数理解析研究所講究録
147巻 1972年 130-138

エルゴード理論に於るら旋の展開 についての一注意

東北大 理 島野 岳

(I) 最近 [1]に於て、Kolmogorov 系の時間変更の研究に確率過程論に於る Martingale 理論の手法が導入された。

本稿では その一つの結果である確率空間上の二乗可積分函数の Martingale 積分に依る展開定理について一つの注意を与える。

今 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を 完備な確率空間で $L^2(\Omega)$ は可分なるものとする。Ω 上の可逆な保測変換の一径数群 $(\theta_t)_{t\in R}$ が flow であるとは 条件

ユニタリ作用素の一径数群 $(T_t)_{t\in R}$;

$$(T_t f)(\omega) \equiv f \circ \theta_t^{-1}(\omega) \quad , f \in L^2(\Omega)$$

が 強連続 (L^2-ノルムの意味で)

を満すこととする。

$(\mathfrak{F}_t)_{t\in R}$ は $\mathfrak{F}$ の 部分 σ-代数の増大列で

$$\mathfrak{F} = \bigvee_t \mathfrak{F}_t \quad , \quad \mathfrak{F}_{-\infty} \equiv \bigcap_t \mathfrak{F}_t \ , \ \text{trivial}$$

なるものとする。 且つ $(\mathfrak{F}_t)_{t\in R}$ は条件

f が $\mathfrak{F}_s$-可測ならば $T_t f$ は $\mathfrak{F}_{s+t}$-可測となる

を満すものとする。

この時 $\{(\theta_t)_{t\in R}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in R}\}$ は Kolmogorov 系、又は純非決定的であると言われる。

明らかに $(\mathfrak{F}_t)_{t\in R}$ は右側及び左側に連続、即ち

$$\mathfrak{F}_t = \bigvee_{s<t} \mathfrak{F}_s \quad , \quad \mathfrak{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$$

である。 以下、 $\{(\theta_t), (\mathfrak{F}_t)\}$ は Kolmogorov 系とする。

定義 1. 過程 $(Z_t)_{t\in R}$ が $\{(\theta_t), (\mathfrak{F}_t)\}$ に関して直交増分を持つ<u>ら旋</u>(helix) であるとは、各 t について $Z_t \in L^2(\Omega)$ で且つ条件

(1) $Z_0 = 0$

(2) $\forall s, t \in R$, $s<t$ ならば $Z_t - Z_s$ は $\mathfrak{F}_t$-可測.

(3) $\forall s, t \in R$, $s<t$ ならば $Z_t - Z_s \in L^2(\mathfrak{F}_s)^{\perp}$ ($L^2(\Omega)$ のえで $\mathfrak{F}_s$-可測なる閉部分空間の直交補空間)

(4) $\forall s, t, h \in R$, $\quad Z_{t+h} - Z_{s+h} = T_h(Z_t - Z_s)$

を満すことである。

この定義から直ちに各 $s \in R$ に対して $(Z_{t+s} - Z_s)_{t\in R_+}$ は $(\mathfrak{F}_{t+s})_{t\in R_+}$ についての二乗可積分 <u>martingale</u> である。且つ

$$\| Z_{t+s} - Z_s \|^2 = k|t| \quad (k \text{ は正の常数})$$

である。 $k=1$ の時 $Z \equiv (Z_t)_{t\in R}$ は正規化されていると言

われる。

次に、直交増分を持つら旋の集合 $\mathfrak{H}$ に

$$(Z, Z') \equiv E[Z_1 Z'_1] \quad , \quad Z, Z' \in \mathfrak{H}$$

に依って内積を導入し $\mathfrak{H}$ を Hilbert 空間とみる。今 $\mathfrak{H}_Z$ を $\{Z_t - Z_s \ , t, s \in R\}$ から生成される線形閉部分空間（$L^2(\Omega)$ の）とすると次の定理が成り立つ。

（Stone-von Neumann の定理） $\mathfrak{H}$ の内積の意味で互いに直交する（正規化された）直交増分を持つら旋の列 $\{Z^n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{(Z^n_t)_{t\in R}\}_{n=1}^{\infty}$ があって

$$L^2(\Omega) = \mathbb{C} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \, \mathfrak{H}_{Z^n}$$

と書ける。ここに $\mathbb{C}$ は常数函数のなす閉部分空間である。

定義2. 過程 $(A_t)_{t\in R}$ が増加ら旋であるとは、条件

(1) $A_0 = 0$, $P(\omega : A_\cdot(\omega) \neq 0) > 0$

(2) $\forall s, t \in R$ $s < t$ ならば $A_t - A_s$ は $\mathfrak{F}_t$-可測

(3) $\forall s, t, h \in R$. $A_{t+h} - A_{s+h} = (A_t - A_s) \circ \theta_h^{-1}$

先の直交増分を持ったら旋とこの増加ら旋との間には次の関係がある。これは、martingale 理論での二乗可積分~~函数なる~~ martingale の Doob 分解に対応するものである。

（分解定理） $Z = (Z_t)_{t\in R}$ を直交成分を持つら旋とする。その時可積分且つ predictable な増加ら旋 $(A_t)_{t\in R}$ が（一意に）存在して 各 s について

$$[(Z_{s+t} - Z_s)^2 - (A_{s+t} - A_s)]_{t \in R_+}$$

は $(\mathfrak{F}_{s+t})_{t \geq 0}$ に関し <u>martingale</u> となる。 $\langle Z, Z \rangle_t \equiv A_t$ とかく。

更に増加ら旋には次の性質がある。

(*Radon-Nikodym* の定理) $A=(A_t)$, $B=(B_t)$ を増加ら旋とする。今 a.s. $\omega \in \Omega$ に対して R 上の測度として $dB_\cdot(\omega)$ が $dA_\cdot(\omega)$ に関して絶対連続ならば、非負で $\mathfrak{F}_0$-可測なる確率変数 u が存在して a.s. $\omega \in \Omega$ に対し、

$$B_t(\omega) = \int_0^t u \circ \theta_s^{-1}(\omega)\, dA_s(\omega) \qquad -\infty < t < \infty$$

とかける。

次に直交増分を持つら旋の空間 $\mathfrak{Z}$ に先の直交性よりも強い狭義の直交性を定義する。今二つの $Z, Z' \in \mathfrak{Z}$ に対して

$$\langle Z, Z' \rangle \equiv \frac{1}{2}\left(\langle Z+Z', Z+Z' \rangle - \langle Z, Z \rangle - \langle Z', Z' \rangle\right)$$

とおき、 $\langle Z, Z' \rangle = 0$ 即ち各 t について $\langle Z, Z' \rangle_t = 0$ なる時 Z, Z' は狭義に直交すると言う。分解定理から $\langle Z, Z' \rangle = 0$ であるとは $(Z_t Z'_t)_{t \geq 0}$ が <u>martingale</u> なることと同値である。即ち $E[Z_t Z'_t] = E[Z_1 Z'_1] = 0$。故に狭義直交ならば直交する。

$\{(Z^n)\}_{n=1}^{\infty}$ (有限族ならばそれ以外は 0 を考えて) を互いに狭義に直交する(正規化された)直交増分を持つら旋~~の系~~の集合の最大元とする。その時、次の定理が成り立つ。

定理　任意の直交増分を持つら旋 Z に対して、各 $\mathfrak{F}_0$-可測変数の列 $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$ で各 t に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\int_0^t (u^n)^2 \circ \theta_s^{-1}\, d\langle Z^n, Z^n \rangle_s\right] < \infty$$

なるものが存在し、$t \in R_+$ に対し

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t u^n \circ \theta_s^{-1} \, dZ_s^n$$

とかける。この性質を持つ列 $\{Z^n\}$ を直交増分を持つら旋の基と呼ぶ。

定理の積分の意味は <u>*martingale*</u> に関する確率積分に対応するものである。以下その定義を与える。但しここでは必要とするだけに制限したものを記す。

定義3. Z を直交成分を持ったら旋、u を $\mathcal{B}_0$-可測で各 t について

$$E\left[\int_0^t u^2 \circ \theta_s^{-1} \, d\langle Z, Z \rangle_s \right] < \infty$$

なるものとする。その時次の性質を持つ直交増分を持つら旋 $U \cdot Z$ が一意に定まる。: 任意の $Z' \in \mathcal{Z}$ に対し

$$\langle U \cdot Z, Z' \rangle_t = \int_0^t u \circ \theta_s^{-1} \, d\langle Z, Z' \rangle_s \quad .$$

この $U \cdot Z$ を $\int_0^t u \circ \theta_s^{-1} \, dZ_s$ とかく。

系. $X \in L^2(\Omega)$ は次の表現を持つ.

$$X = c + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \circ \theta_s^{-1} \, dZ_s^n$$

ここに c は常数. また

$$\|X\|_2^2 = c^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x^n)^2 \circ \theta_s^{-1} \, d\langle Z^n, Z^n \rangle_s \right]$$

である.

(II) 以上が [1] に依るものである。ここではこの定理が次の形で成立することを注意する。系についても同様のことが言える。

定理　次の性質を持つ直交増分を持つら旋の基 $\{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。：任意の直交増分を持つら旋 Z に対して、各 $\mathfrak{F}_0$-可測なる確率変数の列 $\{v^n\}_{n=1}^{\infty}$ で各 t に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\int_0^t (v^n)^2 \circ \theta_s^{-1} d\langle Y^n, Y^n\rangle\right] < \infty$$

なるものが存在し、

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t v^n \circ \theta_s^{-1} dY_s^n$$

且つ a.s. $\omega \in \Omega$ に対して R_+ 上の測度として

$$d\langle Y^1, Y^1\rangle_{t(\omega)} \succ d\langle Y^2, Y^2\rangle_{t(\omega)} \succ \cdots\cdots \succ d\langle Y^n, Y^n\rangle_t \succ d\langle Y^{n+1}, Y^{n+1}\rangle_t \succ \cdots$$

である。ここに $\succ$ は右が左に関して絶対連続なることを示す。

この証明のために次の補題を要する。

補題　$\{Z^n\}_{n=1}^{\infty}$ を互いに狭義直交なる直交~~義~~増分を持つら旋とし

$$Z_t^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} Z_t^n \longrightarrow Z_t^{(\infty)} \quad (n \to \infty)$$

とする。（各 t について L^2-ノルムの意味で。それ故 Z^{∞} も再び直交増分を持つら旋となる。）その時各 t に対し

$$\langle Z^{(\infty)}, Z^{(\infty)}\rangle_t = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Z^n, Z^n\rangle_t \quad \text{a.s.}$$

証明．今 $\sum_{n=1}^{\infty} \langle Z^n, Z^n\rangle_t$ の Cauchy 列を考えると分解定理から

$$(1) \qquad E\left[\left|\sum_{n=k}^{l} \langle Z^n, Z^n\rangle_t\right|\right] = E\left[\sum_{n=k}^{l} (Z_t^n)^2\right]$$

条件から $n \to \infty$ とすると (1) で

$$E\left[\left(\sum_{n=k}^{l} (Z_t^n)\right)^2\right] = E\left[\sum_{n=k}^{l} (Z_t^n)^2\right] + E\left[\sum_{i \neq j} Z_t^i Z_t^j\right]$$

$$= E\left[\sum_{n=k}^{l}(Z_t^n)^2\right]$$

より右辺は0に収束する。即ち $\sum_{n=1}^{\infty}\langle Z^n, Z^n\rangle_t$ は L^1-ノルムの意味で収束、更に明らかに

$$\sum_{n=1}^{N}\langle Z^n, Z^n\rangle_t \quad \left(=\langle Z^{(N)}, Z^{(N)}\rangle\right)$$

は単調増加列故、$\sum_{n=1}^{\infty}\langle Z^n, Z^n\rangle_t$ は a.s. 収束である。

$$E\left[(Z_t^0)^2 - \sum_{n=1}^{N}(Z_t^n)^2\right] = E\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}(Z_t^n)^2\right]$$
$$= E\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}\langle Z^n, Z^n\rangle_t\right] \quad ..$$

（定理の証明）$\{Z^n\}_{n=1}^{\infty}$ を(I)の定理のものとする。今各tで

$$Z_t^0 \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n/2}}Z_t^n$$

とおくと、補題から

$$\langle Z^0, Z^0\rangle_t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\langle Z^n, Z^n\rangle_t \qquad \text{a.s.}$$

故に a.s. $\omega\in\Omega$ に対して各 $d\langle Z^n, Z^n\rangle_t$ は $d\langle Z^0, Z^0\rangle_t$ に関して絶対連続となる。故に Radon-Nikodym の定理から各 $\mathfrak{F}_0$-可測な $\{\varphi^n\}$ が存在し

$$\langle Z^n, Z^n\rangle_t = \int_0^t \varphi^n\circ\theta_s^{-1}\, d\langle Z^0, Z^0\rangle$$

今 φ^n の定義されていない ω に対しては $\varphi^n(\omega)=0$ とおく、故に φ^n は Ω 上すべて定義されることになる。二重帰納法により次の集合列を定める。

$$A_n \equiv \{\omega : \varphi^n(\omega) \neq 0\}$$

$$m \leq n \qquad A_{11} \equiv A_1 \quad , \quad A_{1n} \equiv A_n - \bigcup_{\nu=1}^{n-1}A_\nu$$

$$A_{mm} \equiv A_m - \bigcup_{\mu=1}^{m-1}A_{\mu m}$$

$$A_{mn} \equiv A_n - \bigcup_{\mu=1}^{m-1} A_{\mu n} - \bigcup_{\nu=m}^{n-1} A_{m\nu} \qquad (m<n)$$

作り方から明らかに各nに対して $\{A_{mn}\}_{m=1}^{n}$ は互いに素で

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{n} A_{mn} .$$

これに対し

$$Y_t^m \equiv \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t 1_{A_{mn}} \circ \theta_s^{-1} dZ_s^n$$

とおく。この $\{Y^m\}$ が求めるものであることを示す。

(i) $\{Y^m\}$ は互いに狭義に直交する。

∵ $m > m'$ とすると、補題と確率積分の性質から

$$\langle Y^{m'}, Y^m \rangle_t = \langle \sum_{n=m'}^{m} \frac{1}{n} \int_0^t A_{m'n} \circ \theta_s^{-1} dZ_s^n , Y^m \rangle$$
$$+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^t 1_{A_{mn}} 1_{A_{m'n}} \circ \theta_s^{-1} d\langle Z^n, Z^n \rangle_s = 0$$

(ii) 基であること。

今 $v^n \equiv n u^n$ とおく。

$$\sum_{m=1}^{n} \int_0^t 1_{A_{mn}} \circ \theta_s \, dZ_s^n = \int_0^t 1_{\bigcup_{m=1}^{n} A_{mn}} \circ \theta_s \, dZ_s^n$$
$$= \int_0^t dZ_s^n = Z_t$$

であり、Z_t は定理から

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t u^n \circ \theta_s^{-1} dZ_s^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} \int_0^t v^n \cdot 1_{A_{mn}} \circ \theta_s^{-1} dZ_s^n$$

これは $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t v^n \circ \theta_s \, dY_s^m$ に等しい。

何故ならば

$$\langle Z_{\cancel{t}}, Z^n \rangle_t = \int_0^t u^n \circ \theta_s^{-1} d\langle Z^n, Z^n \rangle_s$$

$$\left\langle \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\cdot} v^n\circ\theta_s^{-1}\,dY_s^m\,,Z^n\right\rangle_t=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t v^n\circ\theta_s^{-1}\,d\langle Y^m,Z^n\rangle_s$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t (v^n\circ\theta_s^{-1})\cdot\frac{1}{n}\,d\langle Z^n,Z^n\rangle_s$$

（直交性と補題から）

故に (Z^n) の最大えであることから等しくなる。

(iii) 絶対連続性について

$$\psi_m(\omega)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}\varphi^n & ,\ \omega\in A_{mn}\ :\ n=m,m+1,\cdots\\ 0 & ,\ \omega\notin\bigcup_{n=m}^{\infty}A_{mn}\end{cases}$$

とおくと

$$\langle Y^m,Y^m\rangle_t=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^t 1_{A_{mn}}\circ\theta_s^{-1}\,d\langle Z^n,Z^n\rangle_s$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^t 1_{A_{mn}}\cdot\varphi^n\circ\theta_s^{-1}\,d\langle Z^0,Z^0\rangle_s$$

$$=\int_0^t \psi_m\cdot\theta_s^{-1}\,d\langle Z^0,Z^0\rangle_s$$

また

$$\bigcup_{n=m}^{\infty}A_{mn}=\bigcup_{n=m}^{\infty}\left(A_n-\bigcup_{\mu=1}^{m-1}A_{\mu n}\right)$$

$$\supset\bigcup_{n=m+1}^{\infty}\left(A_n-\bigcup_{\mu=1}^{m}A_{\mu n}\right)=\bigcup_{n=m+1}^{\infty}A_{m+1\,n}$$

一方 $\omega\notin\bigcup_{n=m}^{\infty}A_{mn}$ に限り $\psi_m(\omega)=0$ 故 この時 $\psi_{m+1}(\omega)=0$

故に $d\langle Y^{m+1},Y^{m+1}\rangle_t$ は $d\langle Y^m,Y^m\rangle_t$ に関して絶対連続。

文献

[1] J. de Sam Lazaro et P.A. Meyer, Méthodes de martingales et théorie des flots Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 18 (1971)