数理解析研究所講究録
146巻 1972年 16-67

対称な合成核に依るポテンシャル

名大理　伊藤正之

1. 序

古典的意味において，ポテンシャル論と調和函数論は同じ内容を意味して来た。これは調和函数を議論するのに，ポテンシャルは避け得ない概念であると同時にその逆も又然りであるからである。ここでGreenポテンシャルがNewtonポテンシャル（又はLogarithmicポテンシャル）からある操作に依って得られることに注意する時，調和函数論に本質的役割を演ずるのはNewtonポテンシャルであることに気ずくであろう。

3次元Euclid空間において少々考えてみよう。$N(x) = 1/|x|$，ただし，$x = (x_1, x_2, x_3)$，$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$，とおく時，2変数の函数 $N(x-y)$ をNewton核と呼び，又正のBorel測度 μ に対し

$$N\mu(x) = \int N(x-y)\, d\mu(y) = N * \mu(x).$$

をNewtonポテンシャルと呼ぶ。3次元Euclid空間において，ある領域内で定義された調和函数の性質はNewton核の掃散，種々の最大値原理の反映と理解される。

この様な考察からも，ポテンシャル論の研究課題の1つと

して、これらの原理を満足する核を整理することがあげられる。一方ニュートンポテンシャルが合成で表わされることに注意して、これの直接の拡張である対称な合成核について、上述の整理を試みる。今後述べる多くの議論は更に広い設定でのポテンシャル論に拡張されているし、又拡張を暗示しているが、我々はそれには一切ふれないこととする。

2. 核、ポテンシャル、諸原理

このノートを通じて、Xを局所コンパクトで、コンパクトでないアーベル群とし、簡単の為オ２可算公理を満すとする。ξをその上のHaar測度とする。次に度々用いる函数空間を記して居く。

L_{loc} : X上の実数値局所ξ-可積分函数全体。

M_K : X上の実数値、有界且つ台がコンパクトである函数全体。

C_b : X上の実数値有界連続函数全体に一様収束位相が導入された空間

C_0 : X上の実数値有限連続且つ∞で0となる函数全体に一様収束位相が導入された空間。

C_K : X上の実数値有限連続且つ台がコンパクトである函数全体に帰納的位相が導入された空間。

夫々の非負函数全体から成る部分集合をL^+_{loc}, ..., C^+_Kと記す。

μをX上の実Radon測度としよう。μと原点に関して対称な測度を$\check{\mu}$と記す。$\mu=\check{\mu}$の時，μを対称と言う。μの台を$s(\mu)$，μの週期全体の集合を$p(\mu)$と記す。ただし，Xの点x_0がμの週期であるとは $\mu=\mu*\varepsilon_{x_0}$ となる場合である。こゝでε_{x_0}はx_0における単位質量を表わす。

X上の合成核Nとするポテンシャル論を前提として　正のRadon測度を意味する。実Radon測度μに対して，合成$N*\mu$が意味を持つ時，この合成をμのN-ポテンシャルと呼ぶ。更に$N*\mu$がξに関して絶対連続になる時，その密度函数を$N\mu$とかく。又$\mu=f\xi$ ($f\in L_{loc}$) 且つ $N*\mu$ が意味を持つ時，夫々$N*f$, Nf とかく。$f\in M_K$ に対し，Nfは常に意味を持ち，これは局所有界である。

注意1. $f\in L^2(\xi)$がコンパクトな台を持つとする。この時Nfは意味を持ち，且つ局所L^2である。

ポテンシャル論で最大値に関する原理で重要なものは次の2つである。

C_K-優越原理（C_K-完全最大値原理）：合成核NがC_K-優越原理（C_K-完全最大値原理）を満足するとは，2つの函数$\varphi,\psi\in C_K^+$ に対して，不等式 $N*\varphi\leq N*\psi$ ($N*\varphi\leq N*\psi+1$) が$s(\varphi)$上成立すれば，直ちにX全体で成立する場合である。

注意2. 合成核NがC_K-優越原理（又はC_K-完全最大値原

理）を満すことと次の命題は同値である．

２つの台がコンパクトなどの Radon 測度 μ, ν に対して，測度としての不等式 $N*\mu \leqq N*\nu$（又は $N*\mu \leqq N*\nu + \xi$）が $S(\mu)$ のある近傍で成立すれば，直ちに同不等式が X 全体で成立する．

これらの C_K-型の原理は以下の掃散分布を論じるに際し，有効である．しかし更に広い設定でのポテンシャル論，及び以下の函数空間に於けるポテンシャル論では，その意味が不明瞭である．

M_K-優越原理（M_K-完全最大値原理）：合成核 N が M_K-優越原理を満足するとは，$f, g \in M_K^+$ に対して，f の核 $k(f) = \{x \in X ; f(x) > 0\}$ で（ξ に関し）殆んど至る所，不等式 $Nf \leqq Ng$（又は，$Nf \leqq Ng + 1$）が成立すれば，直ちに X 上殆んど至る所同不等式が成立する場合である．

注意３．N が M_K-優越原理（又は M_K-完全最大値原理）を満すならば，次の命題が成立する．

２つの非負，台がコンパクトな $L^2(\xi)$ に属す函数 f, g に対し，$k(f)$ 上殆んど至る所，不等式 $Nf \leqq Ng$（又は $Nf \leqq Ng + 1$）を満すならば，X 上殆んど至る所，同不等式が成立する．

全く同様であるから，N が対称の場合に限って証明する．f, g を上の命題の函数とする．この時 $k(f)$ 上殆んど至る所

$Nf > 0$. 勿論 $N \neq 0$ の場合であるが。なぜなら f' を f の $\{x \in \delta(f);\ Nf(x)=0\}$ へ制限した函数とする時 $Nf'=0$ が $\delta(f')$ 上殆んど至る所成立する。$f'_n = \inf(f', n)$ とおく時 $\delta(f'_n)$ 上殆んど至る所 $Nf'_n = 0$, 故に N の M_K-優越原理から $Nf'_n = 0$ を得て, $f'_n = 0$ となる。従って $Nf < Ng$ が殆んど至る所 $\delta(f)$ 上成立して居る場合 $Nf \leq Ng$ が X 上殆んど至る所成立することを示せば十分である。$g_n = \inf(g, n)$ とおき 次に f_n を f の $\{x \in X;\ Ng_n(x) \geq Nf(x)\}$ への制限とする。この時 直ちに X 上殆んど至る所 $Nf_n \leq Ng_n$ が成立する。即ち $Nf_n \leq Ng$. ここで $n \to \infty$ として, X 上殆んど至る所 $Nf \leq Ng$ を得る。勿論完全最大値原理についても同様である。

注意4. N が M_K-優越原理（又は M_K-完全最大値原理）を満すことと次の命題は同値である。

2つの函数 $f, g \in M_K^+$ に対し, 不等式 $Nf \leq Ng$（又は $Nf \leq Ng+1$）が $S(f) = S(f5)$ 上殆んど至る所成立すれば, 全空間で殆んど至る所成立する。

N が M_K-優越原理（又は M_K-完全最大値原理）を満せば, 上の命題が得られることは明らかである。逆を議論してみよう。同様であるから優越原理のみについて調べる。2つの函数 $f, g \in M_K^+$ に対し, $\delta(f)$ 上殆んど至る所 $Nf \leq Ng$ であると仮定しよう。この時, あるコンパクト集合の増加列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ を

各 K_n 上 $Nf \leqq Ng$ 且つ $\lim_{n\to\infty} \xi(K_n) = \xi(k(f))$ となるように選べる。f_n を f の K_n への制限とする。この時 $S(f_n)$ 上殆んど至る所 $Nf_n \leqq Ng$。従って同じ不等式が全空間で殆んど至る所成立する。$n \to \infty$ として、$Nf \leqq Ng$ が X 上殆んど至る所成立することがわかる。

補題 1。合成核 N が M_K-優越原理（又は M_K-完全最大値原理）を満すことと、任意の正数 c に対し、$N+c\varepsilon$ が M_K-優越原理（又は M_K-完全最大値原理）を満すことと同値である。

こゝに、ε は原点に於ける単位質量である。度々これは単位核と呼ばれる。

証明。同様であるから優越原理についてのみ論じる。先ず必要条件から始める。二つの函数 $f, g \in M_K$ と正数 c に対して $k(f)$ 上殆んど至る所 $Nf+cf \leqq Ng+cg$ とする。この時、$k(f)$ 上殆んど至る所 $N(f-g)^+ + c(f-g)^+ \leqq N(f-g)^- + c(f-g)^-$。従って $\xi(k(f) \cap k(g)) = 0$ と仮定して十分である。故に $Nf \leqq Ng$ が $k(f)$ 上殆んど至る所成立する。これから同不等式が全空間で殆んど至る所成立する。即ち X 上殆んど至る所、$Nf \leqq Ng+cg$。上の仮定と合わせて、$N+c\varepsilon$ が M_K-優越原理を満すことがわかる。

次に十分条件に移ろう。注意 3 の証明の中で述べたと同様 $N \neq 0$ である限り、任意の $f \in M_K$ に対して、$k(f)$ 上殆んど至

る所 $Nf>0$ がわかる。なぜなら、ある函数 $f_1\in M_K^+$ が存在して、$\xi(\{x\in k(f_1);\ Nf_1(x)=0\})\neq 0$ であると仮定しよう。f_0 を f_1 の $\{x\in k(f_1);\ Nf_1(x)=0\}$ への制限とする。この時 $f_0\neq 0$ かつ $k(f_0)$ 上殆んど至る所 $Nf_0=0$。任意の $g\in M_K^+$ に対して、$k(f_0)$ 上殆んど至る所 $Ng=0$ とすれば、X 上殆んど至る所 $Nf_0=0$ となる。しかし、これは $N\neq 0$ に反す。従ってある函数 $g\in M_K^+$ とある正数 a が存在して、$\xi(\{x\in k(f_0);\ Ng(x)\geq a\})>0$ を満す。f_0' を f_0 の $\{x\in k(f_0);\ Ng(x)\geq c\}$ への制限とする。この時 $f_0'\neq 0$ かつ $k(f_0')$ 上殆んど至る所 $Nf_0'=0$。任意に与えた正数 $\delta>0$ に対し、正数 c を $0<c(\operatorname*{ess.sup}_{x\in X} f_1(x))\leq a\delta$ となるように選べば $k(f_0')$ 上殆んど至る所 $Nf_0'+cf_0'\leq\delta(Ng+cg)$。$N+c\varepsilon$ の M_K-優越原理から、同不等式は全空間で殆んど至る所成立する。$\delta\to 0$ として $Nf_0'=0$ が X 上殆んど至る所成立する。これは $N\neq 0$ に反す。故に、任意の $f\in M_K^+$ に対して、$k(f)$ 上殆んど至る所 $Nf>0$。この注意から、N が M_K-優越原理を満すことを示すのに次の命題を示せば十分である。"二つの函数 $f,g\in M_K^+$ に対し、$k(f)$ 上殆んど至る所 $Nf<Ng$ ならば、X 上殆んど至る所 $Nf\leq Ng$." f_n を f の $\{x\in X;\ Ng(x)\geq Nf(x)+\frac{1}{n}\}$ への制限とする。今正数 c_n を $c_n(\operatorname*{ess.sup}_{x\in X} f(x))<\frac{1}{n}$ となるように選ぶ。この時 $Nf_n+c_nf_n\leq Ng+c_ng$ が $k(f_n)$ 上、故に X 上殆んど至る所成立する。次に $n\to+\infty$ として、X 上殆んど至る所 $Nf\leq Ng$

であることを得る。(証明終)。

我々は今2種類の優越原理，完全最大値の原理を定義したが，これらは同値であることがわかる。

定理1. 合成核Nに対して，C_K－優越原理（又はC_K－完全最大値原理），M_K－優越原理（又はM_K－完全最大値原理）は同値である。

証明. NがM_K－優越原理を満せば，C_K－優越原理を満足することは殆んど明らかである。逆の証明をしよう。補題1と同様，NがC_K－優越原理を満せば，任意の正数cに対して，$N+c\varepsilon$も同じである。又上の補題から，任意の正数cに対して$N+c\varepsilon$がM_K－優越原理を満すことを示せば十分である。ある正数cと2つの函数$f, g \in M_K^+$に対して，$s(f)$上殆んど至る所$Nf+cf \leqq Ng+cg$であると仮定しよう。$(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$を相対コンパクト開集合の減少列で$\bigcap_{n=1}^{\infty}\omega_n = s(f)$を満すとする。$\omega_n - s(f)$の特性函数を$\chi_n$とすれば，$N\chi_n + c\chi_n$は$n\to\infty$の時，$X$上殆んど至る所0に収束する。$a = \operatorname{ess.sup}_{x\in\omega_1}(Nf(x)+cf(x))$とおく時，各$\omega_n$上で殆んど至る所，

$$Nf + cf \leqq Ng + cg + \frac{a}{c}(N\chi_n + c\chi_n)$$

が成立する。注意2を用いれば，この不等式はX上殆んど至る所成り立つ。ここで$n\to\infty$として，X上殆んど至る所，$Nf+cf \leqq Ng+cg$を得る。即ち$N+c\varepsilon$はM_K－優越原理を満す。

同様な議論が完全最大値原理に対してもなされる。(証明終)

従って，優越原理，完全最大値原理を論じるのに上のような区別をする必要のないことを知る。次にこれらと深い関係がある掃散について論じてみよう。

掃散原理： 合成核 N が掃散原理を満足するとは，任意の台がコンパクトな正の Radon 測度 μ と X 内の相対コンパクト開集合 ω を与えた時，$\bar{\omega}$ に台を持ち且つ次の2条件を満足する正の Radon 測度 μ' が存在する場合である。

(i) 測度の意味で X 上 $N*\mu \geqq N*\mu'$.

(ii) 測度の意味で ω 上 $N*\mu = N*\mu'$.

この時，μ' を μ の ω への1つの掃散分布と言う。これは必ずしも唯一つ定まるとは限らない。

補題2. N を優越原理を満す対称な合成核とする。実数値且つ台がコンパクトな $L^1(\xi)$ の函数 f とある正数 c に対して，$\mathcal{K}(f)$ 上殆んど至る所 $Nf+cf=0$ ならば，$f=0$ である。

証明. 先ず $Nf \in L_{loc}$ であることを注意する。$Nf^+ - Nf^- = -c(f^+ - f^-)$ に依り，$\mathcal{K}(f^+)$ 上殆んど至る所 $Nf^+ \leqq Nf^-$ となる。注意3と同様にして，X 上殆んど至る所 $Nf^+ \leqq Nf^-$，即ち $Nf \leqq 0$ となる。従って $f \geqq 0$ を得る。これから直ちに $f=0$ となる。

補題3. N, f, c を上と同様とする。$\mathcal{K}(f)$ 上殆んど至る

所 $Nf+cf \geqq 0$ ならば，X 上殆んど至る所 $Nf \geqq 0$ となる．

証明．上と同様にして $Nf^+ - Nf^- \geqq 0$ が殆んど至る所 $\delta(f^-)$ 上成立する．従って同不等式が X 上殆んど至る所成立する．

補題4．N, c を上と同じとしよう．あるコンパクト集合 K に台を持つ M_K 内の函数列 $\{f_n\}$ に対し，$\{Nf_n + cf_n\}$ が K 上有界であれば，$\{f_n\}$ も又有界である．

証明．仮定によって，ある正定数 A があって，n に関して一様に K 上殆んど至る所 $-A \leqq Nf_n + cf_n \leqq A$ となる．χ_K を K の特性函数とする時，K 上殆んど至る所

$$-N(\tfrac{A}{c}\chi_K) - A\chi_K \leqq Nf_n + cf_n \leqq N(\tfrac{A}{c}\chi_K) + A\chi_K$$

を満す．補題3を用いて，X 上殆んど至る所，

$$-N(\tfrac{A}{c}\chi_K) \leqq Nf_n \leqq N(\tfrac{A}{c}\chi_K)$$

を満す．$N\chi_K$ は局所有界であるから，$\{f_n\}$ が有界であることを知る．

定理2．対称な合成核 N に対して，次の2条件は同値である。

(i) N は優越原理を満す。

(ii) N は掃散原理を満す。

証明．先ず (i) ⇒ (ii) を示そう．ω を X 内の相対コンパクト開集合として

$$P(\omega; c) = \{(Nf)_\omega + cf \ ; \ f \in M_K(\bar{\omega})\}$$

とおく。ただし $c > 0$ 及び $(Nf)_\omega$ は Nf の ω への制限である。補題2より $P(\omega; c)$ は $L^2(\varpi)$ 内で稠密である。故に $f \in M_K^+$ に対して，ϖ に台を持つ M_K 内の函数列 $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\int_\omega |Nf'_n + cf'_n - Nf|^2 d\xi = 0$$

と出来る。明らかに，ϖ 上殆んど至る所

$$|Nf'_n + cf'_n| \leq \frac{1}{c}\left(N((Nf)_\omega + |(Nf)_\omega - (Nf'_n)_\omega - cf'_n|)\right.$$
$$\left. + c((Nf)_\omega + |(Nf)_\omega - (Nf'_n)_\omega - cf'_n|)\right).$$

補題3を用いれば，X 上殆んど至る所

$$|Nf'_n| \leq \frac{1}{c}N((Nf)_\omega + |(Nf)_\omega - (Nf'_n)_\omega - cf'_n|).$$

故に $((Nf'_n)_\omega)$ は $L^2(\varpi)$ 内で有界である。即ち $\{f'_n\}$ も又然りである。従って，ある函数 $f' \in L^2(\xi)$ でその台が ϖ に含まれるものが存在して，ϖ 上殆んど至る所 $Nf' + cf' = Nf$ を満す。補題3同様に $Nf' \leq Nf$ が X 上成立することを知り $f' \geq 0$ を得，合わせて $f' \in M_K^+$ もわかる。c を動かす時，$(f'\xi)$ は漠有界であり，$c \to 0$ とする時，ϖ に台を持つ正の Radon 測度 μ_f が存在し，これが $f\xi$ の ω への掃散分布であることがわかる。これから直ちに一般に正の Radon 測度に対しても台がコンパクトなる限り掃散分布の存在を知る。次に (ii) ⇒ (i) を示す。$\varphi, \psi \in C_K^+$ に対して，$S(\varphi)$ 上，$N*\varphi \leq N*\psi$ を仮定する。任意の $x \in CS(\varphi)$ に対して，$S(\varphi)$ に台を持つ正の Radon 測度 ε'_x が存在して，$\{x \in X;\ \varphi(x) > 0\}$ 上 $N*\varepsilon_x = N*\varepsilon'_x$，$X$ 上 $N*\varepsilon_x \geq N*\varepsilon'_x$ を満す。ただし ε_x は

点 x における単位質量を表わす。

$$N*\varphi(x)-N*\psi(x)=\int(\varphi-\psi)\,d(N*\varepsilon_x)$$
$$\leqq\int(\varphi-\psi)\,d(N*\varepsilon_x')=\int N*(\varphi-\psi)\,d\varepsilon_x'\leqq 0.$$

即ち X 上 $N*\varphi\leqq N*\psi$ を得て，N が優越原理を満すことを得る。

定理3. N を対称な合成核とする。この時，N に対する優越原理，完全最大値の原理は同値である。

証明．N に対する完全最大値の原理から優越原理が得られるのは明らかであるから，この逆を示す．上で行なった計算と同様にして，次の命題から N に対する完全最大値の原理が得られる．

"任意の点 $x\in X$ と任意の相対コンパクト開集合に対して，全測度が1以下の ε_x の ω への掃散分布 ε_x' が存在する。"

議論の対象が合成核であることに注意する時，原点に対してのみ上の命題を示せばよい。$N\neq 0$ と仮定してよい。ε' を ε の ω への1つの掃散分布とする。この時，$0<a<1$ に対し，$N\geqq N*(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')$ 及び $N\neq N*(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')$ である。n コの $a\varepsilon'*\check{\varepsilon}'$ の合成を $(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')^n$ と記す時

$$0\leqq\left(N*(\varepsilon-a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')\right)*\sum_{k=0}^{n}(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')=N-N*(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')^{n+1}.$$

ただし $(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')^0=\varepsilon$．故に $\sum_{k=0}^{\infty}(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')^k$ が測度として意味を持つ。而も $\varepsilon'*\check{\varepsilon}'$ が正型であるから $\sum_{k=0}^{\infty}(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')^k$ も又正型な

測度である。等式

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')^{k}\right)*(\varepsilon-a\varepsilon'*\check{\varepsilon}')=\varepsilon$$

に注意して，$\varepsilon-a\varepsilon'*\check{\varepsilon}'$ が正型であることがわかる。これから直ちに $a\int d(\varepsilon'*\check{\varepsilon}')\leqq 1$，即ち $a\left(\int d\varepsilon'\right)^{2}\leqq 1$ を得る。$a\to 1$ として，$\int d\varepsilon'\leqq 1$ がわかる。　　　　(証明終)

定理4．対称な合成核 N が優越原理を満足すれば，N は正型である。

証明．任意の正数 c に対して，$N+c\varepsilon$ が正型であることがわかれば十分である。ω を任意の相対コンパクト開集合とする。任意の $f\in M_K^+$ に対して，定理2と同様にして，$\overline{\omega}$ に台を持つ M_K^+ の函数 $f'_{c,\omega}$ が唯1つ存在して，殆んど至る所 X 上 $(N+c\varepsilon)f'_{c,\omega}\leqq Nf$ かつ ω 上 $(N+c\varepsilon)f'_{c,\omega}=Nf$ を満す。函数 $f'_{c,\omega}$ に対して，得られる上記の函数を $f''_{c,\omega}$，一般に $f^{(n)}_{c,\omega}$ に対して上記の方法で得られる函数を $f^{(n+1)}_{c,\omega}$ とかく。この時，$s(f)\subset\overline{\omega}$ なる限り，$\overline{\omega}$ 上殆んど至る所

$$Nf+cf=cf+c\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}_{c,\omega}$$

が成立する。而も右辺の台は $\overline{\omega}$ に含まれる。上記を得る為には，先ず $\overline{\omega}$ 上殆んど至る所

$$Nf+cf=cf+c\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}_{c,\omega}+\lim_{n\to\infty}Nf^{(n)}_{c,\omega}$$

を得，次に $f^{(n)}_{c,\omega}$ が0に収束することがわかり，$\lim_{n\to\infty}Nf^{(n)}_{c,\omega}=0$ を得る。又 $s(f)\subset\overline{\omega}$，$s(g)\subset\overline{\omega}$ なる2つの M_K 内の函数 f,g に対して

明らかに $\int f'_{c,\omega} g\, d\xi = \int g'_{c,\omega} f\, d\xi$ を得る。 定理3より，$\int f'_{c,\omega} d\xi \leq \int f\, d\xi$ であるから，$0 \leq (\chi_\omega)'_{c,\omega} \leq 1$ を得る．$f \in M_K$ K対して，$f^{(n)}_{c,\omega} = (f^+)^{(n)}_{c,\omega} - (f^-)^{(n)}_{c,\omega}$ とかき 又 $s(f) \subset \overline{\omega}$ なる函数 $f \in M_K$ K対して，$(Nf)_\omega$ を Nf の $\overline{\omega}$ への制限とする。この時，

$$\int (Nf+cf) f\, d\xi = \frac{1}{c}\int ((Nf)_\omega + cf)((Nf)_\omega + cf - ((Nf)_\omega + cf)'_{c,\omega})\, d\xi$$

$$= \frac{1}{c}\int |(Nf)_\omega + cf|^2 (1 - (\chi_\omega)'_{c,\omega})\, d\xi + \frac{1}{2c}\int \{((Nf)_\omega(x) + cf(x))\chi_\omega - (Nf)_\omega - cf)^2\}'^{(x)}_{c,\omega} d\xi(x) \geq 0.$$

ω は任意であるから，全ての $f \in M_K$ K対して

$$\int f * \check{f}\, d(N + c\varepsilon) = \int (Nf + cf) f\, d\xi \geq 0$$

を得る．$N + c\varepsilon$ が正型となり証明を終る．

以上の議論から，対称の合成核の優越原理，掃散原理を論じる場合，正型の合成核K限っていことがわかる。正型と関係して，ある種の函数空間Kついて述べる．

3. ある種の函数空間と優越原理

X上の実数値局所 ξ-可積分函数から成るヒルベルト空間 $H = H(X;\xi)$ がX上の平行移動で不変な函数空間であるとは，次の2条件を満足する場合である．

(H.1) X内のコンパクト集合Kに対して，Kにのみ依存する正定数 $A(K)$ が存在して，任意の $u \in H$ K対して

$$\int_K |u|\, d\xi \leq A(K)\|u\|$$

を満す．

(H.2) 任意の X の点 x と任意の $u \in H$ に対して，u を x だけ平行移動して得られる函数 $\tau_x u$ が又 H に属し，かつ $\|\tau_x u\| = \|u\|$ を満足する。

上の条件で $\|\cdot\|$ は H 内のノルムを表わす。$(\cdot, \cdot)$ を H 内の内積とする時，任意の $f \in M_K$ に対して，条件 (H.1) より H の元 u_f が唯一つ定まり，任意の $v \in H$ に対して

$$(u_f, v) = \int v f d\xi$$

を満す。この u_f を f に依る H 内のポテンシャルと呼ぶ。

注意 5. H を X 上の平行移動で不変な函数空間とする。この時次の (i), (ii) が成立する。

(i) 任意の $u \in H$ に対して，写像 $X \ni x \to \tau_x u \in H$ は強連続である。

(ii) 任意の $u \in H$ と $f \in L^1(\xi)$ に対して，$u*f$ は意味を持ち $u*f \in H$ かつ $\|u*f\| \leqq \int |f| d\xi \|u\|$ を満足する。

証明．点列 $\{x_n\}$ が原点に収束したとする。この時 $\lim_{n\to\infty} \|\tau_{x_n} u\| = \|u\|$ かつ任意の $f \in M_K$ に対して，

$$(u_f, \tau_{x_n} u) = \int \tau_{x_n} u(x) f(x) d\xi(x) \longrightarrow \int u(x) f(x) d\xi(x) = (u_f, u).$$

$\{u_f ; f \in M_K\}$ は H 内で稠密であるから，$\{\tau_{x_n} u\}$ は u に強収束する。即ち (i) を得る。

(ii) を示そう。通常の極限操作によって，$f \in M_K$ に対して，$u*f \in H$ かつ $\|u*f\| \leqq (\int |f| d\xi) \|u\|$ であることがわかればよい。

H 上の線型汎函数

$$H \ni v \longrightarrow \int (\tau_x u, v) \check{f}(x)\, d\xi(x)$$

を考えよう。これは

$$\left| \int (\tau_x u, v) \check{f}(x)\, d\xi(x) \right| \leqq \left(\int |f|\, d\xi \right) \|u\| \|v\|$$

より、有界である。故に H 内のある函数 u' が存在して

$$(u', v) = \int (\tau_x u, v) \check{f}(x)\, d\xi(x)$$

を満足する。特に $v = u_g$ $(g \in M_K)$ とする時、

$$\int u' g\, d\xi = (u', u_g) = \int (\tau_x u, u_g) \check{f}(x)\, d\xi(x) = \iint \tau_x u(y)\, g(y) \check{f}(x)\, d\xi(y)\, d\xi(x)$$

$$= \iint \tau_x u(y)\, f(-x)\, g(y)\, d\xi(x)\, d\xi(y) = \int u * f(y)\, g(y)\, d\xi(y).$$

g は任意であるから、$u' = u * f$ を得て、$u * f \in H$ かつ $\|u * f\|$ $\leqq \left(\int |f|\, d\xi \right) \|u\|$ を得る。 （証明終）

系. H を上と同じとする時、$H \cap C_b$ は H 内で稠密である。

なぜなら、上の (i) より $\{ u_f * \varphi ;\ f \in M_K,\ \varphi \in C_K \}$ は H 内稠密であり、かつ $|u_f * \varphi(x)| = \left| \int \tau_x u_f(y) \check{\varphi}(y)\, dy \right| = |(\tau_x u_f, u_{\check{\varphi}})| \leqq \|u_f\| \|u_{\check{\varphi}}\|$ より $u_f * \varphi \in C_b$ である。

X 上の平行移動で不変な函数空間 H が正核を持つとは、任意の $f \in M_K$ に対して、$u_f \geqq 0$ となる場合である。

定理 5.

(i) 正核を持つ平行移動で不変な函数空間 H に対して、対称かつ正型の合成核 N が唯一つ定まって、任意の $f \in M_K$ に対して、f による H 内のポテンシャル u_f が Nf に等しい。

(ii) 逆に対称かつ正型の合成核Nを与えた時，正核を持つ平行移動で不変な函数空間Hが唯一つ定まって，任意の$f\in M_K$に対して，fによるH内のポテンシャルu_fがNfに等しい。

証明 Hを正核を持つX上の平行移動で不変な函数空間とする。この時，任意の$f\in M_K$と$x\in X$に対して

$$0\le \|\tau_x u_f - u_{\tau_x f}\|^2 = \|u_f\|^2 - 2(\tau_x u_f, u_{\tau_x f}) + \|u_{\tau_x f}\|^2$$
$$= \|u_{\tau_x f}\|^2 - \|u_f\|^2 \le 0.$$

なぜなら

$$\|u_{\tau_x f}\|^2 = \sup_{u\in H} \frac{\int u\,\tau_x f\,d\xi}{\|u\|^2} = \sup_{u\in H}\frac{(\tau_{-x}u,\ u_f)}{\|u\|^2} \le \sup_{u\in H}\frac{\|\tau_{-x}u\|^2}{\|u\|^2}\|u_f\|^2.$$

故に，$\tau_x u_f = u_{\tau_x f}$である。これより，$f,g\in M_K$に対して$u_{(f*g)} = u_f * g = u_g * f$を得る。$\tilde C_K = \{\sum_{有限} f_i * g_i\ ;\ f_i\in M_K\ g_i\in M_K\}$とおく時，$\tilde C_K$は$C_K$内で稠密である。$\tilde C_K$上の線型汎函数

$$\textstyle\sum_{有限} f_i*g_i \longrightarrow \sum u_{f_i} * \check g_i(0)$$

が定義され，Hが正核を持つことから，この線型汎函数は正値である。故にある正のRadon測度Nが存在して，任意の$f,g\in M_K$に対して，$\int \check f * \check g\, dN = N*f*g(0) = u_f * g(0)$を満す。これから直ちに$u_f = Nf$を得る。$N$が対称であることは殆んど明らかであり又$\int f*\check f\, dN = (u_f,\ u_f) \ge 0$より$N$は正型である。

(ii)を示そう。$H'=\{Nf;\ f\in M_K\}$とおこう。Nが正型であることから$\|Nf\| = (\int Nf(x)f(x)d\xi(x))^{1/2}$及び$(Nf,\ Ng) = \int Nf\, g\, d\xi$に依ってノルム，内積を定義する時，$H'$は前ヒルベルト空間で

ある。任意のコンパクト集合Kに対して、$K_1=\{x\in K;\ Nf(x)>0\}$,
$K_2=\{x\in K;\ Nf(x)<0\}$とおく時,

$$\int_K |Nf|\,d\xi=\int_{K_1}Nf\,d\xi-\int_{K_2}Nf\,d\xi \leqq \|N\chi_{K_1}\|\,\|Nf\|+\|N\chi_{K_2}\|\,\|Nf\|$$
$$\leqq 2\,\|N\chi_K\|\,\|Nf\| = A(K)\,\|Nf\|.$$

故にH'を完備化して得られるヒルベルト空間Hは明らかにX上の平行移動で不変な函数空間である。任意の$f\in M_K$に対して、$Nf=u_f$であることは殆んど明らかであろう。(証明終)

この時、我々はNをHの核、又はHは合成核Nから生成された函数空間と呼び、$H=H(N)$とかく。

定理6. N_1, N_2を2つの対称かつ正型の合成核とする。この時 $H(N_1+N_2)=\{u_1+u_2;\ u_1\in H(N_1),\ u_2\in H(N_2)\}$である。特に$H(N_1)\cap H(N_2)=\{0\}$であれば、$H(N_1+N_2)$は$H(N_1)$と$H(N_2)$の直和である。

証明. $u\in H(N_1)$に対して次の線型汎函数を考える。

$$\{N_1f+N_2f;\ f\in M_K\}\ni N_1f+N_2f \longrightarrow \int uf\,d\xi.$$
$$\left|\int uf\,d\xi\right| \leqq \|u\|_1\,\|N_1f\|_1 \leqq \|u\|_1\,\|N_1f+N_2f\|_{(1,2)}.$$

ただし、$\|\cdot\|_i$ $(i=1,2)$, $\|\cdot\|_{(1,2)}$は夫々$H(N_i)$, $H(N_1+N_2)$内のノルムである。故に上の線型汎函数は$H(N_1+N_2)$上に拡張され、これが有界である。これから直ちに$u\in H(N_1+N_2)$がわかり、$\|u\|_{(1,2)}\leqq\|u\|_1$を得る。同様にして、任意の$u\in H(N_2)$に対して$u\in H(N_1+N_2)$かつ$\|u\|_{(1,2)}\leqq\|u\|_2$を得る。即ち$\{u_1+u_2;\ u_i\in H(N_i)\}$

$\subset H(N_1+N_2)$. $\{N_1f+N_2f\in H(N_1+N_2)\,;\,f\in M_K\}$ は $H(N_1+N_2)$内で稠密であるから、任意の $u\in H(N_1+N_2)$ に対して、ある M_K内の函数列 $\{f_n\}$ が存在して $\{N_1f_n+N_2f_n\}$ が u に $H(N_1+N_2)$ 内で強収束する。任意の n, m に対して

$$\|N_1f_n+N_2f_n-N_1f_m-N_2f_m\|^2_{(1,2)}=\|N_1f_n-N_1f_m\|^2_1+\|N_2f_n-N_2f_m\|^2_2.$$

故に $\{N_1f_n\}$, $\{N_2f_n\}$ は夫々 $H(N_1)$, $H(N_2)$ 内で基本列である。従って、ある $u_1\in H(N_1)$, $u_2\in H(N_2)$ が存在して、$n\to\infty$ 時、$\{N_1f_n\}$, $\{N_2f_n\}$ が夫々 u_1, u_2 に $H(N_1)$, $H(N_2)$ 内で強収束する。$\{N_1f_n+N_2f_n\}$, $\{N_1f_n\}$, $\{N_2f_n\}$ は夫々 u, u_1, u_2 に X 上殆んど至る所収束すると仮定してよいから、$u=u_1+u_2$ を得る。我々の定理の後半は上の議論の直接の結果である。　　　　（証明終）

系．N を対称で正型の合成核とする。任意の正数 c に対して、$H(N+c\varepsilon)\supset L^2(\xi)$．

上の定理と $H(\varepsilon)=L^2(\xi)$ から明らかである。

定理 7．N を X 上の対称な合成核としよう。この時次の4条件は同値である。

(i)　N は優越原理を満す．

(ii)　N は完全最大値の原理を満す．

(iii)　N を核に持つ平行移動で不変な函数空間 $H=H(N)$ が存在して、Module contraction が H に作用する。

(iv)　N を核に持つ函数空間 H が存在して、全ての Normal

contraction がHに作用する。

実数からそれ自身への写像Tが原点を保存し，距離を縮小する時，Normal contraction と呼ぶ。特に $T(a)=|a|$ で定義される Normal contraction を Module contraction と呼ぶ。Normal contraction T が任意の $u \in H$ に対して，$T\cdot u \in H$ かつ $\|T\cdot u\| \leqq \|u\|$ の時，H に作用すると言う。

証明．(i) ⇒ (ii) は既に証明した．(ii) ⇒ (i)，(iv) ⇒ (iii) は明らか。

(ii) ⇒ (iv)：定理4から N が正型であることを知り，これから直ちに N から生成される平行移動で不変な函数空間 $H=H(N)$ の存在がわかる。

補題5．H を平行移動で不変な函数空間とし，T をある Normal contraction とする。任意の $\varphi \in C_K$ に対して，$T\cdot u_\varphi$ が H に属し，かつ $\|T\cdot u_\varphi\| \leqq \|u_\varphi\|$ ならば T は H に作用する。ただし，u_φ は φ による H 内のポテンシャルである。

補題5の証．先ず $\{u_\varphi\ ;\ \varphi \in C_K\}$ は H 内で稠密であることがわかる。従って $u \in H$ に対して，ある C_K 内の函数列 $\{\varphi_n\}$ が存在して，$\{u_{\varphi_n}\}$ が u に H 内で強収束する．我々の仮定により $T\cdot u_{\varphi_n} \in H$ かつ $\|T\cdot u_{\varphi_n}\| \leqq \|u_{\varphi_n}\|$ を得る。任意のコンパクト集合 K に対して，

$$\int_K |T\cdot u_{\varphi_n} - T\cdot u_{\varphi_m}|\,d\xi \leqq \int_K |u_{\varphi_n} - u_{\varphi_m}|\,d\xi \leqq A(K)\,\|u_{\varphi_n} - u_{\varphi_m}\|$$

より，$\{T\cdot u_{\varphi_n}\}$ $\{u_{\varphi_n}\}$ は夫々 $T\cdot u$，u へ X 上殆んど至る所収束

すると仮定出来る。$\{T\cdot u_{\varphi_n}\}$ がH内で有界であることに注意して、この函数列がH内で $T\cdot u$ に弱収束することがわかる。故に $\|T\cdot u\| \leqq \varliminf_{n\to\infty} \|T\cdot u_{\varphi_n}\| \leqq \lim_{n\to\infty} \|u_{\varphi_n}\| = \|u\|$ を得て、TがHへ作用することがわかる。

補題6. $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ を対称かつ正型の合成核の列で、ある合成核Nに漠収束すると仮定する。もしある Normal contraction T が $H(N_n)$ に作用するならば、T は $H(N)$ への作用する。

補題6の証. 任意の $\varphi \in C_K$ に対して、$\{T\cdot(N_n*\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ は $T\cdot(N*\varphi)$ へ $n\to\infty$ の時、各点収束する。又我々の仮定から、任意の n に対して、$T\cdot(N_n*\varphi) \in H(N_n)$ かつ $\|T\cdot(N_n*\varphi)\|_n \leqq \|N_n*\varphi\|_n$ である。ただし、$\|\cdot\|_n$ は $H(N_n)$ 内のノルムを示す。任意の $f \in M_K$ に対して、

$$|\int(T\cdot N*\varphi)f\,d\xi| = |\lim_{n\to\infty}\int(T\cdot(N_n*\varphi))f\,d\xi| \leqq \varliminf_{n\to\infty} \|T\cdot(N_n*\varphi)\|_n\cdot\|N_nf\|_n$$

$$\leqq \lim_{n\to\infty} \|N_n*\varphi\|_n\cdot\|N_nf\|_n = \|N*\varphi\|\cdot\|Nf\|.$$

ただし $\|\cdot\|$ は $H(N)$ 内のノルムを表わす。我々は上の議論で

$$\|N_nf\|_n = \left(\int f*\check{f}\,dN_n\right)^{1/2}$$

であることに注意する。故に次の線型汎函数

$$\{Nf \in H(N)\ ;\ f\in M_K\} \ni Nf \longrightarrow \int T\cdot(N*\varphi)f\,d\xi$$

は $H(N)$ まで拡張され、有界である。Riesz の定理から $T\cdot(N*\varphi) \in H(N)$ を得、又上で行なった計算から $\|T\cdot(N*\varphi)\| \leqq \|N*\varphi\|$ であることが見える。従って補題5から我々の結論を得る。

補題7. Nを優越原理を満足する対称な合成核とし，cをある正数とする。任意の台がコンパクトである正の Radon 測度 μ と相対コンパクト開集合 ω に対して，$\overline{\omega}$ に台を持つ正の Radon 測度 $\mu'_{(c,\omega)}$ が唯一つ存在して，次の3条件を満足する。

(i) 測度の意味で X 上 $N*\mu'_{(c,\omega)} + c\mu'_{(c,\omega)} \leq N*\mu$.

(ii) 測度の意味で ω 上 $N*\mu'_{(c,\omega)} + c\mu'_{(c,\omega)} = N*\mu$.

(iii) $\overline{\omega}$ に台を持つ正の Radon 測度 ν が ω 上測度の意味で $N*\nu + c\nu \geq N*\mu$ を満せば，常に X 上 $N*\mu'_{(c,\omega)} + c\mu'_{(c,\omega)} \leq N*\nu + c\nu$.

ε_x に対して上記の方法で定まる Radon 測度を $\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ とする時，任意の $\varphi \in C_K^+$ に対して，函数 $x \to \int \varphi(y)\,d\varepsilon'_{x,(c,\omega)}(y)$ は ~~上半連続~~ Borel 可測であり，又 $\mu'_{(c,\omega)} = \int \varepsilon'_{x,(c,\omega)}\,d\mu(x)$ となる。

補題7の証。$\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ を満しかつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = \omega$ となる開集合列とする。定理2と同様にして，$\overline{\omega_n}$ に台を持つ正の Radon 測度 μ'_n が存在して，$N*\mu'_n + c\mu'_n \leq N*\mu$ が X 上，$N*\mu'_n + c\mu'_n = N*\mu$ が ω 上成り立つ。この時，直ちに $(N*\mu'_n + c\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ は X 上増加であることがわかる。なぜなら，任意の n に対して，原点の近傍 V_n が存在して，$s(\varphi) \subset V$ なる C_K^+ の函数 φ に対して，$s(\mu'_n*\varphi)$ 上 $(N+c\varepsilon)*(\mu'_{n+1}*\varphi) \geq (N+c\varepsilon)*(\mu'_n*\varphi)$ となるように出来る。定理4と同様に $\int d\mu'_n \leq \int d\mu$ を得るから，測度列 $\{\mu'_n\}$ は漠有界であることがわかる。この漠集積点の1つを $\mu'_{(c,\omega)}$ とする時 $\mu'_{(c,\omega)}$ が求めるものである。条件(i)，(ii)を満すことは殆んど明

らかであり，(iii)に対しては，上と同様にして，X 上 $N*\nu+c\nu \geqq N*\mu_n'+c\mu_n'$ を得る．即ち，X 上 $N*\mu'_{(c,\omega)}+c\mu'_{(c,\omega)} \leqq N*\nu+c\nu$ を満す．次に唯一性について調べよう．$\mu''_{(c,\omega)}$ を条件 (i), (ii), (iii) を満す $\bar{\omega}$ に台を持つ正の Radon 測度とする．この時直ちに X 上 $(N+c\varepsilon)*\mu'_{(c,\omega)}=(N+c\varepsilon)*\mu''_{(c,\omega)}$ を得る．N は正型であるから，$H(N+c\varepsilon)$ は意味を持ち，しかも $H(N+c\varepsilon)\supset L^2(\xi)$ である．$(\cdot,\cdot)_{(c)}$ で $H(N+c\varepsilon)$ 内の内積を表わす．任意の $\varphi\in C_K$ に対して，

$$N*(\mu'_{(c,\omega)}-\mu''_{(c,\omega)})*\varphi+c(\mu'_{(c,\omega)}-\mu''_{(c,\omega)})*\varphi\in H(N+c\varepsilon)$$

であり，かつ $u\in L^2(\xi)\subset H(N+c\varepsilon)$ に対して，

$$(u,(N+c\varepsilon)*(\mu'_{(c,\omega)}-\mu''_{(c,\omega)})*\varphi)_{(c)}=\int u(x)(\mu'_{(c,\omega)}-\mu''_{(c,\omega)})*\varphi(x)\,dx=0.$$

即ち $\mu'_{(c,\omega)}=\mu''_{(c,\omega)}$ となる．

補題 7 の右半の証明を行う．任意の $\varphi\in C_K^+$ に対して，函数 $x\to\int(N+c\varepsilon)*\varphi\,d\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ が Borel 可測であることがわかれば十分．$a_x=\varliminf_{\substack{y\to x\\ y\neq x}}\int(N+c\varepsilon)*\varphi\,d\varepsilon'_{y,(c,\omega)}$ とおこう．この時，x に収束する点列 $\{y_n\}$ が存在して，$a_x=\lim_{n\to\infty}\int(N+c\varepsilon)*\varphi\,d\varepsilon'_{y_n,(c,\omega)}$ と出来る．$\{\varepsilon'_{y_n,(c,\omega)}\}$ は漠有界であるから，必要なら部分列を取ることとして，この測度列はある測度 $\varepsilon''_{x,(c,\omega)}$ に漠収束すると仮定出来る．明らかに，X 上 $N*\varepsilon''_{x,(c,\omega)}+c\varepsilon''_{x,(c,\omega)}\leqq N*\varepsilon_x$，$\omega$ 上 $N*(\varepsilon''_{x,(c,\omega)})+c\varepsilon''_{x,(c,\omega)}=N*\varepsilon_x$ となる．条件 (iii) より X 上 $N*\varepsilon''_{x,(c,\omega)}+c\varepsilon''_{x,(c,\omega)}\geqq N*\varepsilon'_{x,(c,\omega)}+c\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ となる．故に $a_x\geqq\int(N+c\varepsilon)*\varphi\,d\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ となり，函数 $x\longrightarrow\int(N+c\varepsilon)*\varphi\,d\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$

が下半連続であることがわかる。従って積分 $\int \varepsilon'_{x,(c,\omega)}\,d\mu(x)$ が意味を持ち，$\overline{\omega}$ に台を持つ正の Radon 測度である。条件 (iii) より，$(N+c\varepsilon)*\mu'_{(c,\omega)} \leqq (N+c\varepsilon)*\int \varepsilon'_{x,(c,\omega)}\,d\mu(x)$ であることがわかる。一方，任意の $\overline{\omega'}\subset\omega$ なる開集合 ω' に対して，N の優越原理から，X 上 $(N+c\varepsilon)*\mu'_{(c,\omega)} \geqq (N+c\varepsilon)*\int \varepsilon'_{x,(c,\omega)}\,d\mu(x)$ であることがわかり，次に $\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ の作り方から，$(N+c\varepsilon)*\mu'_{(c,\omega)} \geqq (N+c\varepsilon)*\int \varepsilon'_{x,(c,\omega)}\,d\mu(x)$ を知る．即ち $(N+c\varepsilon)*\mu'_{(c,\omega)} = (N+c\varepsilon)*\int \varepsilon'_{x,(c,\omega)}\,d\mu(x)$ である．更に上記と同様にして，$\mu'_{(c,\omega)} = \int \varepsilon'_{x,(c,\omega)}\,d\mu(x)$ を知る．（証明終）

我々の定理における (ii) $\Rightarrow$ (iv) の証明を続けよう．$\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n = X$ を満す相対コンパクト開集合の増加列とする．$f\in M_K$ に対して，f'_{c,ω_n} を定理 4 で得られた函数とする。$s(f)\subset\omega_n$ である時 $(Nf)_n$ を Nf の ω_n への制限とする。この時

$$\|Nf+cf\|^2_{(c)} = \int ((Nf)_n+cf)\,f\,d\xi$$

$$= \frac{1}{c}\int ((Nf)_n+cf)\,\big((Nf)_n+cf-((Nf)_n+cf)'_{c,\omega_n}\big)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{c}\int |(Nf)_n+cf|^2\,(1-(\chi_{\omega_n})'_{c,\omega_n})\,d\xi + \frac{1}{2c}\iint \big((Nf)_n(x)+cf(x)$$

$$-(Nf)_n(y)-cf(y)\big)^2\,d\varepsilon'_{x,(c,\omega_n)}(y)\,d\xi(x).$$

ただし $\|\cdot\|_{(c)}$ は函数空間 $H(N+c\varepsilon)$ のノルムを表わす．故に任意の Normal contraction T に対して，

$$\varliminf_{n\to\infty}\Big\{\int |T((Nf)_n+cf)|^2\,(1-(\chi_{\omega_n})'_{c,\omega_n})\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\iint \big(T\cdot((Nf)_n+cf)(x) - T\cdot((Nf)_n+cf)(y)\big)^2\,d\varepsilon'_{x,(c,\omega_n)}(y)\,d\xi(x)\Big\}$$

$$\leqq c\,\|Nf+cf\|^2_{(c)}.$$

以上により，任意の $g \in M_K$ に対して

$$\left|\int T\cdot(Nf+cf)\,g\,d\xi\right| \leqq \|Nf+cf\|_{(c)}\cdot\|Ng+cg\|_{(c)}$$

を得る。線型汎函数

$$\{Ng+cg\,;\,g\in M_K\} \ni Ng+cg \longrightarrow \int T\cdot(Nf+cf)\,g\,d\xi$$

は $H(N+c\varepsilon)$ 上へ拡張され，この線型汎函数のノルムは $\|Nf+cf\|_{(c)}$ より小である。これから，$T\cdot(Nf+cf)\in H(N+c\varepsilon)$ かつ $\|T\cdot(Nf+cf)\|_{(c)} \leqq \|Nf+cf\|_{(c)}$ を得る。f は M_K 内で任意に動かすことが出来るから，補題4によって，T が $H(N+c\varepsilon)$ へ作用することがわかる。次に補題5より我々の結論に達する。

最後に (iii) ⇒ (i) を示そう。2つの函数 $f,\ g\in M_K$ に対して $S(f)$ 上殆んど至る所 $Nf \leqq Ng$ と仮定しよう。$|Ng-Nf|\in H(N)$，$\||Nf-Ng|\| \leqq \|Nf-Ng\|$ かつ $|Ng-Nf| = Ng+Nf-2\inf(Ng,Nf)$ に依り，

$$(Nf-\inf(Nf,Ng),\ Ng-\inf(Nf,Ng)) \leqq 0$$

を得る。即ち，$\inf(Nf,Ng)\in H(N)$ で，

$$(Nf-\inf(Nf,Ng),\ \inf(Nf,Ng)) \geqq 0.$$

故に

$$\|Nf-\inf(Nf,Ng)\|^2 \leqq 0.$$

即ち $Nf=\inf(Nf,Ng)$ を得て，X 上殆んど至る所 $Nf\leqq Ng$ となる。これは N が優越原理を満すことを意味する。上記において，$\|\cdot\|$，$(\cdot,\cdot)$ は夫々 $H(N)$ のノルム，内積を表わす。以上

で我々の定理の証明を終る。

最後に，平行移動で不変な函数空間 H へ Module contraction が作用すれば，正核を持つことを注意して置く。この証明は殆んど明らかであろう。

4. 正則合成核と特異合成核

前節で見たように対称かつ正型の合成核を考えることと，平行移動で不変な函数空間を考えることとは同値であった。我々の次の定義は合成核をそれから生成される函数空間で規制しようとするものである。

正則合成核：　対称かつ正型の合成核 N は $C_K \cap H(N)$ が $H(N)$ 内で稠密になる時，正則と呼ぶ。

特異合成核：　対称かつ正型の合成核 N は $C_0 \cap H(N) = \{0\}$ の時，特異と呼ぶ。

注意 6.　正則合成核全体及び特異合成核全体は夫々凸錐を作る。

N_1, N_2 を正則合成核とする。任意の $u \in H(N_1+N_2)$ に対して，定理 5 を用いて，ある $u_1 \in H(N_1)$, $u_2 \in H(N_2)$ が存在して，$u = u_1 + u_2$ と出来る。我々の仮定から $\{\varphi_{i,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset C_K \cap H(N_i)$ $(i=1,2)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{i,n} - u_i\|_{(i)} = 0$ と出来る。ただし $\|\cdot\|_{(i)}$ は $H(N_i)$ のノルムを表わす。$H(N_1+N_2)$ のノルムを $\|\cdot\|_{1,2}$ で表わす時，定理 5 で示した如く，$\|\varphi_{i,n} - u_i\|_{(i)} \geqq \|\varphi_{i,n} - u_i\|_{1,2}$ $(i=1,2)$ とな

る。これから函数列 $\{\varphi_{1,n}+\varphi_{2,n}\}$ が u に $H(N_1+N_2)$ 内で強収束することがわかる。即ち，N_1+N_2 も又正則になる。これから直ちに正則合成核全体は凸錐になることがわかる。同様の議論で特異核全体が凸錐になることを知る。

ここで夫々は共に漠位相では閉にならないことを注意する。

注意 7. N, N' を夫々正則合成核，特異合成核とする。この時，$H(N+N') = H(N) \oplus H(N')$.

定理 5 により，$H(N) \cap H(N') = \{0\}$ であることを示せば十分である。先ず，任意の $u \in H(N)$, $\varphi \in C_K$ に対して，$u*\varphi \in C_0 \cap H(N)$ である。なぜなら，任意の正数 δ に対し，ある $u_\delta \in C_K \cap H(N)$ が存在して，$\|u-u_\delta\| < \delta$ となるように出来る。ただし $\|\cdot\|$ は $H(N)$ のノルムである。$(\cdot,\cdot)$ で $H(N)$ の内積を表わす時

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} |u*\varphi(x)| = \overline{\lim_{x\to\infty}} |(\tau_x u, u_{\check\varphi})| \leq \overline{\lim_{x\to\infty}} \{ |(\tau_x u_\delta, u_{\check\varphi})| + \|u_{\check\varphi}\| \|\tau_x(u-u_\delta)\| \} \leq \overline{\lim_{x\to\infty}} \{ |u_\delta*\varphi(x)| + \|u_\varphi\| \|u-u_\delta\| \}$$
$$\leq \|u_\varphi\|\delta.$$

δ は任意であるから，$u*\varphi \in C_0 \cap H(N)$ である。次に任意の $u \in H(N) \cap H(N')$ と任意の $\varphi \in C_K$ に対して，$u*\varphi \in H(N) \cap H(N')$. 故に $u*\varphi = 0$，即ち $u = 0$ を得る。　　　　（証明終）

定理 8. N を優越原理を満す対称な合成核とする。この時正則合成核 N_0，特異合成核 N' が唯一通りに定まって，$N = N_0 + N'$ となる。更に N_0 は優越原理を満す。

証明. Nは正型であるから, $H(N)$ は意味を持つ. H_0を $C_K\cap H(N)$ の $H(N)$ 内での閉包とする。この時, H_0は $H(N)$ の部分空間であり, 又 X 上の平行移動で不変な函数空間である。任意の $u\in H_0$ に対して, ある函数列 $\{\varphi_n\}\subset C_K\cap H(N)$ が存在して, これが u に $H(N)$ (同じく H_0) 内で強収束するように出来る。$|\varphi_n|\in H(N)\cap C_K$ かつ $\||\varphi_n|\|\leq\|\varphi_n\|$ である(定理7参照). ただし $\|\cdot\|$ は $H(N)$ のノルムである。故に $\{|\varphi_n|\}$ は H_0 内で有界である。他方 $\{\varphi_n\}$ は殆んど至る所 X 上 u に収束すると仮定出来る。従って $\{|\varphi_n|\}$ は X 上殆んど至る所 $|u|$ へ収束する。即ち $|u|\in H_0$ かつ $\{|\varphi_n|\}$ は $|u|$ へ H_0 内で弱収束する。故に

$$\||u|\|\leq\varliminf_{n\to\infty}\||\varphi_n|\|\leqq\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|=\|u\|.$$

これは Module contraction が H_0 へ作用することを意味する。定理7より, ある優越原理を満す対称な合成核 N_0 が存在して, $H_0=H(N_0)$. 又 N_0 は明らかに正則である。

次に $C_0\cap H(N)\subset H_0$ であることがわかる。なぜなら, 任意の $u\in H(N)\cap C_0$ に対して, $u-T_{1/n}\cdot u\in C_K\cap H(N)$ (定理7参照). ただし $T_{1/n}$ は実数から閉区間 $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ への射影である。$\{T_{1/n}\cdot u\}_{n=1}^{\infty}$ は明らかに $H(N)$ 内で有界であり, 又 X 上 0 に一様収束する。従って, この函数列は 0 に弱収束, 故に強収束する。即ち $u\in H_0$ である。

$N'=N-N_0$ が正の Radon 測度であれば, 上のことから, N' は

特異合成核となる。N'が正であることを示そう。この為には任意の$f\in M_K^+$と$\varphi\in C_K^+$に対して，$(Nf-N_0f)*\varphi\geqq 0$であることを示せば十分である。$u_1=((Nf-N_0f)*\varphi)^+$，$u_2=((Nf-N_0f)*\varphi)^-$とおく。$H(N)$に Module contraction が作用することから$(u_1, u_2)\leqq 0$。ただし$(\cdot,\cdot)$は$H(N)$の内積を表わす。$0\leqq u_2\leqq N_0*f*\varphi\in C_0\cap H(N)$であるから$u_2\in C_0\cap H(N)\subset H_0$である。他方明らかに$(Nf-N_0f)*\varphi$は$H_0$の直交余空間に属す。$((Nf-N_0f)*\varphi, u_2)=0$。従って$\|u_2\|\leqq 0$。即ち$u_2=0$を得る。よって$(Nf-N_0f)*\varphi\geqq 0$となる。以上により$N=N_0+N'$の分解が成立する。

分解の唯一性は上の注意7により明らかである。（証明終）

我々はN_0, N'を夫々Nの正則成分，特異成分と呼ぶ。

次にしばらく正則合成核の優越原理を~~　~~調べる。

注意8. Nを優越原理を満す対称な合成核とする。Nが正則であることと$H(N)\cap L^2(\xi)$が$H(N)$内で稠密であることとは同値である。

Nが正則であれば上の命題が成立するのは明らかであるから，逆のみを示す。上の定理の証明にある如く$C_0\cap H(N)$が$H(N)$内で稠密であれば十分。$L^2(\xi)\cap H(N)\ni u$と$\varphi\in C_K$に対して，$u*\varphi\in C_0\cap H(N)$であるから，$C_0\cap H(N)$は$H(N)$内で稠密である。

定理9. Nを対称な合成核とする時，次の2条件は同値である。

(i) $\mathcal{N}$ は正則で優越原理を満足する。

(ii) ある次のレゾルベント等式を満す対称な合成核の族 $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ が存在して, $\lambda\to 0$ の時 N_λ は N に漠収束する。

任意の $\lambda>0$, $\mu>0$ に対して

$$N_\lambda - N_\mu = (\mu-\lambda)N_\lambda * N_\mu \quad (\text{レゾルベント等式})$$

証明. 先ず (i) $\Rightarrow$ (ii) を示そう。λ を任意の正数とする。補題7により, 任意の相対コンパクト開集合 ω に対して, $\bar{\omega}$ に台を持ち次の3条件を満す正の Radon 測度 $\varepsilon'_{\lambda,\omega}$ が唯一つ存在する。(a) 測度の意味で X 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,\omega}\leqq \mathcal{N}$. (b) ω 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,\omega}=N$ (c) $\bar{\omega}$ に台を持つ正の Radon 測度 ν が ω 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\nu\geqq \mathcal{N}$ を満せば直ちに $(\lambda N+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,\omega}\leqq(\lambda N+\varepsilon)*\nu$. $\lambda N*\varepsilon'_{\lambda,\omega}\leqq N$ により $\lambda\int d\varepsilon'_{\lambda,\omega}\leqq 1$ を得る。$(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n=X$ なる相対コンパクト開集合の増加列とする。この時測度列 $(\varepsilon'_{\lambda,\omega_n})$ は漠有界である。必要なら部分列を取ることにして, これは漠収束すると仮定出来る。極限を $\mathcal{N}_\lambda$ とする時, X 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\mathcal{N}_\lambda=\mathcal{N}$ かつ $\lambda\int dN_\lambda\leqq 1$ となる。なぜなら, $\lambda\int d\varepsilon'_{\lambda,\omega_n}\leqq 1$ かつ 任意の $\varphi\in C_K$ に対して $N*\varphi\in C_0$. このようにして得られた族 $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ がレゾルベント等式を満すことは殆んど明らかであろう。又 $\lim_{\lambda\to 0}N_\lambda=N$ も明らか.

次に (ii) $\Rightarrow$ (i) を示そう。これには次の補題が本質的である。

補題8. σ を正の Radon 測度で原点に関して対称とする。$\mathcal{N}=\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma)^n$ が測度として意味を持つものとする。ただし $(\sigma)^0=\varepsilon$

$(\sigma)^n$ は n 個の σ の合成を表わす．この時 N は優越原理を満す．

まずこの補題の証明から始めよう。定理3と同様にして $\int d\sigma \leqq 1$ を得る。もし $\int d\sigma < 1$ ならば，任意の $\varphi \in C_K$ に対して，$N*\varphi \in L^2(\xi)$．

$$N*\varphi*\check{\varphi}(0) = (\varepsilon-\sigma)*(N*\varphi)*(\widecheck{N*\varphi})(0)$$

$$= \left(1-\int d\sigma\right)\int |N*\varphi|^2 d\xi + \frac{1}{2}\iint (N*\varphi(x+y) - N*\varphi(x))^2 d\sigma(y)\, d\xi(x) \geqq 0.$$

故に N は正型となる。故に $H(N)$ が意味を持つ。$\|\cdot\|$ で $H(N)$ のノルムを表わそう．任意の Normal contraction T に対して，

$$\left(1-\int d\sigma\right)\int |T\cdot N*\varphi|^2 d\xi + \frac{1}{2}\iint (T\cdot N*\varphi(x+y) - T\cdot N*\varphi(x))^2 d\sigma(y)\, d\xi(x)$$

$$\leqq \|N*\varphi\|^2.$$

任意の $\psi \in C_K$ に対して，上の不等式から

$$\left|\int T\cdot(N*\varphi)(x)\psi(x)\, d\xi(x)\right| \leqq \|N*\varphi\|\cdot\|N*\psi\|$$

を得る。線型汎函数

$$\{N*\psi;\ \psi \in C_K\} \ni N*\psi \to \int T\cdot(N*\varphi)(x)\psi(x)\, d\xi(x)$$

は $H(N)$ まで拡張され，そのノルムは $\|N*\varphi\|$ より小である．従ってこれまで度々用いた議論を用いて，$T\cdot(N*\varphi) \in H(N)$ かつ $\|T\cdot(N*\varphi)\| \leqq \|N*\varphi\|$ を得る。補題5より，T が $H(N)$ へ作用することがわかる。T は任意であるから，N は優越原理を満す．一般の場合，$a<1$ かつ $a \to 1$ の時 $N_a = \sum_{n=0}^{\infty}(a\sigma)^n$ は N に漠収束する。上の議論から全ての Normal contraction が $H(N_a)$ へ作用する．補題6より，全ての Normal contraction が $H(N)$ へ作

用する。即ち N は優越原理を満す。

さて (ii) ⇒ (i) を証明しよう。$\mu > \lambda$ なる任意の λ, μ に対して、レゾルベント等式より

$$(\varepsilon - (\mu-\lambda)N_\mu) * (\varepsilon + (\mu-\lambda)N_\lambda) = \varepsilon.$$

これから $\sum_{n=0}^{\infty}((\mu-\lambda)N_\mu)^n$ が意味を持つことがわかる。従って $(\mu-\lambda)\int dN_\mu \leq 1$. $\lambda \to 0$ として、$\mu\int dN_\mu \leqq 1$ を得る。$\mu > \lambda > 0$ に対して、$\int dN_\lambda < +\infty$ 及び上の等式から

$$N_\lambda + \frac{1}{\mu-\lambda}\varepsilon = \frac{1}{\mu-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}((\mu-\lambda)N_\mu)^n$$

を得る。上の補題を用い、次に $\mu \to \infty$ とすることにより、N_λ が優越原理を満すことがわかる。次に補題6に依り N は優越原理を満す。即ち $H(N)$ が意味を持つ。任意の $f \in M_K$ に対して $N_\lambda f = N(f - \lambda N_\lambda f)$ により、$N_\lambda f \in H(N)$ かつ $\lambda \to 0$ の時、$(N_\lambda f)$ は Nf に $H(N)$ 内で強収束する。他方、$\lambda > 0$ に対して、$\int dN_\lambda < +\infty$. 故に、任意の $\varphi \in C_K$ に対して $N_\lambda * \varphi \in C_0$. 従って、$C_0 \cap H(N)$ は $H(N)$ 内で稠密である。即ち N は正則である。

上の $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ は唯一つである。これを N に関するレゾルベントと言う。

Dirichlet 核： 対称かつ正型の合成核 N は正則かつ N から生成された函数空間 $H(N)$ に全ての Normal contraction が作用し、$H(N) \cap C_K$ が C_K 内でも稠密になる時、N は Dirichlet 核と呼ばれ又 $H(N)$ は特殊 Dirichlet 空間と言われる。

負型函数： 以下用いるものが X の共役群 $\hat{X}$ 上の負型函数

であるから$\hat{X}$上で定義を与える。$\hat{X}$上の複素数値連続函数ψが負型であるとは次の2条件を満す場合である。

(i) $\psi(\hat{0}) \geqq 0$, $\psi(\hat{x}) = \overline{\psi(-\hat{x})}$.

(ii) 任意の正整数n, 任意のn個の点$(\hat{x}_i)_{i=1}^{n}$, 任意の$\sum_{i=1}^{n}\rho_i=0$なるn個の複素数$(\rho_i)_{i=1}^{n}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\psi(\hat{x}_i-\hat{x}_j)\,\rho_i\overline{\rho_j} \leqq 0.$$

殆んど明らかに負型函数が実数値であれば非負であることがわかる。我々の議論の対象は実数値の場合に限る。

補題9. ψを$\hat{X}$上の負型函数とする。この時任意の正数tに対して$e^{-t\psi}$は正型である。

証明. 先ず, 任意の正整数nと$\hat{X}$内の任意のn個の点$(\hat{x}_i)_{i=1}^{n}$に対して正方行列

$$\left(\psi(\hat{x}_i) - \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)\right)_{\substack{i=1,\cdots,n\\ j=1,\cdots,n}}$$

は正型である。これは$\hat{x}_{n+1}=\hat{0}$, 又任意のn個の複素数$(\rho_i)_{i=1}^{n}$に対し, $-\sum_{i=1}^{n}\rho_i=\rho_{n+1}$とし, $(\hat{x}_i)_{i=1}^{n+1}$及び$(\rho_i)_{i=1}^{n+1}$に対して(ii)を計算することから得られる。正型行列A, Bに対して$A\cdot B$も又正型になることを用いれば$e^{-t\psi}$が正型となることは見易い。

定理10. 合成核NがDirichlet核である為の必要かつ十分な条件は逆数が$\hat{X}$上局所可積分である実数値負型函数ψが存在して, NのFourier変換$\hat{N}$が$\frac{1}{\psi}$となることである。

証明. 先ず N を Dirichlet 核とする. $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ を N に関するレゾルベントとする時, $\hat{X}$ 上至る所 $\hat{N}_\lambda(\hat{x})>0$ であることがわかる。レゾルベント等式に依り, 任意の $\lambda>0$, $\mu>0$ に対して $\{\hat{x}\in\hat{X};\ \hat{N}_\lambda(\hat{x})=0\} = \{\hat{x}\in\hat{X};\ \hat{N}_\mu(\hat{x})=0\}$ であり, 又任意の $\varphi\in C_K^+$ に対して $\lambda\to\infty$ の時 $\lambda N*N_\lambda*\varphi$ は $N*\varphi$ へ各コンパクト集合上で一様収束する. $C_K\cap H(N)$ は C_K 内で稠密であるから, $\lambda\to\infty$ の時 (λN_λ) は ε に漠収束する. 更に $\lambda\int dN_\lambda\leqq 1$ であることに注意すれば, $\lambda\to\infty$ の時 $\lambda\hat{N}_\lambda$ は 1 へ収束することがわかる。これから, $\hat{X}$ 上至る所 $\hat{N}_\lambda(x)>0$ であることがわかる。再びレゾルベント等式に着目する時, 任意の $\lambda>0$ に対して $\frac{1}{\lambda N+\varepsilon}$ は意味を持ち $(1-\lambda\hat{N}_\lambda)$ に等しい. これから直ちに $\frac{1}{\hat{N}}$ が意味を持ち, $\frac{1-\lambda\hat{N}_\lambda}{\lambda\hat{N}_\lambda}$ に等しい. 即ち $\frac{1}{\hat{N}}$ は実数値連続函数である。他方 $\frac{1}{\hat{N}+\frac{1}{\lambda}}=\lambda(1-\lambda\hat{N}_\lambda)$ は $\hat{X}$ 上の実数値負型函数であり, 更に $\lambda\to\infty$ の時, これは $\frac{1}{\hat{N}}$ へ各コンパクト集合上で一様収束するから, $\psi=\frac{1}{\hat{N}}$ は負型函数である。次に一般化された Fourier 変換の意味で $\hat{N}=\frac{1}{\psi}$ であるから $\frac{1}{\psi}$ は局所可積分である。

逆を証明しよう. 任意の $\lambda>0$ に対して

$$\frac{1}{\psi+\lambda}=\int_0^\infty e^{-t\psi}e^{-\lambda t}\,dt$$

が成立するから, 補題 9 を用いて $\frac{1}{\psi+\lambda}$ は正型である。従ってある正の Radon 測度 N_λ が存在して, $\hat{N}_\lambda=\frac{1}{\psi+\lambda}$ を満す。$\psi(0)\geqq 0$

により $\lambda\int dN_\lambda \leqq 1$．任意の正数 λ, μ に対して

$$\frac{1}{\psi+\lambda}-\frac{1}{\psi+\mu}=\frac{\mu-\lambda}{(\psi+\lambda)(\psi+\mu)}$$

により，族 $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ はレゾルベントになる。而も $\lambda\to 0$ の時 N_λ が N に漠収束することは明らかであろう．故に定理9より N は正則かつ優越原理を満足する．任意の $x\in X$ に対して $N \neq N*\varepsilon_x$ は殆んど明らかである．従って次の2つの補題が成立すれば我々の定理の証明は終る。

補題10. μ を X 上の実Radon測度とし，任意の $\varphi\in C_K$ に対して，$\mu*\varphi$ は有界とする．次に σ を全測度1なる X 上の正のRadon測度とし，$\mu=\mu*\sigma$ であるとする。その時 $p(\mu)\supset s(\sigma)$ である．

補題10の証。任意の $\varphi\in C_K$ に対して $\mu*\varphi$ の周期全体が $s(\sigma)$ を含むことを言えば十分である．明らかに $\mu*\varphi$ は X 上一様連続となる。x_0 を $s(\sigma)$ の任意の点とし，$a_{x_0}=\sup_{x\in X}(\mu*\varphi(x)-\mu*\varphi*\varepsilon_{x_0}(x))$ とおく．この時ある点列 $\{x_n\}\subset X$ で $\mu*\varphi(x_n)-\mu*\varphi*\varepsilon_{x_0}(x_n)$ が増加して a_{x_0} に収束するものが取れる．$f_n(x)=\mu*\varphi(x_n-x)-\mu*\varphi*\varepsilon_{x_0}(x_n-x)$ とおく時，$f_n=f_n*\sigma$ かつ $\{f_n\}$ は正規族である．$\{f_n\}$ 内で広義一様する部分列を取り，その極限を f とすれば，$f(0)=a_{x_0}$ かつ $f=f*\sigma$ を満す．$f\leqq a_{x_0}$ であるから，$f(x)=a_{x_0}$ が任意の $-x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} s((\sigma)^n)$ について成立する．$a_{x_0}\neq 0$ とする。この時 $a_{x_0}>0$ として一般性を失わない。任意の n に対して，ある正整数 $k(n)$ が定まり，任意の $k\geqq k(n)$ に対

して,

$$\mu*\varphi(x_k - nx_0) - \mu*\varphi(x_k - (n+1)x_0) \geq \frac{1}{2}a_{x_0}$$

となる。ただし $\mu*\varphi*\varepsilon_{x_0}(x_k - nx_0) = \mu*\varphi(x_k-(n+1)x_0)$ であることを注意する。従って,任意の n に対して, $k \geq \max(k(1),\cdots,k(n))$ とすれば,

$$\mu*\varphi(x_k) - \mu*\varphi(x_k - nx_0) \geq \frac{1}{2}na_{x_0}$$

を得る。これは $\mu*\varphi$ が有界であることに反す。故に $a_{x_0}=0$。同様に $\inf_{x\in X}(\mu*\varphi(x) - \mu*\varphi*\varepsilon_{x_0}(x)) = 0$ を得る。(証明終)

補題11. N を正則かつ優越原理を満足する核とする。この時,次の2命題は同価である。

(i) N は Dirichlet 核である。

(ii) $p(N) = \{0\}$ である。

補題11の証. (i) ⇒ (ii) は殆んど明らかであるから (ii) ⇒ (i) を示す。N は0でない。V を原点に関して対称な原点のコンパクト近傍とする。又 $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ を原点に関して対称な相対コンパクト開集合の増加列で $\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n = X$ かつ $\omega_1 \supset V$ を満すものとする。N の掃散原理から $\overline{\omega_n \cap CV}$ に台を持つ原点に関して対称な正の Radon 測度 ε_n' が存在して,次の3条件を満足する。(a) X 上 $N \geq N*\varepsilon_n'$ (b) $\omega_n \cap CV$ 上 $N = N*\varepsilon_n'$. (c) $\int d\varepsilon_n' \leq 1$。条件 (c) より $(\varepsilon_n')_{n=1}^{\infty}$ の部分列である正の Radon 測度 ε_V' へ漠収束するものがある。$\int d\varepsilon_n' \leq 1$ かつ任意の $\varphi \in C_K$ に対して $N*\varphi \in C_0$ より, X

上 $N \geq N*\varepsilon'_V$ かつ CV 上 $N = N*\varepsilon'_V$ を満す。先ず $\int d\varepsilon'_V < 1$ なら $N \neq N*\varepsilon'_V$ であることがわかる。又 $\int d\varepsilon'_V = 1$ の時も，上の補題及び $p(N)=\{0\}$ より $N*\varepsilon'_V \neq N$ が知られる。又任意の $\varphi \in C_K$ に対して，$N*(\varepsilon-\varepsilon'_V)*\varphi$ は $H(N)$ に属す。これから $C_K \cap H(N)$ が C_K 内で稠密であることを知る。　　（証明終）

上の補題から次の概念が導入されるのは自然である。

凝 Dirichlet 核：対称な合成核 N が凝 Dirichlet 核であるとはある X のコンパクト部分群 X_N とある X/X_N 上の Dirichlet 核 $\tilde{N}$ が存在して，N は $\tilde{N}$ の X への自然な延長である。

補題11と同様に次の定理を得る。

定理11. $N(\neq 0)$ を対称な合成核とする。この時次の命題は同値である。

(i)　N は正則で優越原理を満足する。

(ii)　N は凝 Dirichlet 核である。

証明. 先ず (i) ⇒ (ii) を示そう。$p(N) = X_N$ とおく時，X_N は明らかに X の閉部分群であり，又任意の $\varphi \in C_K$ に対して，$N*\varphi \in C_0$ であることから，X_N はコンパクトである。明らかに X/X_N 上に対称な合成核 $\tilde{N}$ が存在して，N が $\tilde{N}$ の X への自然な延長となるように出来る。全ての Normal contraction が $H(N)$ に作用することより，同じことが $H(\tilde{N})$ についても成立する。$p(\tilde{N}) = \{0\}$ より $\tilde{N}$ は X/X_N 上の Dirichlet 核である。

次に(ii)⇒(i)を示そう。仮定によりあるコンパクト部分群X_NとX/X_N上のDirichlet核$\tilde{N}$が存在して，Nが$\tilde{N}$のXへの自然な延長となるように取れる。$\tilde{N}$に関するレゾルベント$(\tilde{N}_\lambda)_{\lambda>0}$が存在する。次に$(\tilde{N}_\lambda)_{\lambda>0}$の各元を$X$へ自然に延長して，$N$に関するレゾルベントの存在を知る。（証明終）

注意9．Xのコンパクト部分群が$\{0\}$以外ない場合，Dirichlet核と凝Dirichlet核とは一致する。

補題12．凝Dirichlet核Nの台はXの閉部分群である。

証明．定理9及び定理11より，Nに関するレゾルベント$(N_\lambda)_{\lambda>0}$が存在する。度々用いた議論から，任意の$\lambda>0$に対して

$$N+\frac{1}{\lambda}\varepsilon=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda N_\lambda)^n$$

である。故に$s(N+\frac{1}{\lambda}\varepsilon)$は$X$の閉部分群である。他方$N$は正型かつ$N\neq 0$に依り，$s(N)\ni 0$．故に$s(N)$は$X$の閉部分群である。

上の議論で，任意のλに対して，レゾルベント等式から$s(N)=s(N_\lambda)$を得る。

定理12．Nを対称な合成核とする。この時次の2命題は同値である。

(i) Nは優越原理を満足する。

(ii) $N=N_0+N'$．ただしN_0は凝Dirichlet核又は0，N'は優越原理を満足する特異合成核で$p(N')\supset s(N_0)$．

先ず次の補題から証明する。

補題 13. N を優越原理を満す対称な合成核とし，N_0, N' を夫々 N の正則成分，特異成分とする。この時，任意の正数 c に対して，$N+c\varepsilon$ の正則成分，特異成分は夫々 $N_0+c\varepsilon$, N' である。

$N_0+c\varepsilon$ が正則であるから，この証明は明らか。

始めに簡単であるから (ii) ⇒ (i) を示そう．$(N_\lambda)_{\lambda>0}$ を N_0 に関するレゾルベントとする。(ii) の仮定のもとに，任意の $\lambda>0$ に対して Module contraction が $H(N_\lambda+N')$ へ作用することを示せば十分である（補題 6 参照）。補題 1 及び上の補題から，$N_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(\sigma)^n$ の場合示せば十分である。ただし，σ は原点に関して対称な正の Radon 測度で，$\int d\sigma < 1$ を満す。$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{(0)}$, $\|\cdot\|_{(1)}$ を夫々 $H(N)$, $H(N_0)$, $H(N')$ のノルムを表わすとする。補題 5 により，任意の $\varphi \in C_K$ に対して，$|N*\varphi| \in H(N)$ かつ $\||N*\varphi|\| \leqq \|N*\varphi\|$ を示せば十分である。$u = |N*\varphi| - |N'*\varphi|$ とおく時，$|u| \leqq |N_0*\varphi| \in C_0 \cap L^2(\xi)$ で，任意の x, y に対して

$$|u(x)-u(y)| \leqq |N_0*\varphi(x) - N_0*\varphi(y)| + 2\,|N'*\varphi(x) - N'*\varphi(y)|.$$

更に

$$(\varepsilon-\sigma)*u*\check{u}(0) = (1-\textstyle\int d\sigma)\int |u|^2 d\xi + \frac{1}{2}\iint |u(x+y)-u(y)|^2 d\sigma(y)\,d\xi(x)$$

$$\leqq (1-\textstyle\int d\sigma)\int |u|^2 d\xi + \frac{1}{2}\iint (|N_0*\varphi(x+y)-N_0*\varphi(x)| + 2\,|N'*\varphi(x+y)-N'*\varphi(x)|)^2 d\sigma(y)\,d\xi(x).$$

そこで $\int |N'*\varphi(x+y) - N'*\varphi(x)|\,d\sigma(y) = 0$ であるから，

$$(\varepsilon-\sigma)*u*\check{u}(0) \leqq (1-\textstyle\int d\sigma)\int |N_0*\varphi|^2 d\xi + \frac{1}{2}\iint |N_0*\varphi(x+y)-N_0*\varphi(x)|^2 d\sigma(y)\,d\xi(x)$$

を得る。$(\varepsilon-\sigma)*N_0=\varepsilon$ に注意し，更に線型汎函数

$$\{N_0*\psi;\ \psi\in C_K\}\ni N_0*\psi \longrightarrow \int u\psi\, d\xi$$

を考え，今迄度々用いた議論と同様にして，$u\in H(N_0)$ かつ $\|u\|_{(0)}\leqq\|N_0*\varphi\|_{(0)}$ を得る。一方 N' の優越原理から $|N'*\varphi|\in H(N')$ かつ $\||N'*\varphi|\|_{(1)}\leqq\|N'*\varphi\|_{(1)}$. 従って $|N*\varphi|=(|N*\varphi|-|N'*\varphi|)+|N'*\varphi|$ は $H(N)$ に属し，かつ.

$$\||N*\varphi|\|\leqq\|(|N*\varphi|-|N'*\varphi|)\|+\||N'*\varphi|\|$$
$$=\|(|N*\varphi|-|N'*\varphi|)\|_{(0)}+\||N'*\varphi|\|_{(1)}\leqq\|N_0*\varphi\|_{(0)}+\|N'*\varphi\|_{(1)}$$
$$=\|N*\varphi\|.$$

従って (ii)⇒(i) の証明を終る。

次に (i)⇒(ii) を証明しよう。定理9より $N=N_0+N'$ に一意に分解される。ただし N_0 は凝Dirichlet 核又は0であり，N' は特異合成核である。最初に $p(N')\supset s(N_0)$ を示そう。勿論 $N_0\neq 0$ として十分である。$(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n=X$ なる原点に関して対称な相対コンパクト開集合の増加列とする。任意の $\lambda>0$ に対して，$\overline{\omega_n}$ に台を持ち，全測度 $\leqq 1/\lambda$ なる原点に関して対称な正の Radon 測度 $\varepsilon'_{\lambda,n}$ が唯1つ存在して，次の3条件を満す。(a) X 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,n}\leqq N$. (b) ω 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,n}=N$. (c) $\overline{\omega_n}$ に台を持つ正の Radon測度 ν に対して，ω_n 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\nu\geqq N$ ならば直ちに X 上 $(\lambda N+\varepsilon)*\nu\geqq(\lambda N+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,n}$. 任意の φ に対して $(\lambda N+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,n}*\varphi$ は $n\to\infty$ の時 $N*\varphi$ へ $H(\lambda N+\varepsilon)$ 内で強収束

する。上の補題を用いて $(\lambda N_0+\varepsilon)*\varepsilon'_{\lambda,n}*\varphi$, $\lambda N'*\varepsilon'_{\lambda,n}*\varphi$ は夫々
$n\to\infty$ の時 $N_0*\varphi$, $N'*\varphi$ へ $H(\lambda N+\varepsilon)$ 内で強収束する。これ
から直ちに測度列 $(\varepsilon'_{\lambda,n})_{n=1}^{\infty}$ は N_λ に漠収束することがわかる。
ただし $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ は N_0 に関するレゾルベントである。$N_0 \neq 0$ によ
り $N_\lambda \neq 0$。N' が正型であるので、任意の $\varphi\in C_K^+$ に対して

$$0=\lim_{n\to\infty} N'*(\varepsilon-\lambda\varepsilon'_{\lambda,n})*\varphi*\check{\varphi}(0) \geqq \lim_{n\to\infty} N'*((\lambda\textstyle\int d\varepsilon'_{\lambda,n})\varepsilon-\lambda\varepsilon'_{\lambda,n})*\varphi*\check{\varphi}(0)$$
$$\geqq N'*((\lambda\textstyle\int dN_\lambda)\varepsilon-\lambda N_\lambda)*\varphi*\check{\varphi}(0)\geqq 0.$$

従って、任意の $\psi\in C_K^+$ に対して

$$N'*((\lambda\textstyle\int dN_\lambda)\varepsilon-\lambda N_\lambda)*\varphi*\psi(0)=0$$

即ち $N'*((\lambda\int dN_\lambda)\varepsilon-\lambda N_\lambda)*\varphi=0$. $N_\lambda\neq 0$ 及び補題10によ
り $p(N'*\varphi)\supset s(N_\lambda)$. φ の任意性より $p(N')\supset s(N_\lambda)=s(N_0)$.

次に N' が優越原理を満足することを示そう。この為に次の
2つの場合に分けて議論する。

[1]. $s(N_0)$ がコンパクトでない場合.

この時 $u\in H(N)$ が $H(N')$ に属すための必要かつ十分な条
件は $p(u)\supset s(N_0)$ であることがわかる。C_K の元との合成を考
えることにより u は連続且つ有界として十分である。$u\in H(N')$
なら、任意の $\varphi\in C_K$ に対して、$p(N*\varphi)\supset s(N_0)$ により $p(u)\supset s(N_0)$
である。逆に $p(u)\supset s(N_0)$ とする。ある $u_1\in H(N_0)$, $u_2\in H(N')$
が存在して、$u=u_1+u_2$ と出来る。任意の $\varphi\in C_K$ に対して、
$p(u*\varphi)\supset s(N_0)$, $p(u_2*\varphi)\supset s(N_0)$ 且つ $\lim_{x\to\infty} u_1*\varphi(x)=0$. 従って

$u_1 = 0$. 即ち $u \in H(N')$. 以上に依り, 任意の $u \in H(N')$ に対して, $|u| \in H(N')$ を知る。$\||u|\|_{(1)} = \||u|\| \leqq \|u\| = \|u\|_{(1)}$ を得るから, $H(N')$ へ Module contraction が作用する。即ち N' は優越原理を満足する。

[2] $S(N_0)$ がコンパクトの場合.

一般に成立する次の補題から示す.

補題14. N を優越原理を満す対称な合成核とする。この時, 任意の正数 c に対して, $N + c\xi$ は完全最大値原理を満足する。

補題14の証. N に対する優越原理, 完全最大値は同値であったことを先ず注意する。補題1により $N - c'\varepsilon$ が正かつ正型の場合示せば十分である。ただし c' は正数. 掃散に関する定理と同様にして, 任意の相対コンパクト開集合 ω に対して, $\bar{\omega}$ に台を持つ $g_\omega \in M_K^+$ で次の2条件を満すものが唯1つ存在する. (a) X 上殆んど至る所 $Ng_\omega \leqq 1$. (b) ω 上殆んど至る所 $Ng_\omega = 1$. さて, $\varphi, \psi \in C_K^+$ に対して, $S(\varphi)$ 上 $N*\varphi \leqq N*\psi$ とする。$\omega = \{x \in X ; \varphi(x) > 0\}$ に対して, g_ω を作る。この時,

$$\int \varphi\, d\xi = \int Ng_\omega \varphi\, d\xi = \int N*\varphi\, g_\omega\, d\xi \leqq \int N*\psi\, g_\omega\, d\xi$$
$$= \int Ng_\omega \psi\, d\xi \leqq \int \psi\, d\xi.$$

さて, 次に $N + c\xi$ が完全最大値原理を満すことを示そう。$\varphi, \psi \in C_K^+$ に対して, $(N + c\xi) * \varphi \leqq (N + c\xi) * \psi + 1$ が $S(\varphi)$ 上成立したとする。$(N + c\xi) * \varphi = N * \varphi + c\int \varphi\, d\xi$ であるから, も

し，$c\int\psi d\xi+1 \geqq c\int\varphi d\xi$ ならば，N の完全最大値の原理から，$(N+c\xi)*\varphi \leqq (N+c\xi)*\psi+1$ が全空間で成立する。逆に，$c\int\varphi d\xi > c\int\psi d\xi+1$ の時，仮定の不等式より $\check{N}*\varphi < N*\psi$ が $S(\varphi)$ 上成立する。これより $c\int\varphi d\xi \leqq c\int\psi d\xi$ を得て，矛盾を導く。又 $N+c\xi$ の特異成分は明らかに $N'+c\xi$ である。（証明終）

補題15. N を優越原理を満す対称な合成核とする。その正則成分 N_0 の台がコンパクトであると仮定する。この時次の命題が成立する。

$\varphi, \psi \in C_K^+$ に対して，$N*\varphi \leqq N'*\psi$ が $S(\varphi)$ 上成立すれば，同不等式が X 上成立する。ただし N' は N の特異成分である。

補題15の証 ある $\varphi, \psi\ (\neq 0) \in C_K^+$ が存在して，次の性質を持っているとしよう。$N*\varphi \leqq N'*\psi$ が $S(\varphi)$ 上成立し，$N'*\psi - N*\varphi$ が負の値を取る点がある。上の補題から $N'*\psi$ は至る所 >0 と仮定出来る。上の性質からある正数 $a>1$ と X 内のある点 x_0 が存在して

$$N'*\psi(x_0) - aN*\varphi(x_0) = \min_{x\in X}\left(N'*\psi(x) - aN*\varphi(x)\right) < 0$$

と出来る。なぜなら，$S(N_0*\varphi)$ はコンパクトであり，又 N の優越原理から，$N*\varphi \leqq N*\psi < aN*\psi$ が全空間で成立するから。

$$\omega = \{x\in X;\ aN'*\psi(x) > N*\varphi(x)\}$$

とおき，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n = \omega$ なる相対コンパクト開集合列 $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る。$\varepsilon'_{0,n}$ を（N' に関する）ε_{x_0} の ω_n への掃散分布とする。この時

$$\int (N'*\psi - aN*\varphi)\, d(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon'_{0,n}) \leq N'*\psi(x_0) - aN*\varphi(x_0) < 0.$$

一方，$C\omega$ がコンパクトであるから，上で行った議論と同様

$$\lim_{n\to\infty} \int (N'*\psi - N'*\varphi)\, d(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon'_{0,n}) = 0.$$

又 $\omega \supset s(\varphi)$ により

$$\lim_{n\to\infty} \int N_0*\varphi\, d(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon'_{0,n}) = 0.$$

これから矛盾が出て，我々の結論を得る。　　　　（証明終）

さて，我々の定理にもどろう。勿論 N_0 が Dirichlet核，$N' \neq 0$ の場合示せば十分である。N' の優越原理には次の命題を示せば十分である。

$f, g, \varphi \in C_K^+$ に対して，$s(f*\varphi)$ 上 $N'*(f*\varphi) < N'*(g*\varphi)$ であれば，X 上至る所 $N'*(f*\varphi) \leq N'*(g*\varphi)$ である。

先ず，任意の原点の相対コンパクト近傍 V に対して，

$$N'*\varphi*\check{\varphi}(0) = \sup_{x\in CV} N'*\varphi*\check{\varphi}(x)$$

である。なぜなら，$N'*\varphi*\check{\varphi}(0) > \sup_{x\in CV} N'*\varphi*\check{\varphi}(x)$ となる原点の相対コンパクト近傍 V が存在したとしよう。T を実数から閉区間 $[0, \sup_{CV} N'*\varphi*\check{\varphi}(x)]$ への射影とする時，CV 上 $N'*\varphi*\check{\varphi} = T\cdot(N'*\varphi*\check{\varphi})$ を得る。即ち $N'*\varphi*\check{\varphi} - T\cdot(N'*\varphi*\check{\varphi}) \in H(N_0)$.

$$\|T\cdot(N'*\varphi*\check{\varphi})\|^2 = \|N'*\varphi*\check{\varphi} - (N'*\varphi*\check{\varphi} - T\cdot(N*\varphi*\check{\varphi}))\|^2$$

$$= \|N'*\varphi*\check{\varphi}\|^2 + \|N'*\varphi*\check{\varphi} - T\cdot(N*\varphi*\check{\varphi})\|^2 < \|N'*\varphi*\check{\varphi}\|^2$$

となり，N' が優越原理を満すことに反す。

次に $\inf_{x\in s(f*\varphi)} (N'*(g*\varphi)(x) - N'*(f*\varphi)(x)) = a$, $\mathrm{Max}((N'*f*\check{f}(0))^{\frac{1}{2}},$

$(N' * g * \check{g}(0))^{\frac{1}{2}}) = b$ とおく。又 $N' * \varphi * \check{\varphi}(0) = 1$ と仮定出来る。正整数 n を $\frac{1}{n} \max_{x \in X} N_0 * (f * \varphi)(x) < a$ となるように取り，次に正数 η を $6bn\eta < a - \frac{1}{n}(\max_{x \in X} N_0 * (f * \varphi)(x))$ となるように取る。上で得た結果及び $s(N_0 * (f * \varphi))$ がコンパクトであることに注意して，$x_0 \in X$ を $N' * \varphi * \check{\varphi}(0) - N' * \varphi * \check{\varphi}(x_0) < \eta^2$ かつ $s(N_0 * (f * \varphi)) \cap s(\tau_{x_0} N_0 * (f * \varphi)) = \phi$ となるように取る。この時，任意の正整数 m に対して，N' の正型を用い，

$$|N' * \varphi * \check{\varphi}(mx_0) - N' * \varphi * \check{\varphi}((m-1)x_0)|$$
$$\leqq \sqrt{2}\,(N' * \varphi * \check{\varphi}(0))^{1/2}(N' * \varphi * \check{\varphi}(0) - N' * \varphi * \check{\varphi}(x_0))^{1/2} < 2\eta$$

を得る。同様にして，任意の $x \in X$ に対して，

$$|N' * (f * \varphi)(mx_0 + x) - N' * (f * \varphi)(x)|^2$$
$$\leqq (N' * f * \check{f}(0))(N' * \varphi * \check{\varphi}(0) - N' * \varphi * \check{\varphi}(mx_0)) < 4mb^2\eta^2 \leqq (2mb\eta)^2$$

同様な方法で，任意の $x \in X$ に対し，

$$|N' * (g * \varphi)(mx_0 + x) - N' * (g * \varphi)(x)| < 2mb\eta$$

を得る。任意の $x \in \bigcup_{m=0}^{\infty} S(\tau_{mx_0}(f * \varphi))$ に対して，$x = mx_0 + y$ とおける。ただし $0 \leqq m \leqq n-1$，$y \in s(f * \varphi)$．故に

$$N' * (g * \varphi)(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} N_0 * (\tau_{kx_0}(f * \varphi))(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} N' * (\tau_{kx_0}(f * \varphi))(x)$$
$$\geqq N' * (g * \varphi)(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} N' * (f * \varphi)(x + kx_0) - \frac{1}{n}\max_{z \in X} N_0 * (f * \varphi)(z)$$
$$\geqq N' * (g * \varphi)(y) - N' * (f * \varphi)(y) - 2bm\eta - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2b(m+k)\eta - \frac{1}{n}\max_{z \in X} N_0 * (f * \varphi)(z)$$
$$\geqq N' * (g * \varphi)(y) - N' * (f * \varphi)(y) - 6bn\eta - \frac{1}{n}\max_{z \in X} N_0 * (f * \varphi)(z)$$
$$\geqq N' * (g * \varphi)(y) - N' * (f * \varphi)(y) - a \geqq 0.$$

上の補題を用いて，X 上至る所

$$N'*(g*\varphi)(x) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} N*(\tau_{kx_0}(f*\varphi))(x) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} N'*(\tau_{kx_0}(f*\varphi))(x)$$

$$\geq N'*(f*\varphi)(x) - \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\varepsilon\eta = N'*(f*\varphi)(x) - 2(n-1)\varepsilon\eta .$$

ここで $\eta \downarrow 0$ として，$N'*(g*\varphi) \geq N'*(f*\varphi)$ が X 上成立する。

（証明終）

系．N_0，N' を夫々正則合成核，特異合成核とする．$s(N_0)=X$ かつ N_0+N' が優越原理を満せば，N' は常に定数である。

証明は殆んど明らか

又 $s(N_0)\neq X$ の時　定数でない特異合成核 N' で，N_0+N' が優越原理を満すものが存在する。結論的に，次の問題が解ければ，対称な合成核の優越原理は Dirichlet 核で全て整理出来る。

問題．優越原理を満し，週期を持たない特異合成核が存在するか？　又存在する時，Dirichlet 核から特徴付けられるか

次の問題としては Dirichlet 核を全て決定する問題になる。例えば X が n 次元ユークリッド空間の時，負型函数の Levy-Khinchine 分解から，Dirichlet核 N は次のように特徴付けられる。

任意の $\varphi\in C_K$ に対して $\lim_{x\to\infty} N*\varphi(x)=0$ となる 0 でない合成核で，ある非負定数 c，実定数係数の 2 階楕円型，自己共役の微分作用素 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$，$\int_{|x|>0}\frac{|x|^2}{1+|x|^2}d\sigma(x)<+\infty$ なる原点に関して対称な $R^n-\{0\}$ 上の正の Radon 測度 σ が存在して，

$$\left(c\varepsilon - \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j} - \mathrm{pf.}(\sigma)\right) * N = \varepsilon$$

を満す。ただし Pf.(σ)は σの有限積分部分である。

又コンパクトアーベル群上のDirichlet核についてもある特徴付けが得られている(C. Berg).

5. Haar測度に関して絶対連続なDirichlet核.

前節で対称な合成核に対する優越原理，掃散の研究には，ほぼDirichlet核で十分であろうとの結論に達した。この何年間かの主に日本のポテンシャリストの研究の傾向として，核を下半連続又は広義連続として，連続性の原理を基礎におくのが通常であったように思われる。この妥当性の1つの根拠を示そう。

定理13. N を X 上の Dirichlet 核とし，ξ に関して絶対連続と仮定する。この時，N の ξ に関する密度函数 G を次のように選べる。G は X 上の下半連続函数で，G を函数合成核として，通常の連続性の原理を満足する。

函数合成核 G が通常の連続性の原理を満すとは，台がコンパクトであるどの Radon 測度 μ に対して，$G\mu(x) = \int G(x-y)d\mu(y)$ の $s(\mu)$ への制限が，そこの函数として連続なら，$G\mu$ は X 上連続となる場合である。

定理13の証明に用いる次の補題から示そう。

補題16. N を X 上の Dirichlet 核とし，ξ に関して絶対連続とする。その1つの密度函数を G としよう。この時，任意の

正数 a に対し、$\inf(G, a) \in H(N)$ かつ任意の $u \geq 0 \in H(N)$ に対して、$(\inf(G, a), u) \geq 0$, $\|\inf(G, a)\|^2 \leq a$. ただし $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ は夫々 $H(N)$ の内積、ノルムを表わす。

補題16の証. 任意の $f \in M_K^+$ に対して、$\inf(G*f, a) \in H(N)$ は全ての Normal contraction が $H(N)$ へ作用することから得られる。度々用いた議論から、任意の正数 c と任意の相対コンパクト開集合 ω に対して、次の (i), (ii) を満す $g_\omega \in M_K^+$ が只一つ存在する。(i) X 上殆んど至る所 $Ng_\omega + cg_\omega \leq \inf(Nf, a)$. (ii) ω 上殆んど至る所 $Ng_\omega + cg_\omega = \inf(Nf, a)$. $\omega \uparrow X$ の時, $Ng_\omega + cg_\omega$ は $\inf(Nf, a)$ へ $H(N+c\varepsilon)$ 内で強収束する。従って, $u \geq 0 \in H(N) \subset H(N+c\varepsilon)$ に対して,

$$(\inf(Nf, a), u)_{(c)} = \lim_{\omega \uparrow X} (Ng_\omega + cg_\omega, u)_{(c)}$$
$$= \lim_{\omega \uparrow X} \int u g_\omega \, d\xi \geq 0.$$

更に c は任意であるから, $(\inf(Nf, a), u) \geq 0$ を得る。従って, $(\inf(Nf, a), Nf) \geq \|\inf(Nf, a)\|^2$. 即ち $\|\inf(Nf, a)\|^2 \leq a\int f \, d\xi$ を得る。ここで $\int f_n \, d\xi = 1$ かつ $s(f_n) \downarrow \{0\}$ $(n \to \infty)$ なる M_K^+ 内の函数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を選ぶ時, $\inf(Nf_n, a)$ は X 上殆んど至る所 $\inf(G, a)$ へ収束する故, $\inf(G, a) \in H(N)$ かつ $(\inf(Nf_n, a))$ は $n \to \infty$ の時 $\inf(G, a)$ へ $H(N)$ 内で弱収束する。即ち $\|\inf(G, a)\|^2 \leq a$ を得る。 (証明終)

補題17. N, G, a は全て上の補題と同じとする。この時

任意の $f \in M_K$ に対して，$\{\inf(G, n) * f\}_{n=1}^{\infty}$ は Nf へ $H(N)$ 内で強収束する。

補題16より殆んど明らかであろう。

定理13の証．ξ に関する N の1つの密度函数を G' とする。2つの正整数 m, n に対して

$$G_{m,n}(x) = (\inf(G', m),\ \tau_x \inf(G', n))$$

とおく．この時，$G_{m,n}$ は有限連続である。補題16より，$m' \geqq m$ かつ $n' \geqq n$ に対して，$G_{m',n'} \geqq G_{m,n}$。$G_m(x) = \lim_{n\to\infty} G_{m,n}(x)$，$G(x) = \lim_{m\to\infty} G_m(x)$ とおく．この時，G_m は下半連続，故に G が下半連続となる。次に任意の $f \in M_K$ に対して，

$$\int G_m(x) f(x)\, d\xi(x) = \lim_{n\to\infty} (\inf(G', m),\ \inf(G', n) * f)$$

$$= (\inf(G', m),\ Nf) = \int \inf(G', m) f\, d\xi.$$

故に $G_m = \inf(G', m)$ が X 上殆んど至る所成立，即ち X 上殆んど至る所 $G = G'$ を得て，G も又 N の密度函数であることがわかる。

補題18．G を上の証明におけるものとする。台がコンパクトの正の Radon測度 μ に対して，$\iint G(x-y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) < +\infty$ とする。この時，$G\mu \in H(N)$ かつ $G\mu \leqq \max_{x \in S(\mu)} G\mu(x)$。

線型汎函数 $\{Nf;\ f \in M_K\} \ni Nf \longrightarrow \int G\mu f\, d\xi$ を考える時．度々用いた議論から，$G\mu \in H(N)$ を得．$(G_{n,n}\mu,\ G\mu) = \int G_{n,n}\mu\, d\mu$ により，$\|G\mu\|^2 = \int G\mu\, d\mu$ を得る。$\inf(G\mu,\ \max_{x \in S(\mu)} G\mu(x)) = G\mu$ を

得ることも殆んど明らかであろう。

さて我々の定理の証明を続けよう。台がコンパクトの正のRadon測度μに対して，$G\mu$の$s(\mu)$への制限がそこの函数として有限連続とする。$G\mu \in H(N)$は上の補題から得られる。任意のnに対して，$G_{n,n}\mu \in H(N)$かつ任意の$u \geq 0 \in H(N)$に対して，$(G_{n,n}\mu, u) \geq 0$．$G_{n,n}\mu$は有界連続かつ$n \uparrow +\infty$の時，各点で$G_{n,n}\mu \uparrow G\mu$を得る。$G_{n,n}\mu$は$n \to \infty$の時$G\mu$へ$S(\mu)$上一様収束する。$a_n = \max_{x \in S(\mu)} (G\mu(x) - G_{n,n}\mu(x))$とおく時，完全最大値原理から，$X$上$G\mu \leq G_{n,n}\mu + a_n$が成立する。即ち$(G_{n,n}\mu)$は$X$上$G\mu$へ一様収束する。故に$G\mu$は$X$上有限連続である。

(証明終)

連続性の原理を論じる際，これまで通常，広義連続核が対象であった。上の定理でGは広義連続ではないかとの疑問が起る．しかしこれは一般には正しくない。

例．$n\,(\geq 3)$次元ユークリッド空間R^nにおいて，μは台がコンパクト，$\int d\mu = 1$なる正のRadon測度で，そのNewtonポテンシャルが有界かつR^n全体では連続でないものとする。次にGをそのFourier変換が$\dfrac{1}{1+|x|^2}$となる広義連続函数とする。$G*(\mu+\check{\mu})$はR^n全体では広義連続ではない。この時，$\sum_{n=0}^{\infty} (G)^{n+1} * (\hat{\mu})^n$はDirichlet核で，広義連続でない．ただし$\hat{\mu} = \frac{1}{2}(\mu+\check{\mu})$．広義連続でないことは殆んど明らかであるから

$\sum_{n=0}^{\infty}(G)^{n+1} * (\tilde{\mu})^n$ が Dirichlet 核であることを示そう。これは

$$\widehat{\sum_{n=0}^{\infty}(G)^{n+1} * (\tilde{\mu})^n}(x) = \frac{1}{|x|^2+1-\hat{\tilde{\mu}}(x)}$$

より得られる。

完

参考文献

[1]. N. Aronszajn, K. Smith: Characterisations of positive reproducing kernels, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 611 - 622.

[2]. C. Berg: Suites définies négatives et espaces de Dirichlet sur la sphère, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, p. 778 - 780.

[3]. A. Beurling, J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 45, 1959, p. 208 - 215.

[4]. G. Choquet, J. Deny: Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 799 - 801.

[5]. ———— : Aspects linéaires de la théorie du potentiel III, ibid, p. 4260 - 4262.

[6]. J. Deny: Théorie de la capacité dans l'espace fonctionnel, Sém. Brelot-CHoquet-Deny (Théorie du potentiel), 1964/65, n° 1, 13p.

[7]. —— : Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. 15, 1965, p. 259 - 271.

[8]. —— : Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, C. I. M. E., 1969, (Potential theory).

[9]. C. Herz: Théorie élémentaire des distributions de Beurling, Pub. Sém. Math. d'Orsay, 1964/65.

[10]. Kh. Harzallah: Fonctions opérant sur les fonctions définie-négatives, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. 17, 1967, p. 443 - 468.

[11]. M. Itô: Sur la régularité des noyaux de Dirichlet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, p. 867 - 868.

[12]. — : Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., t. 44, (to appear).

[13]. — : Les noyaux de convolution réguliers et les noyaux de convolution singuliers, ibid.

[14]. — : Les noyaux réguliers et noyaux singuliers II, (to appear).