数理解析研究所講究録
147巻 1972年 66-81

RANDOM WALKS

阪大 理　渡辺 毅

§1. 序

D. S. Ornstein の論文[1]について紹介する。紹介というよりも原論文を読むための手引きといったつもりで，標準的でないものでも記号は原論文のまま用いる。

Random walk の状態空間 E は，d-次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ または d-次元整数点の空間 $\mathbb{Z}^d$ である。もっと一般に局所コンパクト Abel 群 G を考えることもある。E 上の random walk とは E に値を取る独立同分布の確率変数の部分和 $(S_n)_{n\geq 0}$ のことである。独立確率変数の和の理論は確率論の歴史と共に古いものであるが，絶えず確率論の新らしい研究テーマを提供してきた。最近の一つの重要な研究テーマとして，random walk $(S_n)_{n\geq 0}$ が時間的に一様な Markov 過程の特別なクラスであることに着目し，その到達確率やポテンシャル核の特性を調べることがあげられる。このような研究方向は，F. Spitzer が

50年代の半ばからの一連の研究（その大部分は [2] にまとめられている）において $E=\underset{\sim}{Z}^d$ の場合に体系的理論をつくり上げたことによって確立した。Spitzer の理論は従来から知られたきた吸収問題，Erdös-Feller-Pollard の再生定理，Chung-Erdös の再帰性判定条件の拡張あるいは改良ばかりでなく，新らしい型の極限定理（複数）~~X~~や再帰 walk のポテンシャル核に関する結果を含んでいる。

Ornstein の論文の目的はつぎの２点である。

(1) Spitzer の理論を $\underset{\sim}{R}^1$ 上の random walk に拡張する。

(2) Combinatorial method による統一的な取扱いを与えていること。

Radom walk の研究に Fourier 解析が有効であることはよく知られており Spitzer の方法も Fourier 解析に負うところが多い。Port-Stone [3] は Spitzer の方法が $E=\underset{\sim}{R}^1$ や $E=G$ の場合にも拡張できることを示した。Ornstein は Fourier 解析を全く用いないで combinatorial method による新らしい証明を与えたのである。大雑把に言って，

combinatorial method ＝ 原始的ポテンシャル論

であり，これは random walk 以外の Markov 鎖 への拡張の可能性を含むものである。この点から見て，Ornstein の論文は今後も十分研究の余地があると思われる。特に再帰 walk

の研究において Ornstein が導入した "Schema de remplissage" の方法は一般の再帰 Markov 鎖の研究の有力な方法であることが知られてきている（Meyer [4], [5]）が，そのポテンシャル論的把握はなお十分とは思われない．

記号および用語

- 状態空間 E は実数空間 $\underset{\sim}{R} = (-\infty, \infty)$ である．
- u, v etc. は $\underset{\sim}{R}$ 上の確率測度を表わす．
- $(X_n)_{n\geq 1}$ は互に独立で，分布 u の実確率変数列．
- $S_n = x + X_1 + \cdots + X_n$ （$S_0 = x$）は x から出発する random walk を意味する．S_n において出発点 x を明示しないが，その代り基本測度に出発点を添字として書く．$\underset{\sim}{P}^x(\cdot)$ は x から出発する $(S_n)_{n\geq 0}$ の基本測度を表わす．
- 関数 f，測度 v （いずれも $\underset{\sim}{R}$ 上の）に対し
$$Tv = u * v, \quad Tf = u * f, \quad (* \text{ は合成積}).$$
すなわち T は u による合成積作用素である．
- $$u^{(n)} = u * \cdots * u \quad (n \text{ 回})$$
- φ_A は集合 A の定義関数，$\overline{\varphi}_A$ は φ_A による積作用素，すなわち関数または測度を集合 A に制限する作用素である：$\overline{\varphi}_A f = f$ on A, $= 0$ on $\underset{\sim}{R} \setminus A$.
$\overline{\varphi}_A v(B) = v(A \cap B)$.

- $\psi_A' = 1 - \psi_A = \psi_{\mathbb{R}\setminus A}$. $\overline{\psi}_A'$ の意味も上と同様.
- $\tilde{f}(x) = f(-x)$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ を $\int f$, $v(A)$ を $\int_A v$ とも表わす.
また $\int f \cdot v$ は $\int_{\mathbb{R}} f(x) v(dx)$ である.
- δ_x は $\{x\}$ における単位測度.
- $T_A := \inf\{n \geq 0 ; S_n \in A\}$ は集合 A への到達時間である. x から出発する walk についての S_{T_A} の分布 ρ_x^A を調和測度という. その combinatorial な表示は

$$\rho_x^A(B) = \int_B \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\psi}_A (T\overline{\psi}_A')^i \delta_x$$

で与えられる. $A \cap B = \phi$ の時, ($\underset{\sim}{P}^x$ の下で) B より先に A に達する確率を $h_x(A, B)$ と書く. 明らかに

$$h_x(A, B) = \rho_x^{A \cup B}(A)$$

である.

- S_n が $n \geq 1$ で B に達する前に A を訪問する平均回数を $H_x(A, B)$ で表わす. 確率論的表示と combinatorial 表示はそれぞれ,

$$H_x(A, B) = \underset{\sim}{E}^x\Big[\sum_{n < T_B'} \psi_A \circ S_n\Big]$$

$$= \int_A \sum_{i=0}^{\infty} (\overline{\psi}_B' T)^i \delta_x ,$$

ここで $T_B' = \inf\{n \geq 1 ; S_n \in B\}$, $\cancel{T_A}$

・ u が算術的であるとは，u がある $\delta>0$ の整数倍の上に全測度をもつことである。

・ u が非算術的とする。I は有限区間を表わす。そのとき $\sum_{n\geq 0} u^n(I)$ は (a) すべての I に対して無限大であるか，(b) すべての I に対して有限であるかのいずれかである。(a)の時 u，あるいは対応する random walk (S_n) は再帰的，(b)のとき非再帰的であるという。

§2. 調和測度に関する極限定理(*)

以下全体を通して，u が非算術的であることを仮定する。

定理 1 A, B を有界 Borel 集合で $A\cap B=\phi$ とする。その時

$$(2.1)\qquad \int_t^{t+1} h_x(A,B)\,dx$$

は $t\to+\infty$, $t\to-\infty$ において極限をもつ。

この定理の証明において基本的な役割を果す次の補題は興味深い。

補題(**) 有限区間 I，実数 a，$\varepsilon>0$ が与えられた時，番号 n, k が存在し

(*) [1] の §1 および §2.

(**) [1] の §0, T7 (p.11).

$$(2.2) \qquad \int | u^{(n)} * \psi_I - u^{(n+k)} * \psi_{I+a} | < \varepsilon .$$

これは I 上の一様分布から出発した random walk の時刻 n における分布と，I+a 上の一様分布で出発した walk の n+k における分布が十分近いことを意味している．u の絶対連続部分が 0 でない時には，(2.2) よりも強い

$$(2.3) \qquad \lim_{n\to\infty} \int | u^{(n)} * (\delta_0 - \delta_a) | = 0$$

という関係が示される．これは異なる2点から出発した random walk が長時間の後には殆んど同じ分布にしたがうことを意味している．

A ⊃ B とする．定理1によって

$$(2.4) \qquad L^A(B) = \lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \rho_x^A(B)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} h_x(B, A \setminus B)\,dx$$

が存在する．$\int_t^{t+1} \rho_x^A(\cdot)\,dx$ は絶対連続な測度であるから，Vitali-Hahn-Saks の定理によって $L^A(\cdot)$ も絶対連続な測度になる．すなわち

系　任意の有界集合 A に対し，A 上の絶対連続な測度 L^A が存在して，(2.4) を満す．

A, B に制限をつけると $h_x(A, B)$ の極限の存在が証明される．

定理 2　A, B が有限区間（閉，開，半開いずれでもよい）で $A \cap B = \phi$ とする．この時

(2.5)　$$\lim_{x \to \infty} h_x(A, B) \quad \text{および} \quad \lim_{x \to -\infty} h_x(A, B)$$

が存在する．

系　A が有限区間ならば，ρ_x^A は $x \to \infty$ のとき (2.4) で定義される測度 L^A に漸収束する．

定理 1，2 の双対として次の定理が示される．

定理 3　A, B が有限区間ならば，次の各極限が存在しすべて有限である．

(a)　$$\lim_{y \to \infty} H_x(B+y, A), \quad \lim_{y \to -\infty} H_x(B+y, A),$$

(b)　$$\lim_{y \to \infty} H_y(B, A), \quad \lim_{y \to -\infty} H_y(B, A).$$

注意　u が非再帰的ならば，上の結果は $A = \phi$ の場合にも成り立つ．これは Feller-Orey の再生定理（Feller [6], Chap. XI, § 9）に他ならない．

§ 3. 再帰的な walk のポテンシャル核 (*)

この節ではつぎの2つの仮定をおく．

(*)　[1] の § 3 および § 5.

(3.1)　u は再帰的である．

(3.2)　u が 0 でない絶対連続部分をもつ．

次の定理は u が非再帰的な場合の Feller−Orey の再生定理(*)の再帰的 walk における類似である．

定理 4　f が有界な台をもつ有界関数であって，$\int f = 0$ をみたすとする．このとき

(a) $\sum_{i=1}^{n} T^i f$ はある極限関数 $\bar{f}$ に有界収束する．

(b) $\lim_{x\to\infty} \bar{f}(x)$ および $\lim_{x\to-\infty} \bar{f}(x)$ が存在し，これらの値は

$$(3.3)\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \bar{f}(x) = \pm \frac{\int x f}{\int x^2 u},$$

で与えられる．

(*) この定理はつぎのように述べられる．f が有界な台をもつ有界関数ならば，u が非再帰的であることから

(a) $\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T^i f(x)$ が存在するが，さらに

(b) $\lim_{x\to\infty} \bar{f}(x)$，$\lim_{x\to-\infty} \bar{f}(x)$ が存在し，

(c) $\int x u$ が存在して，>0 ならば $\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \bar{f}(x) = \dfrac{\int f}{\int x u} \\ \lim_{x\to-\infty} \bar{f}(x) = 0 \end{cases}$,

$\int x u$ が存在しないときは，$\lim_{x\to\pm\infty} \bar{f}(x) = 0$.

命題(a)がエルゴード定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}T^i f(x)}{\sum_{i=1}^{n}T^i g(x)}=\frac{\int f}{\int g}\qquad (f,\ g>0) \tag{3.4}$$

を含むものであることに注意しておく。

Ornstein は (a) の証明の第1段階として次の Lemma を証明している。

<u>補題</u>　I が有限区間とする。f は I に台をもち、$|f|\leq 1$, $\int f=0$ なる関数とする。この時 $B>0$ が存在して

$$\left|\sum_{i=1}^{n}T^i f(x)\right|<B,\quad {}^\forall n,\ {}^\forall x \tag{3.5}$$

である。この B は f に無関係に選ぶことができる。

Ornstein はこの Lemma の証明において、彼と Chacon がエルゴード定理の証明で用いた論法を適用している。

$f=f^+-f^-=r-h$ に対し、$(r_n,\ l_n)_{n\geq 1}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{cases} r_1=r, & l_1=0, \\ r_n=Tr_{n-1}-l_n, & l_n=Tr_{n-1}\wedge\left(h-\sum_{i=1}^{n-1}l_i\right). \end{cases}$$

この時

(1)　$r_n\geq 0$, $l_n\geq 0$.

(2)　$\sum_{n=1}^{\infty}r_n$ は局所積分可能である。

(3)　$\sum_{i=1}^{\infty}l_i=h$ a.e.

(4) $\sum_{i=1}^{\infty} r_i$ は a.e. 有界である。

これから

$$\sum_{i=1}^{n} T^i f^+ = \sum_{i=1}^{n+1} r_i(x) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n-i} T^j \ell_i\right)(x)$$
$$< \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x) + \sum_{i=1}^{n} T^i h(x),$$

したがって、$\sum_{i=1}^{n} T^i f$ は上に a.e. 有界である。$-f$ に同様の議論を行うことによって $\sum_{i=1}^{n} T^i f$ が下に a.e. 有界なことも示される。$\left|\sum_{i=1}^{n} T^i f(x)\right|$ がすべての x に対して有界であること、その bound が f に無関係に選べることは比較的簡単に示される。

次のポテンシャル核と Poisson 方程式に関する結果をまとめておく。

定理 5

(3.6) $\quad \ell_n = C_n \cdot dx - \sum_{i=0}^{n} u^{(i)}, \qquad C_n = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} u^{(i)}$

とおく。一般に測度 v の絶対連続部分の密度関数を v'' と表わす。

(a) $\ell_n''(x) = C_n - \left(\sum_{i=0}^{n} u^{(i)}\right)''$ は $n \to \infty$ のときある極限関数 $\ell_\infty(x)$ に局所 (L^1) 収束する。

(b) $L_{\pm\infty} = \lim_{x \to \pm\infty} \int_x^{x+1} \ell_\infty(x)\, dx$ が存在し、$-\infty \leq L_{\pm\infty} < \infty$ である。さらにつぎのいずれかである。(i) $L_{+\infty} = L_{-\infty} = -\infty$, (ii) $L_{+\infty}$, $L_{-\infty}$ の一方が有限で残りが $-\infty$。

(c) l_n はある Radon 測度 l に収束する.(任意の有界 Borel 集合 B に対し $l_n(B)\to l(B)$ という意味で.) あきらかに $l''(x)=l_\infty(x)$.

(d) r は有界な台をもつ非負有界関数とする. このとき $g=l*r$ は下に有界な関数で, Poisson 方程式

$$(3.17)\qquad Tg-g=r$$

の解である. $\blacksquare$

(e) ϕ は有界な台をもつ非負関数, $f\geq 0$ および g が

$$Tf-f=Tg-g=\phi$$

を満すとする. この時

$$f-g=ax+b \qquad \text{a.e.}$$

である. 特に $\int x^2u=\infty$ の時は $f-g=b$ a.e.

§4. 再帰性に関する Spitzer 判定条件(*)

Chung-Fuchs による再帰性判定条件はよく知られている (Feller [6] p. 577). u の Fourier 変換 $\int e^{ix\theta}u(dx)$ を $\hat{u}(\theta)$ で表わす. u が非再帰的であるための必要十分条件は,

---

(*) [1] の §4. なお この節の結果は高次元でも成り立つ.

(4.1) $$\overline{\lim_{t\to 1}} \int_{-a}^{a} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t\hat{u}(\theta)}\right) d\theta < \infty, \quad \exists a>0$$

なることである。

<u>定理 6</u>　uが非再帰的であるための必要十分条件は、

(4.2) $$\int_{-a}^{a} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\hat{u}(\theta)}\right) d\theta < \infty, \quad \exists a>0$$

なることである。

(4.2)の左辺は(4.1)で形式的に lim を積分の中に入れたものであるが、証明ははるかに難しくなる。

<u>補題 A</u>　uが絶対連続部分をもつ場合に証明すれば十分である。

これを示すにはuを多少変更して、絶対連続部分をもつu_0で

$$\left| \frac{1}{1-t\,\hat{u}(\theta)} - \frac{1}{1-t\,\hat{u}_0(\theta)} \right| \leq C, \quad 0\leq t\leq 1, \quad |\theta|<a$$

をみたすものが存在することを示す。Chung-Fuchsの判定条件により、再帰性はuとu_0に対して変らない。また(4.2)の収束発散もuとu_0に対して同じである。したがってuの代りにu_0について議論すれば十分である。

(4.1)とFatouの補題から、

<u>補題 B</u>　uが非再帰的ならば、(4.2)が成り立つ。

<u>補題 C</u>　fがつぎの条件を満足するとする。

$$(4.3)\begin{cases} f \text{ は原点について対称であり, } \hat{f}(\theta) \text{ は } (-a, a) \text{ に台} \\ \text{を持つ. さらに, } \int |f| \leq 1, \ \int f = \int x f = 0, \\ \int x^2 |f| < \infty \text{ を満足する.} \end{cases}$$

このとき

$$(4.4) \qquad \lim_{n\to\infty} \int f \cdot \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} \leq \int_{-a}^{a} R_e \left(\frac{1}{1-\hat{u}(\theta)} \right) d\theta$$

が成り立つ。

何となれば

$$\text{左辺} = \lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} \hat{f} \sum_{1}^{n} \widehat{u^{(i)}} = \int_{-a}^{a} \hat{f}(\theta) \frac{1}{1-\hat{u}(\theta)} \leq \text{右辺}.$$

以上により，次の補題を示せば定理が証明されたことになる。

<u>補題 D</u>　uが絶対連続部分をもつ再帰的な分布であるとする。このとき，任意の $a > 0$ と $K > 0$ に対して，(4.3)の条件を満足する fが存在して

$$(4.5) \qquad \lim_{n\to\infty} \int f \cdot \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} \geq K$$

をみたす。

k は非負，対称，$\int k = 1$，$\hat{k}$ が $(-a, a)$ に台をもつ任意の関数，$I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ で χ_I をその定義関数とする。

$b > 1$ に対して

$$g(x) \begin{cases} = 1 & x \in [b-\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}] \cup [-b-\frac{1}{2}, -b+\frac{1}{2}] \\ = -2 & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ = 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義する。 $f = g * k * \psi_I$ が (4.3) の条件を満足することは容易に分る。 b を十分大きく取ることによって、 f が (4.5) を満すことを示すのが証明の眼目である。この部分の証明 ~~X~~ は、定理4の補題で用いた論法を精密化することによって示される。

§5. "Schema de remplissage" について

Ornstein が定理4の補題および定理6の補題Dで用いた論法は再帰的 Markov 過程の研究に重要な道具を提供するものである。Meyer [4] はこれを "Schema de remplissage" (穴埋めの図式) と呼んでいる。定義と基本的な結果を以下に説明する。

λ, μ が2つの正測度、 P が劣 Markov 核であるとする。 $(\lambda_n, \mu_n)_{n\ge 0}$ を次のように定義する。

$$\lambda_0 = (\lambda - \mu) \vee 0, \qquad \mu_0 = (\mu - \lambda) \vee 0,$$
$$\lambda_1 = (\lambda_0 P - \mu_0) \vee 0, \qquad \mu_1 = (\mu_0 - \lambda_0 P) \vee 0,$$
$$\vdots$$
$$\lambda_{n+1} = (\lambda_n P - \mu_n) \vee 0, \qquad \mu_{n+1} = (\mu_n - \lambda_n P) \vee 0.$$

Meyerはこの図式の意味をつぎの説明している。分布μの穴に分布λの土を注ぐ。$\lambda\wedge\mu$の土が穴に落ちる。したがって$\lambda_0=\lambda-\lambda\wedge\mu$は残っている土，$\mu_0=\mu-\lambda\wedge\mu$はまだ埋められていない穴の部分を示す。$\lambda_0$の土を空中に吹きあげもう一度穴埋めの作業を行う。この結果$\lambda_0 P$の分布で土が落ちて来る。$\lambda_0 P\wedge\mu_0$の土が穴に落ち，$\lambda_1=\lambda_0 P-\lambda_0 P\wedge\mu_0$の土が残り，$\mu_1=\mu_0-\lambda_0 P\wedge\mu_0$の部分が埋らないで残る。前と同じ仕方で$\lambda_1$の土を空中に吹きあげ，以下同じ作業を繰り返す。明らかにλ_n，μ_nは減少し

(5.1) $$\mu_\infty=\lim\mu_n,\qquad \lambda_\infty=\lim\lambda_n$$

が存在する。

どのような条件があれば穴が完全に埋められるか，すなわち$\mu_\infty=0$になるかを問うことは自然である。λの全測度がμの全測度より大きくなければならないことは自明であるが，それ以上のことはPの性質による。

定義　2つの有界測度α, βが与えられているとする。すべての有界，（Pに関して）超過的な関数fに対して

$$\beta(f)\leq\alpha(f)\qquad(\alpha(f)\text{ は }\int f(x)\alpha(dx)\text{ を表わす})$$

が成り立つとき，$\beta\dashv\alpha$と表わす。

つぎの定理はH. Rootによる。

<u>定理</u>　$\mu_\infty = 0$ であるための必要十分条件は $\mu \dashv \lambda$ なることである。

特に有界な超過的関数が定数に限る場合（Pが再帰的な場合）には，λとμの全測度が同じであれば λは完全に使われて，穴が埋まる。

文　献

[1] D.S. Ornstein: Random walks I, Trans. Amer. Math. Soc., 138 (1969), 1-43.

[2] F. Spitzer: Principles of random walk, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964.

[3] S. Port and C. Stone: Potential theory of random walks on abelian groups, Acta Math. 122 (1969), 19-144.

[4] P.A. Meyer: Travanx de H. Rost en théorie du balayage, Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in Math. No. 191, Springer, Heidelberg (1971), 237-250.

[5] ————: Solutions de l'équation de Poisson dans le cas recurrent, ibid., 251-269.

[6] W. Feller: An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2, Wiley, New York, 1966.