

マルコフ過程の調和測度に関するいくつか
の結果について

広大 神田 護

従来のポテンシャル論を背景としたマルコフ過程論は Hunt によりその \mathcal{W} 組が設定され、比較的最近の Blumenthal-Gettoor の著書に見られるように " \mathcal{W} " としてはほぼ整備されたといつてよい。しかし、マルコフ過程が分つたと我々が云えるかどうかは疑問である。(どのようになつたら "分つた" といふのかは問題だが アイマイな云い方だが Feller による 1 次元拡散過程の理論の水準位にマルコフ過程論がうちたてられたら...)。たとえば Hunt の理論の \mathcal{W} 内では、退化した微分作用素の場合も そうでない場合も 同じ次元で扱われる。という事は、退化性が本質的に反映しない事である。そこで マルコフ過程における "退化性" あつたは解異性の *implicit* な定式化、又それと十分反映した理論の構成が問題となる。このような事をも含んだ上で "マルコフ過程 \mathcal{W} 対に拡散過程の構造" を調べるという立場⁰³の問題提起をした

のが 池田-渡辺(信)による“拡散過程の局所構造” *Sem. on Prob.* Vol 35 である。このノートでは それらに関連した事柄として、特に調和測度の分布について 2,3の知られた結果を紹介したい。筆者の能力不足上 深いところまでできなく、単に羅列に終わってしまっている事柄をおわびしておく。

なお 研究集会でのべた事と違分ズレがあるが、それは渡辺信三氏による質問に関連する^{結果}事が後で分った(実は筆者がのべた事~~の一部分~~の一部は既に知られていた)事と、その後、阪大で拡散過程のセミナーで、筆者が研究集会で意図していた事に関連した結果を色々知る事ができたのでその一部をつけ加え、その代りグリーン函数に関連した部分をけすためである。

以下、 R^n 上のマルコフ過程 $X = (X_t, P_x)$ を考える。

$D \subset R^n$ の open set, $\tau_D = \inf\{t \geq 0, X_t \in D^c\}$ とし

$$H_D(x, dy) \equiv P_x(X_{\tau_D} \in dy) \quad x \in D$$

とする。 $H_D(x, dy)$ を D の ₁₂₁₀₃₃ 調和測度という。

§ 1. 拡散過程の調和測度

前にのべたように 調和測度の分布の問題を、拡散過程の局所構造~~問題~~の問題として意識的にとりあげたのは、池田-渡辺(信) *Sem. on Prob.* Vol 35 である。ここでは 単に調和

測度の分布の判定について知られた結果を紹介しておく。

R^n 上の楕円型(退化した場合も含む) 2階の微分作用素

$$A = \sum_{j=1}^n a_{jj} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} - c \quad (c \geq 0)$$

及びそれを生成作用素とする拡散過程 $X = (X_t, P_x)$ を対象とする。(係数に適当な条件をおく事によって常に構成できる) D を R^n の有界領域とする。次の問題を考えよう。

1) $\forall x \in D, H_D(x, B) = 0$ となる(最大の)集合 $B \subset \partial D$ を求めよ。

2) $x_0 \in D$ fix, $H_D(x_0, B) = 0$ "

ラフにいえば 上の1), 2) は次の形の最大値原理に対応する。

1)' \bar{D} で連続かつ D で $Au = 0$ となる u に対して

$$\sup_{x \in D} u(x) \leq \sup_{x \in \partial D - B} u(x)$$

となる(最大の)集合 $B \subset \partial D$ を求めよ。

2)' 同じ u に対して, $u(x_0) \leq \sup_{x \in \partial D - B} u(x)$ "

1)'の問題とは、微分方程式論で Fichera に端をほうし、Oleinik etc をして最近の C. D. Hill (Indiana Univ. Math. J. Vol 20 no 3 1970) による精密化を論じられた問題である。確率論の立場からは, Freidlin, Pinsky (Zh. Prob. Appl. 1968), Smolck-Varadhan (to appear) により論じられた。ここでは

Pinsky によつて得られた結果をのべよう。 $a_{ij}, b_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$

$C=0$, D は C^2 class の境界 ∂D をもつものとする。更に

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^n - \bar{D}, \exists \delta > 0, \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (x-\delta)_i (x-\delta)_j \geq \delta |x-\delta|^2$$

for $x \in D$ をみたすものとする。

(Pinsky) $\{ \nu_i \}$; ∂D の外側向き normal vector

$$\Sigma_3 = \{ x \in \partial D, \sum a_{ij} \nu_i \nu_j > 0 \}$$

$$\Sigma_2 = \{ x \in \partial D, \sum a_{ij} \nu_i \nu_j = 0, \sum (b_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}) \nu_i > 0 \}$$

$$\Sigma_1 = \partial D - \Sigma_2 - \Sigma_3$$

とおけば 任意の $x \in D$ に対して

$$H_D(x, \Sigma_1^0) = 0 \quad (\text{但し, } \Sigma_1^0 \text{ は } \Sigma_1 \text{ の内側})$$

かつ

任意の $x_0 \in \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\forall x_0$ の近傍 N

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} H_D(x, N \cap \partial D) = 1$$

ロ) の type の問題については、まともな事は殆んど知られていない。Stroock-Varadhan の path の台についての結果が有力な手掛りを与えていると思われるが、筆者には現在それそのべま事ができない。イ) またはロ) の問題を係数の滑らかさを除いた場合に論じる事、又生成作用素がフツウの微分作用素にならない場合を論じる事一特に調和座標系との関連でギロとなる事一は重要であるがそれは拡散過程の構造をふつ

明確につかまえられる必要がある。ここで次の事を注意しておく。もし $n \geq 3$ で強楕円型なら、係数の滑らかの仮定を連続性だけに限っても ∂D 内の任意の open set B に対して

$$(*) \quad H_D(x, B) > 0$$

となる。~~この事は~~ (但し、 D の境界 ∂D は滑らかとする)。これは、拡散過程が今の場合強 Feller になることと、 ∂D の点 A が正則点である事から容易に分る。なお $(*)$ は十分退化している。存在が C^p の場合でも同様な事がある。それは

$$A = \sum_{k=1}^r X_k + Y \quad X_k, Y \text{ vector field}$$

とあらわせ、 X_1, \dots, X_r の張る Lie 環 $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$ の rank が常に n の時の場合である。(Bony の結果を使えばよい)

§ 2. Jump のあるマルコフ過程の調和測度

Jump がある場合、調和測度の台は ∂D だけでなく、 D^c であり、purely discontinuous の場合は $H_D(x, \partial D) = 0$ である。したがって、“場合分け”は拡散過程の場合より少し厄介になる。微分作用素の係数に対応するのは Lévy 測度である。Lévy 測度と調和測度についてのまともな結果は N. Ikeda & S. Watanabe “京大紀要 1961”の次の結果である。マルコフ過程についてのあり条件の下で

$$(*) \quad H_D(x, E) = \int_D G_D(x, z) \nu(z, E) dz, \quad E \subset \bar{D}^c$$

但し、 $G_D(x, z)$ は 対象とするマルコフ過程の D の part process のグリーン関数であり、 $\nu(z, dy)$ は Lévy 測度である。上の等式により、1) の (イ) の内題と類似の問題について情報を得る事ができる。ここでは、安定過程についてくわしい結果をえらわれているので、それを紹介したい。

$X = (x_t, P_x)$ を R^n 上の α -次安定過程 ($2 > \alpha > 0, \alpha \neq 1$)、その Lévy 測度 $\nu(dy) = r^{-n-\alpha} n'(d\theta) dr$, transition probability density $p(t, x)$. ($n \geq 2$ とする)。仮定として、“ $n'(d\theta)$ は、原点 O 中心の単位球面 S_n の diametral plane に台をもたない” とおく。その時、

S. J. Taylor (J. Math. Mech. Vol 16, No 11 (1967).)

i) $0 < \alpha < 1$ かつ $C (= \nu'(d\theta)$ の smallest compact support) がある hemisphere 内にあるなら、

$$K = \widehat{\widehat{C}} \text{ の interior}$$

但し、 $K = \{x \in R^n, p(t, x) > 0 \text{ for some } t > 0\}$

$\widehat{\widehat{C}} = O$ を頂点とし、 C の convex hull と O とをつくらぬ cone

ii) その他の場合 $p(t, x) > 0, \forall t > 0, \forall x \in R^n$.

S_n 上の Beurl set B に対して, $\hat{B} \in B$ と 0 (に $n \geq 1$ と 2) とで
 張られる cone とする. $\text{Supp}_{S_n} H_Q(0, dy) = \{ H_Q(0, \hat{B}) = 0 \}$ とする S_n
 上の ^{$B_{2\epsilon}$} open set E の S_n における補集合として定義する. 但し,
 Q は 0 中心の単位球. S. J. Taylor の結果より.

(**) i) の場合, $\text{Supp}_{S_n} H_Q(0, dy) \subset \bar{C}$

を示せる. なお注意を要する事は. ii) の場合でも $\text{Supp}_{S_n} H_Q(0, dy)$
 $= S_n$ とは限らない. それは. (*) を用いて. 例をつくることか
 する. なお. 上と類似の結果を 変数係数の α -次安定過程
 の場合にも十分正則な条件の下で $n \geq 3$ ならば示^{せる}. 以後
 に 微分作用素の時, その symbol $a(x, \xi)$ が, $\forall x, \forall \xi \neq 0$ に
 対して $a(x, \xi) \neq 0$ (即ち. pseudo-diff op として elliptic) なるは
 ~~$H_Q(C, B) \neq 0$~~ $\text{Supp } H_D(x, dy) = \emptyset \Delta$ だが, 生成作用素が
 たとは α -次安定過程のそれである時, symbol は, $a(x, \xi)$
 $\neq 0$ が $n'(d\theta)$ が S_n の diametral plane に台をもちたい時.
 なりたつ事 - それなのに. ~~pt. a) i) の case 及び~~ (**) とな
 なる場合がある事を注意しておく。