (22) から次の条件が従う:

$$(23) \quad \sup_{\psi \in C_0^2(M) - \{0\}} \left| \int_M \varphi(x) \psi(x) dx \right| / \int_M |\Delta \psi(x)| dx < \infty.$$

多くの場合そうである様に有界性は Dirichlet 有限性よりずっと難しく、今の場合も例外でない。 \mathbb{C}_{α} , $\mathbb{D}_{\alpha} \in \mathcal{O}_{H^2 B}$ の決定すら出来ていなくて、たゞある α_0 があって、

$$(24) \quad \alpha < 1 \Rightarrow C_\alpha \in O_{H^2B}, \quad \alpha > \alpha_0 (\geq 1) \Rightarrow C_\alpha \notin O_{H^2B}$$

となること、及び

$$(25) \quad \alpha \geq 2 \Rightarrow D_\alpha \in O_{H^2B}, \quad \alpha < 1 \Rightarrow D_\alpha \notin O_{H^2B}$$

がわかった。だからとにかく

$$(26) \quad O_G \not\subset O_{H^2B}, \quad O_{H^2B} \not\subset O_G$$

でやはり $M \in O_{H^2B}$ は M の理想境界の調和的存強さとの何の
か、ゆりもよいこととなる。

§5. Riemann 面の double.

S を Riemann 面, γ を理想境界の一部で (S, γ) が analytic
boundary $\gamma \neq \emptyset$ をもつ bordered surface となるものとする。
 γ は完備であつてもなくてもよい。 \hat{S} を S の γ に関する
double とし, j を \hat{S} の involution とする。 $h \in H(\hat{S})$ が
antisymmetric とは $h(j(z)) = -h(z)$, 又非負の \hat{S} 上の 2 次微
分 $\mu(z) dx dy \neq 0$ が symmetric とは, $\zeta = \xi + i\eta = j(z)$,
 $z = x + iy$ とするとき $\mu(\zeta) d\xi d\eta = \mu(z) dx dy$ と存ること
あるとする。以上の様存 h と μ に対し方程式

$$(27) \quad \Delta u(z) = \mu(z) h(z), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mu \in C^\infty$$

を考える。 (27) が有界 (又は Dirichlet 有限) 存解をもつ様存

h の全体を $H_{\mu}^B(\hat{S})$ (又は $H_{\mu}^D(\hat{S})$) とかく. S は analytic boundary } $\neq \emptyset$ をもつから $\hat{S} \in \mathcal{O}_G$ の否かにかゝらず S 上 Green 函数 $G_S(z, \zeta)$ をもつ (§§3-4) と同様にして

LEMMA 5.1 $\mu(z) dx dy$ の台 $h > 0$ とする. すると $h \in H_{\mu}^B(\hat{S})$ 又は $h \in H_{\mu}^D(\hat{S})$ とする必要十分条件は

$$(28) \quad \sup_{z \in S} \int_S G_S(z, \zeta) h(\zeta) \mu(\zeta) d\xi d\eta < \infty$$

又は

$$(29) \quad \int_{S \times S} G_S(z, \zeta) h(z) h(\zeta) \mu(z) \mu(\zeta) dx dy d\xi d\eta < \infty.$$

$0 \notin H_{\mu}^B(\hat{S})$ としておく. 一般に R を Riemann 面とすると, 次の関係に注意する: $X = B$ 又は D として

$$(30) \quad (\mathbb{R} \cdot H_{\mu}^X(R) + \mathbb{R} \cdot H_{\mu}^X(R)) - \{0\} \subset H_{\mu}^X(R);$$

$$(31) \quad \bigcap_{j=1}^n H_{\mu_j}^X(R) \subset H_{\sum_{j=1}^n \mu_j}^X(R);$$

$$(32) \quad H_{\mu}^X(R) \subset H_{\mu}^X(R') \quad (R' \subset R).$$

我々の目的は (14) 又は更に一般な (15) を示すにある. 明かに $\mathcal{O}_{H^2D} \subset \mathcal{O}_{H^2BD}$ であるし, §§3-4 から $\mathcal{O}_{H^2D} \not\subset \mathcal{O}_{H^2B}$

だから $\mathcal{O}_{H^2B} - \mathcal{O}_{H^2D}$ に入る M の例を作ればよい。

§ 6 Counter example

\mathcal{P} を右半平面, 虚軸を $\partial\mathcal{P}$ とする. 基礎の空間を

$$(33) \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C} - \{-3, 3\}$$

とする. これはもちろん放物型の面である. $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \{3\}$ とおけば, $\partial\mathcal{P} = \partial\mathcal{P}'$ に関する double の意味で

$$(34) \quad \mathcal{C} = \widehat{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{C}' = \widehat{\mathcal{P}'}$$

であって補題 5.1 が使える状況である. 時には, 上半平面 \mathcal{S} ととり

$$(35) \quad \mathcal{C} = \widehat{\mathcal{S}} \quad (\partial\mathcal{S} \text{ に関し}), \quad \mathcal{C}' = \widehat{\mathcal{S}} \quad (\partial\mathcal{S} - \{-3, 3\} \text{ に関し})$$

と見下方が好都合なこともある.

最初に \mathcal{C} 上正值回転不変 C^∞ 函数 μ_1 (又は同じことながら \mathcal{C} 上の微分 $\mu_1(z) dx dy$) で $\mu_1|_{\{|z| \leq 4\}} = 1$ かつ $\{|z| \geq 5\}$ 上

$$(36) \quad \mu_1(z) = (1 + |z|)^{-(3+\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

となるものを考える.

次に \mathcal{C} 上やはり非負回転不変 C^∞ 函数 φ で $|z| < 1/2$ 内に $\varphi \equiv 1$ とするものをもとる. 正数からなる減小列 $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ で $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty$ とするもの及びすべての

$n = 1, 2, \dots$ に対し

$$\eta_1 > 6, \quad \varepsilon_n(\eta_n - 1) > 1, \quad (\eta_n + 1)^2 < \eta_{n+1} + 1$$

となる数列 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて

$$(37) \quad \mu_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varphi(z - i\eta_n)$$

を考える。 i は虚数単位とする

更に \mathbb{C}' 上非負 C^∞ 函数で z に関する回転不変な μ_3 が \mathbb{C}' 内
 $|z-3i| \geq 1/2$ 上 $\mu_3 \equiv 0$ かつ $0 < |z-3i| \leq 1/4$ では

$$(38) \quad \mu_3(z) = (|z-3i| \log |z-3i|)^{-2}$$

となるものをえらび、 μ_4 は \mathbb{C}' 上の函数で虚軸に関して μ_3 と
 対称なものとする。

最後に

$$(39) \quad \lambda(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z) + \mu_3(z) + \mu_4(z)$$

を考えると、これは \mathbb{C}' 上真に正值 C^∞ 函数で $\mathbb{D}^{\mathbb{P}}$ に関して
 symmetric である

\mathbb{C}' に Riemann 計量 $\lambda(z)|dz|^2$ を与えて得られる Riemann
 多様体 $M = (\mathbb{C}', \lambda(z)|dz|^2)$ が求めるものである。

$$(40) \quad M \in \mathcal{O}_{H^2B} - \mathcal{O}_{H^2D}.$$

証明は大変長くなる。 $C(z) = x$, $A(z) = y$ とおくと、

- a) $c, s \in H_{\mu_1}^D(\mathcal{C}) \subset H_{\mu_1}^D(\mathcal{C}')$;
 b) $c \in H_{\mu_2}^D(\mathcal{C}) \subset H_{\mu_2}^D(\mathcal{C}')$, $s \notin H_{\mu_2}^D(\mathcal{C}')$;
 c) $c \in H_{\mu_3+\mu_4}^D(\mathcal{C}')$;
 d) $h \in H_{\lambda}^D(0 < |z-3| < 4) \Rightarrow h \in H(|z-3| < 4)$;
 e) $H_{\lambda}^D(\mathcal{C}') = \{\alpha c ; \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

の5段階をへてまづ $M \notin \mathcal{O}_{H^2D}$ がわかる。§§3-5の補題をくりかえし使う。ついで

- f) $h \in H_{\lambda}^B(\mathcal{C}') \Rightarrow h \in H(\mathcal{C})$ から $h(3) = h(-3) = 0$;
 g) $h \in H_{\lambda}^B(\mathcal{C}') \Rightarrow h = \alpha \cdot c$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) ;
 h) $H_{\lambda}^B(\mathcal{C}') = \phi$

の手つぎの末 $M \in \mathcal{O}_{H^2B}$ がわかって証明が終る。

文 献

- [1] M. Glasner - R. Katz : On the behavior of solutions of $\Delta u = Pu$ at the Royden boundary. J. d'Analyse Math. 22 (1969), 343-354 .
 [2] M. Nakai : Dirichlet finite solutions of $\Delta u = Pu$, and classification of Riemann surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 77

(1971), 381-385.

- [3] M Nakai : Dirichlet finite biharmonic functions on the plane with distorted metrics (to appear)
- [4] M Nakai-L Saric . Dirichlet finite biharmonic functions with Dirichlet finite Laplacians. Math. Z. 122(1971), 203-216
- [5] M Nakai-L Saric : Existence of bounded Dirichlet finite biharmonic functions. Ann Acad Sci Fenn. (to appear)
- [6] M Nakai-L Saric : Existence of Dirichlet finite biharmonic functions (to appear)
- [7] M Nakai-L Saric : Existence of bounded biharmonic functions. (to appear)
- [8] H O'Malley : Dirichlet finite biharmonic functions on the unit disk with distorted metrics Proc Amer Math Soc. (to appear)

- [9] M. Ozawa : Classification of Riemann surfaces, Kôdai Math. Sem Rep. 4 (1952), 63-76.
- [10] H. Royden : The equation $\Delta u = Pu$ and the classification of open Riemann surfaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. 271 (1959).
- [11] L. Sario - M. Nakai : Classification Theory of Riemann Surfaces. Springer-Verlag, 1970.
- [12] K. Virtanen : Über die Existenz von beschränkten harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fenn. 75 (1950).