数理解析研究所講究録
147巻 1972年 37-65

Markov subshifts と β-変換

教育大理　伊藤俊次
広島大理　髙橋陽一郎

§0. Symbolic dynamics

Rohlin, Kriegerの結果, SinaiのMarkov partitionなどによって, 測度論的な力学系, 位相力学系ともに, しばしば, shift変換として実現される. 即ち, ある有限集合Aの可算直積空間Ω $(= A^{\mathbb{Z}}$ あるいは $A^{\mathbb{N}})$上の変換σと同型となる. ここで

$$(\sigma\omega)(n) = \omega(n+1). \quad (\omega(n): \omega \text{の第} n \text{座標})$$

この実現の可能性, 媒介となるgeneratorやpartitionの選び方等問題は多いが, shift変換に実現されれば, その構造の簡単さ, 位相的性質, 測度論的性質, sequenceとしての性質などの対応があることから, 考えやすいことは確かであろう.

以下, Markov subshiftの一般的な性質について述べた後, β変換を例にとって, 必ずしもその一般論のうちに入らないが, 種々の性質を見ることにする. 実現の問題には触れないつもりである. shift変換σに対して, 不変な閉集合への制限

である場合，subshift と呼び，変換は同じ σ であらわす．

<u>定義</u>　subshift (X,σ) が Markov であるとは，ある集合 $W\subset A^{p+1}$ $(p\geq 0)$ が存在して，

$$X=\mathcal{M}(W)\equiv\{\omega\in\Omega\mid(\omega(n),\cdots,\omega(n+p))\in W\ (\forall n)\}$$

が成立することをいう

従って，Ω の部分集合 X は，自然に，閉かつ σ 不変である．この定義は，Smale が，finite type と呼んでいるものと一致する．また，片側の shift 変換の場合，W. Parry が intrinsic Markov であると呼んだものでもあるが，その上の不変測度で，その metrical entropy が，力学系 (X,σ) の topological entropy と一致するものが，Markov process であることから単に Markov と呼んでおく．

<u>定義</u>　上のような p の最小のものを，X の Markov 性の order，そのときの A^{p+1} の部分集合 W を，structure set という．また，次式で定義される matrix $M=(M_{uv})_{u,v\in A^p}$ を，structure matrix と呼ぶ．

$$M_{uv}=\begin{cases}1 & \text{if } u=(a_0\cdots a_{p-1}),\ v=(a_1\cdots a_p)\\ & \quad \& \ (a_0\cdots a_p)\in W\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

例　$A=\{0,1,2\}$　　$p=1$

$$W=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2)\}$$

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき，　$\omega = \cdots 012012012 \cdots \in \mathfrak{M}(W)$

$\omega' = \cdots 0121012 \cdots \notin \mathfrak{M}(W)$

注意

Symbolic dynamics に対しては，topological entropy $e(X, \sigma)$ は，

(1)　$$e(X,\sigma) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{card}(\mathcal{W}_n(X))$$

で与えられる．ここで $\mathcal{W}_n(X)$ は，X に現れる長さ n の word の全体，即ち，

$$\mathcal{W}_n(X) = \{ (\omega(0), \cdots, \omega(n-1)) \mid \omega \in X \}$$

また，$\mathrm{card}(W)$ は，集合 W の濃度である．Markov subshift の場合，structure matrix を M (order p) とすれば，

(2)　$$\mathrm{card}(\mathcal{W}_n(X)) = \sum_{u, v \in A^p} (M^{n-p})_{uv}$$

であるから，M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^{A^p}$ 上の作用素とみるとき，

(3)　$$e(X, \sigma) = \log r(M) = \log \lambda$$

ただし，$r(M)$ は作用素 M のスペクトル半径，λ は matrix M の最大正固有値とする．(1)式から容易にわかるように，

$$e(X,\sigma) = \lim_{p \to \infty} e(X_p, \sigma)$$

ただし，

$$X_p = \mathfrak{M}(\mathcal{W}_{p+1}(X)), \quad X_p \supset X_{p+1}, \quad X = \bigcap_{p \geq 0} X_p$$

§1. Markov subshift の特徴付け

Aを有限集合とする．片側可算直積 $A^{\mathbb{N}}$ も，両側可算直積 $A^{\mathbb{Z}}$ も，shift変換を考えることができるから，それを区別するため，前の場合 σ_+，後の場合 σ と書く．また，$A^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{N}}$ への自然なprojectionを π としておこう．このとき Markov subshifts は，topological に次のように特徴付けられる．(Parry の定理の拡張)

<u>定理</u>　X を $A^{\mathbb{Z}}$ の閉かつ不変な部分集合，$X_+=\pi(X)$ とすれば，次の4条件は互に同値である．

(a)　(X,σ) は，Markov subshift.(両側)

(b)　(X_+,σ_+) は，Markov subshift (片側)

(c)　π の X 上への制限 $\pi|X$ は，開写像

(d)　σ_+ の X_+ 上への制限 $\sigma_+|X_+$ は，開写像

証明．(a)と(b)が同値であることは，X が閉であるから明らか．(c)から(d)が従うことは次のdiagramから自明．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma|X"] \arrow[d, "\pi|X"'] & X \arrow[d, "\pi|X"] \\ X_+ \arrow[r, "\sigma|X_+"'] & X_+ \end{tikzcd}$$

commutative, i.e., $\pi|X \circ \sigma|X = \sigma_+|X_+ \circ \pi|X$

残りの証明に入る前に次の事実に注意しておこう．

<u>補題</u>　可算直積空間 $A^{\mathbb{Z}}$ の部分集合が，開かつ閉である

必要十分条件は，Cylinder sets の有限和であることである．

実際，十分であることは明らかであるから，必要性を示そう．今，集合 X が，cylinder sets の有限和でなければ，筒集合の列 C_n, $n\geq 0$,

$$C_n=\{\omega\in A^{\mathbb{Z}} \mid \omega(k)=a_k^n,\ |k|\leq n\}\quad (a_k^n\in A)$$

が存在して，X 及びその補集合 X^c の双方と共通点をもつ．A は有限集合であるから，適当な部分列 $(C_{n'})$ をとれば，

$$a_k^{n'}=a_k\in A$$

と仮定してよい．従って，$\omega=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in A^{\mathbb{Z}}$ は，X と X^c との両方の集積点である．従って，どちらもが閉かつ開ではありえない．ゆえに，X が閉かつ開ならば，筒集合の有限和である．

Remark この補題からただちに次のような性質が導びかれる．なお補題は片側直積 $A^{\mathbb{N}}$ に対しても同様に成立する．

(a) (Hedlund) φ を $A^{\mathbb{Z}}$ からそれ自身への shift σ と可換な連続写像とすれば，適当な $p\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$ と，A^{p+1} から A への写像 F が存在して，

$$\varphi(\omega)(n)=F(\omega(n+k),\cdots,\omega(n+k+p))\quad(\forall n\in\mathbb{Z})$$

(b) Subshift (X,σ) から，他の shift $(B^{\mathbb{Z}},\sigma)$ への連続な準同型写像は，$(A^{\mathbb{Z}},\sigma)$ からの準同型写像に拡張される．

(c) (X,σ) $(X\subset A^{\mathbb{Z}})$ を Markov subshift とすれば，

有限集合$B\,(\supset A)$が存在して，適当な$(B^{\mathbb{Z}},\sigma)$のendomorphism（連続性は仮定する）φに対して，

$$X=\varphi(B^{\mathbb{Z}})\cap A^{\mathbb{Z}}$$

定理の証明に戻ろう．(a)から(c)を導こう．そのためには，筒集合$U=\{\omega\in X\mid\omega(-n)=a_0,\cdots,\omega(m-n)=a_m\}$ $(n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N},\ a_0,\cdots,a_m\in A)$に対して，$\pi(U)$が開集合であることを言えばよい．$\omega_+^0\in\pi(U)$を任意にとる．適当な$\omega^0\in U$を選べば，$\pi(\omega^0)=\omega_+^0$となる．今，$V=\{\omega_+\in X_+\mid\omega_+(k)=\omega_+^0(k)\ 0\leqq k\leqq l\}$ $(l=\max\{p,m-n+p\})$とおけば，ω_+^0の近傍である．$V\subset\pi(U)$を示せば証明は終る．Vから任意の元ω_+をとって，$\omega\in A^{\mathbb{Z}}$を，

$$\omega(n)=\begin{cases}\omega^0(n) & (n<0)\\ \omega_+(n) & (n\geqq 0)\end{cases}$$

として定義すれば，XのMarkov性のorderをpとするとき，ωは再びXの元，さらに，$\omega^0\in U$だから，$\omega\in U$．ゆえに，$\omega_+=\pi(\omega)\in\pi(U)$．

最後に，(c)ならば(a)であることを示そう．これは本質的には，W. Parryの結果である．仮定より，$\sigma_+|X_+$は開写像，従って開かつ連続であるから，$\sigma_+([a]\cap\pi(X))$は開かつ閉である．補題（片側の場合）によってA^p $(p\geqq 0)$の部分集合の族$\{P_a\mid a\in A\}$で，互にdisjointなものが存在して，

$$\sigma_+([a]\cap\pi(X)) = \bigcup_{u\in P_a} [u]\cap\pi(X)$$

となる．ここで，$[a]$，$[u]$ などは，筒集合で，一般に，$v\in A^n$ に対して，

$$[v] = \{\omega \mid (\omega(0),\cdots,\omega(n-1)) = v\}$$

と約束しておく．$\{P_a \mid a\in A\}$ が上のような性質をもつものの中で最小の族（従って一般に partition でない）と仮定しておく．このとき，

$$W = \{(a_0,a_1,\cdots,a_p)\in A^{p+1} \mid (a_1,\cdots,a_p)\in P_{a_0}\}$$

とおけば，$X_+ = \mathcal{M}_+(W)$ であることを示そう．実際，Y を任意の $A^{\mathbb{N}}$ の部分集合，$n\geq 1$，$a_0,\cdots,a_n\in A$ とするとき，

$$\sigma_+([a_0,\cdots,a_n]\cap Y) = [a_1,\cdots,a_n]\cap\sigma_+([a_0]\cap Y)$$

であることから，$n\geq p$ ならば，

$$\sigma_+([a_0,\cdots,a_n]\cap\pi(X)) = [a_1,\cdots,a_n]\cap\pi(X)$$

である．念のため注意しておけば，$(a_k,\cdots,a_{k+p})$ $(0\leq k\leq n-p)$ の中に，W に属さないものが存在すれば，$\{P_a \mid a\in A\}$ の最小性から両辺とも空集合として等号が成立する．これから $\mathcal{M}_+(W)$ の任意の元は，$\pi(X)$ の集積点だから $\pi(X)$ の元，また逆に，

$$\bigcup_{a\in A}\bigcup_{u\in P_a} [a,u] = \bigcup_{w\in W} [w] \supset \pi(X)$$

より，$\pi(X)\subset\mathcal{M}(W)$，従って，$(X_+,\sigma)$ は Markov である．

証明終

§2. Markov subshift についてのいくつかのremarks

この節では，Markov subshift，殊に，その structure matrix についていくつか述べたい．

(A) 既約性と既約成分への分解

一般に力学系 (Y,φ) は，任意の2つの開集合 U, V に対して，ある整数 $n \geq 1$ が存在して，$\varphi^n(U) \cap V \neq \phi$ が成立するとき，(topologically) transitive と呼ばれるが，symbolic dynamics においては，すべての筒集合 U, V に対して上の条件の成立と同値である．Markov subshift に対しては，もう少し弱い条件が考えられる．

<u>定義</u>．行列 M が，(置換に関して) 既約とは，任意の置換 τ に対して，$\tau(M) = (M_{\tau(i)\tau(j)})$ が，

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad (M_1, M_2 \text{ は正方行列} \neq 0)$$

の形にならないことをいう．(例えば，F.R. Gantmacher の本を参照)

<u>定義</u> Markov subshift (X, σ) が既約とは，その structure matrix $M = M(X)$ が既約のことをいう．

<u>注意</u>．structure matrix はそのすべての entry が非負であるから，絶対値最大の固有値の中に正のものが存在して，それは simple である．(*Perron-Frobenius* の定理) これを λ とすれば topological entropy $e(X, \sigma)$ は，$\log \lambda$ であることは前に述べ

た通りだが，さらに，$\lambda^{-n}M^n$ $(n\geq 0)$ は，$n\to\infty$ のときに，収束して，その極限は，$x^t y$ と書ける．ここで，x はMの右固有vector，y は左固有vector（共に，固有値λに対して）ただし，このためには，行列Mの他の固有値の絶対値がλより小さい（そのためには，Mのすべてのentryが >0 でよいことは良く知られている）か，部分列をとる必要がある．従って，topological entropy の収束のorderが指数的である．

既約成分への分解は次のような方法で保証される．簡単のため，subshift (X,σ) のMarkov性のorderを1としよう．そのstructure matrixをM，structure setをWとする．二項関係 $\overline{W}$ を，

$$a\overline{W}b \iff \exists\, a_0=a, a_1, \cdots, a_k=b\in A \mid (a_j,a_{j+1})\in W \quad (j=0,\cdots,k-1)$$

と定義し，$a, b\in A$ に対して，

$$a \underset{X}{\sim} b \iff a=b \text{ あるいは，} a\overline{W}b \text{ かつ } b\overline{W}a$$

とすると，$\underset{X}{\sim}$ は同値関係．これによる商空間 $A/\underset{X}{\sim}$ の元 $\tilde{a}$ を，Aの部分集合と同一視すれば，各 $\tilde{a}\in A/\underset{X}{\sim}$ に対して，

$(X\cap\tilde{a}^{\mathbb{Z}},\sigma)$ は既約であり，$X\setminus\bigcup_{\tilde{a}\in A/\underset{X}{\sim}} X\cap\tilde{a}^{\mathbb{Z}}$ は，すべてtransientである．

なお，Mの，$\tilde{a}$-小行列を $M_{\tilde{a}}$ と書けば，

$$\chi_M = \prod_{\tilde{a}\in A/\underset{X}{\sim}} \chi_{M_{\tilde{a}}}$$

ただし，一般に行列Nに対して，χ_Nをその固有多項式とする．従ってとくに，(X,σ)のtopological entropyは，その既約成分のentropyの最大値である．

(B) 周期点の数とtopological entropy

(X,σ)をMarkov subshiftとする．Mをそのstructure matrix，簡単のため，order$=1$とすれば，

(4) $\#\{\omega\in X\mid\sigma^n\omega=\omega\}=\mathrm{tr}\,M^n$

である．topological entropyが(2)(§0)から計算されることを思い出せば，既約な場合，(一般には，既約成分へ分解する)

(5) $$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\#\{\omega\in X\mid\sigma^n\omega=\omega\}=e(X,\sigma)$$

であることは明らか．

従って，一般のsubshift (X,σ)を，$(\mathcal{M}(\mathcal{W}_p(X)),\sigma)$ $(p\geq 0)$によって近似すれば，

(6) $$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\#\{\omega\in X\mid\sigma^n\omega=\omega\}\leq e(X,\sigma)$$

が従う．

<u>定義</u> 一般の力学系(Y,φ)がMarkovとは，generatorが存在し，かつ，適当なgeneratorに対して実現したとき，Markov subshiftであることをいう

Sinaiの定理によって，Anosov systemは適当な条件，例えば，Axiom A，の下に，Markovである．

定理 a) 一般の力学系 (Y, φ) が expansive であれば，その topological entropy が有限であるかぎり，周期点は高々指数的に増大する．

b) とくに，(Y,φ) が Markov ならば，その増加の order は，topological entropy に一致する．

注) この結果は，R. Bowen も出している（b)）．

(C) Markov subshifts による近似

位相力学系自身としては，上に述べた，周期点の数，あるいは topological entropy 程度の粗い量ならば，完全に近似できるが，測度論的には，ergodicity と irreducibility，mixing と，定義していないが，~~今に~~，uniform irreducibility との対応などの他に，次のような問題があるが，まだ解答は得られていない．

(X,σ) を一般の subshift，$(X_p = \mathcal{M}(\mathcal{W}_{p+1}(X)), \sigma)$ をその Markov subshift による近似とし，irreducibility を仮定する．このとき，X 上の測度 μ が $h(\mu) = e(X,\sigma)$ をみたせば，十分大きな p に対して，$e(X_p,\sigma)$ と $e(X,\sigma)$ が近く，X_p 上 $h(\mu_p) = e(X_p,\sigma)$ となる測度が一意であることから，測度 μ と μ_p が近いことが予想される．実際，条件付測度に関する2次形式のようなものが評価されるが，その収束は open である．

§3 β-展開の実現

以下 $1<\beta\leq 2$ と仮定しておくが，$\beta>1$ に対しても全く同様である．

実数 t の β-展開とは，

(1) $$t = a_{-1} + \sum_{n\geq 0} a_n \beta^{-n-1} \quad (a_{-1}\in \mathbb{N},\ a_n = 0 \text{ or } 1)$$

であって，このままでは一意性がないから，次のような手順で得られる表現のことである．簡単のために，$t\in[0,1)$ だけを考えることにしよう．区間 $[0,1)$ の変換 T_β を，

(2) $$T_\beta t = (\beta t \text{ の少数部分})$$

によって定め，β変換とよぶ．後で自然に証明されるようにこの変換に対して，partition $\{[0,\beta^{-1}),[\beta^{-1},1)\}$ は，generator になるので，$\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ への実現を考える．$[0,1)$ から Ω への写像 π_β を，$(n\geq 0,\ t\in[0,1))$

(3) $$\pi_\beta(t)(n) = \begin{cases} 1 & T_\beta^n t\in[\beta^{-1},1) \text{ のとき} \\ 0 & T_\beta^n t\in[0,\beta^{-1}) \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する．ただし，$T_\beta^0 t = t$．π_β による像 $\pi_\beta[0,1)$ は，Ω の中で，Borel set ではあるが（実は G_δ-set），閉ではないから，その閉包を考えることにし，X_β と書こう．Subshift (X_β,σ) と，"力学系" $([0,1],T_\beta)$ は，次の準同型で互に結ばれている．ただし，$T_\beta^n 1 = \sup_{0\leq t<1} T_\beta^n t$ と定義する．写像 $\rho_\beta : X_\beta \to [0,1]$ を，

$$\rho_\beta(\omega)=\sum_{n\geq 0}\omega(n)\beta^{-n-1}$$

によって定義すれば，

1) $\rho_\beta : X_\beta \longrightarrow [0,1]$ は全射で順序を保つ．（ここで，X_β の順序は辞書式のもの，即ち，$\omega<\omega'$ とは，ある $n\geqq 0$ が存在して，$\omega(k)=\omega'(k)$ $(k<n)$，$\omega(n)<\omega'(n)$ のこと，また $[0,1]$ の順序は通常のもの）

2) $\rho_\beta\circ\sigma = T_\beta\circ\rho_\beta$ （σ は Ω 上の shift 変換）

3) $\pi_\beta : [0,1] \longrightarrow X_\beta$ は，単射で順序を保つ．（ここで，

$$\pi_\beta(1) = \max X_\beta$$

と約束する）．

4) $\sigma\circ\pi_\beta = \pi_\beta\circ T_\beta$

5) $\rho_\beta\circ\sigma_\beta = id.$

$$\begin{tikzcd}
X_\beta \arrow[r, shift left, "\rho_\beta"] \arrow[d, phantom, ""] & {[0,1]} \arrow[l, shift left, "\pi_\beta"] \\
X_\beta \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, shift left, "\rho_\beta"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & {[0,1]} \arrow[l, shift left, "\pi_\beta"] \arrow[u, "T_\beta"']
\end{tikzcd}$$

上の 1)－5) の中で自明でないのは，順序を保つことである．そして，この事実が，subshift (X_β,σ) を調べる上で本質的な役割を果す．

証明を与えておこう．π_β が順序を保つことが示されれば，ρ_β が順序を保つことは殆ど明らかであろう．$t\in[0,1)$ とする．$\pi_\beta(t)$ はその定義より，$a_j=\pi_\beta(t)(j)$ とするとき，

(4) $\quad a_0\beta^{-1}+\cdots+a_n\beta^{-n-1}\leqq t \qquad (\forall n\geqq 0).$

をみたす．さらに，(1) をみたすような，$(a_0,\cdots,a_n)\in\{0,1\}^n$

の中で最大である（辞書式の順序で）実際，$\pi_\beta(t)$ の定義より任意の $n \ge 0$ に対して，

$$(5) \qquad T_\beta^n t = \beta^n \left(t - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_\beta(t)(j) \beta^{-j-1} \right)$$

であることはただちにわかる．~~から~~，$(a_0, \cdots, a_n)$ が存在して④をみたし，$(a_0, \cdots, a_n) > (\pi_\beta(t)(0), \cdots, \pi_\beta(t)(n))$ であれば，即ち，ある $0 \le m \le n$ が存在して，$a_j = \pi_\beta(t)(j)$ $(j < m)$，$a_m = 1$ $\pi_\beta(t)(m) = 0$ ならば，

$$T_\beta^m t = \beta^m \left(t - \sum_{j=0}^{m-1} \pi_\beta(t)(j) \beta^{-j-1} \right) = \beta^m \left(t - \sum_{j=0}^{m-1} a_j \beta^{-j-1} \right)$$
$$\ge \beta^{-1} a_m = \beta^{-1}$$

従って π_β の定義より，$\pi_\beta(t)(m) = 1$，これは矛盾である．

1) から，ρ_β による，$t \in [0,1)$ の逆像は高々2点であることがわかる．実際，$\rho_\beta(\omega) = t$ ならば，$\omega = \pi_\beta(t)$ または $\omega = \inf_{s>t} \pi_\beta(s)$ である．それ以外であり得ないことは，Ω において，$\pi_\beta([0,1))$ の直積位相による閉包と，辞書式順序に関する閉包とが一致することからわかる．さらに，もし両者が異なるならば，$\inf_{s>t} \pi_\beta(s) > \pi_\beta(t)$ であるから，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$(\inf_{s>t} \pi_\beta(s))(k) = \pi_\beta(t) \quad (0 \le k < n)$$
$$(\inf_{s>t} \pi_\beta(s))(n) = 1 > 0 = \pi_\beta(t)(n)$$

従って，$\rho_\beta(\omega) \le 1$ $(\forall \omega \in X_\beta)$ に注意すれば，

$$1 = \rho_\beta(\sigma^{n+1} \pi_\beta(t)), \quad \sigma^{n+1}(\inf_{s>t} \pi_\beta(s)) = 000 \cdots\cdots$$

ところで，$\pi_\beta(1)=\omega_\beta$ は，唯一つ定まっているから，

(6) $\qquad \sigma^n \pi_\beta(t)=\omega_\beta$

ゆえに，

6) $\rho_\beta^{-1}(t)$ は，高々2点で，2点となりうるのは，高々可算個の t だけであり，その t は (6) をみたす．

§4. $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ の分類

β-展開に現れる長さ n の word $u=(a_0\cdots a_{n-1})$ に対して，"次に大きい word" を考えることができる．2進法 ($\beta=2$) であれば，$a_{n-1}=0$ のとき，$u_2^+=(a_0\cdots a_{n-2}1)$ が "次に大きい" ものであり，$a_{k+1}=\cdots=a_{n-1}=1$，$a_k=0$ ならば，$u_2^+=(a_0\cdots a_{k-1}10\cdots0)$ である．一般の β に対しては，$a_{n-1}=0$ であっても"繰り上がり"が起こる．"繰り上がり" の起こる桁数によって，$\mathcal{W}_n(X_\beta)$ を分類する．先ず

$$\mathcal{W}_n^0(X_\beta)=\{(a_0\cdots a_{n-1})\in\mathcal{W}_n(X_\beta)\mid a_{n-1}=0,\ (a_0\cdots a_{n-2}1)\in\mathcal{W}_n(X_\beta)\}$$

とおく．即ち，"繰り上がり" が(最後の桁の変更のみで)起こらない words 全体とする．

命題 1. $$\mathcal{W}_n(X_\beta)=\bigcup_{k=0}^{n}\mathcal{W}_k^0(X_\beta)\cdot\omega_\beta[0,n-k)$$

ここで，$\omega_\beta[0,j)=(\omega(0),\cdots,\omega(j-1))\qquad(j\geq1)$．

また，　$\omega_\beta[0,0)$ は空語 ε，　$\mathcal{W}_0^\circ(X_\beta)=\{\varepsilon\}$，記号・は，concatenationで，一般に，$u=(a_1,\cdots,a_i)$，$v=(b_1,\cdots,b_j)$ のとき，

$$(7)\qquad u\cdot v=(a_1,\cdots,a_i,b_1,\cdots,b_j)$$

と約束する．空語 ε とは，形式的には，contatenation・によって words全体のつくる半群の単位元として導入される．即ち，

$$u\cdot\varepsilon=\varepsilon\cdot u=u$$

証明．最初に，$(a_0,\cdots,a_{n-2},1)\in\mathcal{W}_n(X_\beta)$ ならば；常に $(a_0,\cdots,a_{n-2},0)\in\mathcal{W}_n(X_\beta)$ であることに注意しよう．実際，

$$t=a_0\beta^{-1}+\cdots+a_{n-2}\beta^{-(n-1)}$$

の展開 $\Pi_\beta(t)$ の最初の n 項が $a_0,\cdots,a_{n-2},0$ である．従って，$u=(a_0,\cdots,a_{n-2},0)\in\mathcal{W}_n(X_\beta)\setminus\mathcal{W}_n^\circ(X_\beta)$ に対しては，"次に大きいword" u_β^+ の末尾は 0 である．さらに，X_β 上で，従って，$\mathcal{W}_n(X_\beta)$ 上で，P_β によって $[0,1]$ から誘導される順序と，P_2 によって誘導される順序（＝辞書式順序）が一致することから，

$$u_\beta^+=(b_0\cdots b_{k-2}\,1\,0\cdots0)$$

の形をしていなければならない．さらに，u と u_β^+ との間に $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ の他の元は存在しないから，$b_0=a_0,\cdots,b_{k-2}=a_{k-2}$，そして，$a_{k-1}=0$ でなければならない．ゆえに，この場合，u は $\mathcal{W}_k^\circ\cdot\omega_\beta[0,n-k)$ に属する．ただし，例外があって，$u=\omega_\beta[0,n)$ の場合，これより大きなword は存在しないが，上での約束に従って，$k=0$ として，$\mathcal{W}_k^\circ\cdot\omega_\beta[0,n-k)$ に属する．この逆は

明らかであろう.

系. a) $\lim_{n\to\infty} \beta^{-n} \#(\mathcal{W}_n^0(X_\beta)) = \frac{1}{M_\beta}$ $\qquad M_\beta = \sum_{n\geq 0}(n+1)\varphi_\beta(n)\beta^{-n-1}$

b) $\lim_{n\to\infty} \beta^{-n} \#(\mathcal{W}_n(X_\beta)) = \frac{1}{M_\beta(1-\beta^{-1})}$

c) とくに, subshift (X_β, σ) の topological entropy は $\log\beta$.

証明. $u \in \mathcal{W}_n(X_\beta)$ と, X_β の点 $\omega = u000\cdots$ とを混乱の起こらない限り同一視して, 例えば, $\rho_\beta(u)$ などの記法を使うことにする. $u \neq \omega_\beta[0,n)$ に対して,

(8) $\qquad R_\beta(u) = \rho_\beta(u_\beta^+) - \rho_\beta(u)$

また, $u = \omega_\beta[0,n)$ のときは, $R_\beta(u) = 1 - \rho_\beta(u)$ とすれば, あきらかに,

(9) $\qquad \sum_{u\in\mathcal{W}_n(X_\beta)} R_\beta(u) = 1$

である.

一方, $u \in \mathcal{W}_{n-k}^0 \cdot \omega_\beta[0,k)$ とすれば, 命題1の証明から明らかなように, $\quad R_\beta(u) = \beta^{-(n-k)}(1-\rho_\beta(\omega_\beta[0,k)))$.

ところで, $\quad 1-\rho_\beta(\omega_\beta[0,k)) = \beta^{-k} T_\beta^k 1$ である. 従って (9) より

(10) $\qquad \sum_{k=0}^{n} \beta^{-n} T_\beta^{n-k} 1 \times \#(\mathcal{W}_k^0(X_\beta)) = 1 \qquad (\forall n\geq 0)$

ただし, 空語も一語に数える. つまり, $\#(\mathcal{W}_0^0(X_\beta)) = \#\{\varepsilon\} = 1$

(10)式に, t^n をかけ, $n\geq 0$ について和をとる. $|t|<1$ ならば収束については保証されている. これを, $1 = \rho_\beta(\omega_\beta)$, あるい

は，

$$1-P_\beta(\omega_\beta[0,n))=\beta^n T_\beta^n 1=\sum_{k\ge n}\omega_\beta(k)\beta^{-k-1}$$

に注意して整理すれば，

(11) $$\sum_{n\ge 0}\beta^{-n}N_n^0 t^n=(1-\varphi_\beta(t))^{-1}$$

を得る．ここで，

(12) $$\varphi_\beta(t)=\sum_{n\ge 0}\omega_\beta(n)\beta^{-n-1}t^{n+1}$$

とおいたが，この函数 φ_β は，$|t|<\beta$ で正則，$\varphi_\beta(t)=1$ となるのは，$t=1$ に限る．従って，$(1-\varphi_\beta(t))^{-1}$ は，meromorphic で，$t=1$ に pole をもつだけだから，

(13) $$\frac{1}{1-\varphi_\beta(t)}-\frac{1}{\varphi_\beta'(1)(1-t)}\equiv\gamma_\beta(t)$$

は，$|t|<\beta$ で再び正則である．とくに，γ_β の任意階導函数は $|t|<\beta$ の compact 部分集合で有界．これから，$\gamma_\beta(t)$ の Fourier 係数 a_n

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_\beta(e^{it})e^{-nit}dt$$

は，n について（任意の degree の）多項式の order で 0 に収束する．ところで，$a_n=\beta^{-n}N_n^0-\frac{1}{\varphi_\beta'(1)}$ だから，系の a) を得る．一方，$N_n=\sum_{k=0}^{n}N_k^0$ は自明のことだから，$N_0=1$ と約束すれば，

(14) $$\sum_{n\ge 0}N_n\beta^{-n}t^n=\frac{1}{1-\beta^{-1}t}\sum_{n\ge 0}N_n^0\beta^{-n}t^n \qquad (|t|<1)$$

ゆえに，$\lim_{n\to\infty}\beta^{-n}N_n=\lim_{n\to\infty}\beta^{-n}N_n^0\sum_{j=0}^{n}\beta^{-j}=(\varphi_\beta'(1)(1-\beta^{-1}))^{-1}$ □

§4. 集合族 $\{X_\beta\}$ の性質

<u>命題2</u> (i) $1 \leqq \beta \leqq 2$ ならば, $\pi_\beta([0,1)) \subset \pi_\alpha([0,1))$

(ii) 任意の $\beta > 1$ に対して,

$$\text{a) } X_\beta = \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha}, \quad \text{b) } X_\beta = \bigcap_{\alpha>\beta} X_\alpha$$

<u>Remark</u> (ii) a) において, 閉包をとることによって増加する点は, 高々可算である

証明. 集合として, $W_n(X_\alpha)$ は, $\alpha \to \beta$ のとき, $W_n(X_\beta)$ に収束することは明らかであろう. (n はとめておく). 一方, 下に述べる補題によって, (i) が導びかれる. あとは, 一般に

$$X = \bigcap_{p \geqq 0} M(W_p(X))$$

であったことを思い起こせばよい.

<u>補題</u> $\pi_\beta([0,1)) = \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \rho_\beta(\sigma^n\omega) < 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}$

証明. $\subset$ はあきらか. 右辺の集合を Y_β とおく. $Y_\beta \ni \omega$ ならば, $\rho_\beta(\omega) = \beta^{-1}(\omega(0) + \rho_\beta(\sigma\omega)) < 1$, $\rho_\beta(\sigma\omega) < 1$ から,

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_\beta(\omega) \in [0, \beta^{-1}) & (\omega(0)=0 \text{ の時}) \\ \quad " \quad \in [\beta^{-1}, 1) & (\omega(0)=1 \text{ の時}) \end{cases}$$

が従う. ところで, $\omega \in Y_\beta$ に対して, $\sigma^n\omega \in Y_\beta$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ はあきらか 従って, (1) から, $\pi_\beta(\rho_\beta(\omega))(0) = \omega(0)$ であることに注意すれば,

$$\omega(k) = (\sigma^k\omega)(0) = \cancel{(\sigma^k \circ \pi_\beta \circ \rho_\beta)(\omega)(0) = (\pi_\beta \circ T_\beta^k \circ \rho_\beta)(\omega)(0)}.$$

$$= (\pi_\beta \circ \rho_\beta)(\sigma^k\omega)(0) = (\pi_\beta \circ T_\beta^k \circ \rho_\beta)(\omega)(0) = (\sigma^k \circ \pi_\beta \circ \rho_\beta)(\omega)(0)$$

$$= \pi_\beta(\rho_\beta(\omega))(k)$$

ゆえに、 $\omega = \pi_\beta(\rho_\beta(\omega)) \in Y_\beta$. □

注意 上の証明では、$1<\beta\leq 2$ を仮定していたが、$\beta>2$ に対しても、symbol集合が、$\{0,1\}$ から $\{0,1,\cdots,k\}$ (kはβを越えない最大の整数) に替えるだけで本質的には同じ. 従って、$\{X_\beta \mid \beta>1\}$ は、任意の有限な topological entropy を与える単調増大かつ(ii)の意味で"連続"な族を与えている.

なお、前節で調べた、words の集合 $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ も β について単調非減少な有限集合の族を与えている. その jumpを与えるβが後で見るように、subshift (X_β,σ) が Markov になる場合である.

§6. $\mathcal{M}(\mathcal{W}_{p+1}(X_\beta))$ の structure matrix とその固有値

β展開に現れる words であるということから、$\mathcal{M}(\mathcal{W}_{p+1}(X_\beta))$ の structure matrix $M=M_{\beta,p}$ の固有値、左及び右固有vector を求めることができる.

命題 3. $\omega_\beta = \max X_\beta$ の"周期"即ち $\sigma^n\omega_\beta[0,p-n)$ $(n>0)$ $=\omega_\beta[0,p-n)$ となる最小の整数を、存在すれば、q とおく.

存在しない場合は $q=p$ とする．このとき，$Mx=\lambda x, \lambda\neq 0$ ならば，

(i) $1\leq q<p$ のとき，$\quad 1=\sum_{k=0}^{q+1}\lambda^{-k-1}\omega_\beta(k)$

$q=p$ のとき，$\quad 1=\sum_{j=0}^{p}\lambda^{-k-1}\omega_\beta(k)+\lambda^{-p-1}$

(ii) $x_{00\cdots 0}=C$ とすれば，$\quad u\in W^0_{p-k}\cdot\omega_\beta[0,k)$ のとき，

$$x_u=C\lambda^k\left(1-\sum_{j=0}^{k-1}\lambda^{-j-1}\omega_\beta(j)\right)$$

Remark a) 左固有 vector に対しては，$yM=\lambda y$ $\lambda\neq 0$ のとき，

$$y_u=\sum_{j=0}^{p}\lambda^{-j-1}I_{(\sigma^j\omega_\beta>u)}$$

によって与えられる．

b) (i) から，固有値 λ の絶対値は β 以下，(ii) から，零でない固有値はすべて simple である．なお固有値 0 は一般には simple でない．例えば，$\omega_\beta=11001100 1100\cdots$ となる β に対しては，そうである．

証明．$u=(0,\cdots,0,\omega_\beta[0,k))$ のとき，$x_u=\xi_k$ とおくことにしよう．先ず，$u\in W^0_{p-k}\cdot\omega_\beta[0,k)$ ならば，$x_u=\xi_k$ であることを示そう．今，

$$\delta(u,v)=\begin{cases}\max\{j\mid u(j)\neq v(j)\}+1 & (u\neq v\text{の時})\\ 0 & (u=v\text{の時})\end{cases}$$

とおく．$\delta(u,v)$ についての帰納法で，$u,v\in W^0_{p-k}\omega_\beta[0,k)$ ならば，$x_u=x_v$ を示せば十分である．$\delta(u,v)=0$ のときは trivial．$\delta(u,v)\leq j$ に対して成立すると仮定しよう．

従って，$u, v \in W^{\circ}_{p-k}\cdot\omega_\beta[0,k)$．$\delta(u,v)=j+1$ とする．このとき，u', v' を，$u'(i)=u(i+1)$，$v'(i)=v(i+1)$ $(0\leq i\leq p-1)$ によって定義すれば，$u'a, v'a\in W_p$ $(a\in A)$ のとき，$\delta(u'a, v'a)=j$ である．一方 structure matrix の定義と，words の分解の方法から，

$$\lambda x_u = \sum_w M_{uw}x_w = x_{u'0} + \omega_\beta(k)x_{u'1}$$

となる．v についても同様の式を書き，右辺を較べれば，帰納法の仮定が使えて，$\lambda\neq 0$ より，$x_u = x_v$ を得る．ゆえに，$u\in W^{\circ}_{p-k}\omega_\beta[0,k)$ ならば，$x_u=\xi_k$ である．次に，ξ_k が(ii)で与えられることを示そう．$0\leq k<p$ のときは，ξ_k の定義より，

$$\begin{aligned}\lambda\xi_k = \lambda x_{00\cdots0\,\omega_\beta[0,k)} &= x_{0\cdots0\,\omega_\beta[0,k+1)} + \omega_\beta(k)x_{0\cdots0\,\omega_\beta[0,k)0}\\ &= \xi_{k+1} + \omega_\beta(k)\xi_0\end{aligned}$$

また，$k=p$ のときには，

$$\begin{aligned}\lambda\xi_p = \lambda x_{\omega_\beta[0,p)} &= x_{\omega_\beta[1,p+1)} + \omega_\beta(p)x_{\omega_\beta[1,p+1)0}\\ &= \xi_{p-q} + \omega_\beta(p)\xi_0.\end{aligned}$$

これから，(ii)を得る．さらに，$\xi_0\neq 0$ と仮定してよいから，これら $p+1$ 個の方程式の解の存在の条件として，(i)が従うが，詳しい計算は省略する．

注意　固有値 $\lambda=0$ に対する固有 vector も計算できるが，必要ないので省略する．

Remark　容易にわかることだが，(i)の形の代数方程式

は，λについての最小多項式（$\mathbb{Z}$上）になっている．（ただし $\lambda=-1$ は根でありうるので，その場合は，$\lambda+1$で割った後での話であるが）

§6. Markovian β

<u>定理</u>　$\beta>1$ とする．Subshift (X_β,σ) が Markov であることと，βに対して，整数 $p\geq 0$ と，βを越えない非負整数 $a_0,\cdots,a_p$ が存在して，次の a) と b) をみたすことは同値である．（$a_0=\min\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq\beta\}$ とする）

a)　$$1-\beta^{-p-1}=\sum_{j=0}^{p}a_j\beta^{-j-1}$$

b)　$$1-\beta^{-p-1}>\sum_{j=0}^{p}a_{j+k}\beta^{-j-1}\qquad k=1,\cdots,p$$

ただし，$a_n=a_{n+p+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ とする．

<u>Remark</u> 1) 以下の証明からわかるように，subshift (X_β,σ) の Markov 性と，$\omega_\beta=\max X_\beta$ が cyclic，即ち，$\sigma^{p+1}\omega_\beta=\omega_\beta$ となる β が存在することとも，同値である．

2) 定理の中の p，及び 1) での p は，ともに，Markov 性の order と一致する．また，a), b) より，$a_p=0$ が出る．

証明　前に与えたものと別の証明を与えておこう．最初に，subshift (X_β,σ) が Markov であると仮定する．このとき，§0 で述べたように，$N_n=\#(W_n(X_\beta))$ は，その structure matrix M の中 M^{n-p} から計算できる．一方，前節に述べたように，M の固有多項式はわかっている．従って，§4 で求めた N_n, $n\geq 0$ の母函数 $\sum_{n\geq 0} N_n \beta^{-n} t^n$ と，固有多項式から導いたその変形（有理函数となる）を比較することによって（計算略）

$$\omega_\beta(p)=0, \quad \omega_\beta(n+p+1)=\omega_\beta(n) \ (\forall n\in\mathbb{N})$$

そして，§5. 命題3 の(i)（$q=p$ となる）から，

$$1-\beta^{-p-1}=\sum_{j=0}^{p}\omega_\beta(j)\beta^{-j-1}$$

をみたす．

逆を示そう．β が，a) 及び b) をみたすならば，先ず，有限列 $a_0,\cdots,a_p$ は，β に関する 1 の展開 $\pi_\beta(1)$ の最初の $p+1$ 項であることがわかる．次に，a)を書き直せば，$1=\sum_{j\geq 0} a_j\beta^{-j-1}$ であるから，$\pi_\beta(1)(n)=a_n$ となる．従ってとくに，$\omega_\beta=\pi_\beta(1)$ $=\max X_\beta$ は，cyclic である．$W=\mathcal{M}_{p+1}(X_\beta)$ とおいて，

$$X_\beta=\mathcal{M}(W)$$

を示せば，逆の証明は終りである．ところで $\omega\in\mathcal{M}(W)$ ならば，$\omega[n,n+p+1)\in W$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ 従って，

$$\omega[n,n+p+1)\leq(a_0,\cdots,a_p)$$

とくに，$\omega(n)\beta^{-1}+\cdots+\omega(n+p)\beta^{-p-1}\leq a_0\beta^{-1}+\cdots+a_p\beta^{-p-1}\leq 1-\beta^{-p-1}$

ゆえに，$\rho_\beta(\sigma^n\omega)\leq 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$，等号は，$\sigma^n\omega=\omega_\beta$ に限る $(n\geq 0)$

よって，§4 の補題より，$\mathcal{M}(W)\setminus\{\sigma^n\omega_\beta\}_{n\geq 0}=\pi_\beta([0,1))$

従って，$\mathcal{M}(W)\subset X_\beta$．逆の包含関係は自明である（証明略）

§7 Weak Bernoulli 性

ここでは，subshift (X_β, σ) の不変測度 μ_β（下で定義）をとり，（測度論的な）endomorphism $(X_\beta, \mu_\beta, \sigma)$ の自然な拡張である automorphism が weak Bernoulli となることの直接証明を与えよう．次の定義は，generator を固定したときの，Ornstein の定義の言いかえである．

定義　(Ω, σ) を shift 変換とする．$(\Omega = A^{\mathbb{Z}})$ その上の不変測度 μ が weak Bernoulli であるとは，

(1)
$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq 1} \sum_{u\in A^n} \sum_{v\in A^n} |\mu([u]\cap\sigma^{-n-k}[v]) - \mu([u])\mu([v])| = 0$$

ここで，$[u]$ は前と同様，

$$[u] = \{\omega\in\Omega \mid (\omega(0), \cdots, \omega(n-1)) = u\}$$

で定義される．また，$E_\omega = \{\omega'\in\Omega \mid \omega' < \omega\}$ とする．

定理　X_β 上の測度 μ_β を次式で定義する．

(2)
$$\mu_\beta(E_\omega) = \sum_{n\geq 0} \beta^{-n-1} P_\beta(\omega) \wedge P_\beta(\sigma^n \omega_\beta) / M_\beta$$

ただし，$\omega_\beta = \max X_\beta$，$M_\beta = \sum_{n\geq 0} (n+1)\omega_\beta(n)\beta^{-n-1}$，$a \wedge b$ は a と b の最小値．このとき，μ_β の両側可算直積空間 Ω への拡張を $\tilde{\mu}_\beta$ とすれば，weak Bernoulli である．

注意　(2) 式で定義された測度 μ_β は，Renyi の与えた区間 $[0,1]$ 上絶対連続な不変測度の書き換えである．直接の証明も，n についての和を，$\omega_\beta(n)=0$ と $\omega_\beta(n)=1$ の部分にわければすぐにできる．（一般には，$0, 1, \cdots, K$，$K = \min\{k\in\mathbb{N} \mid \beta \leq k\}$）

証明は，§4 の結果を用いて，測度を，symbol 乃至 words の個数におきかえることによって与えられる．紙数の都合もあるので詳しい計算は省く．

<u>補題 1</u> 任意の $\omega\in X_\beta$ と，$u\in \mathcal{W}_h(X_\beta)$ に対して，

(3) $$\mu_\beta([u]\cap \sigma^{-h}E_\omega)=\beta^{-h}f_\beta(u)\,P_\beta(\omega\wedge\bar{u})$$
$$-\sum_{n:\sigma^n\omega_\beta[0,h)=u} M_\beta^{-1}\beta^{-n-h}\left(P_\beta(\omega\wedge\bar{u})-P_\beta(\omega\wedge\bar{u}\wedge\sigma^{n+h}\omega_\beta)\right)$$

ここで，

(4) $$f_\beta(\omega)=M_\beta^{-1}\sum_{n\geq 0}\beta^{-n-1}I_{E_{\sigma^n\omega_\beta}}(\omega)$$

は，μ_β の，測度 dP_β に関する density である．また，

$$\bar{u}=\max\{\omega\in X_\beta \mid u\cdot\omega\in X_\beta\}$$

とする．

証明は，$[u]\cap\sigma^{-h}E_\omega=E_{u\cdot(\omega\wedge\bar{u})}\setminus E_u$ を使って，n についての和を，$\sigma^n\omega_\beta[0,h)\gtreqless u$ の3つの場合にわければよい．

<u>補題 2</u> X_β 上の函数 φ に対して，

$$(S_\beta\varphi)(\omega)=\beta^{-1}\sum_{a}\varphi(a\cdot\omega)$$

とおくと，非負作用素で，

1) 有界可測函数の通常の位相によって作る Banach 空間上の有界作用素，

2) $L^1(X_\beta, dP_\beta)$ 上の作用素として，contraction;

$$\int_{X_\beta}S\varphi(\omega)\,dP_\beta(\omega)=\int_{X_\beta}\varphi(\omega)\,dP_\beta(\omega)\quad(\forall\varphi\in L^1(X_\beta,dP_\beta))$$

3) $\forall \varphi \in L^1(X_\beta, d\rho_\beta)$, $\forall \psi \in L^\infty(X_\beta, d\rho_\beta)$ に対して,

$$\int_{X_\beta} (\psi\circ\sigma)\varphi\, d\rho_\beta = \int \psi\cdot(S_\beta\varphi)\, d\rho_\beta$$

証明. 3)を示せば, 残りは明らかであろう. $\rho_\beta(a\cdot\omega) = a\cdot\beta^{-1} + \beta^{-1}\rho_\beta(\omega)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\int_{X_\beta} \psi(\sigma\omega)\varphi(\omega)d\rho_\beta &= \sum_a \int_{X_\beta} \psi(\omega)\varphi(a\omega)\, d\rho_\beta(a\omega)\\ &= \beta^{-1}\sum_a \int_{X_\beta} \psi(\omega)\varphi(a\omega)\, d\rho_\beta(\omega)\\ &= \int_{X_\beta} \psi(\omega)(S_\beta\varphi)(\omega)\, d\rho_\beta(\omega)\end{aligned}$$

注意. 一般の subshift に対して, 同様の作用素 S を定義できるが, 1) でさえ一般には成立しない. §4 で示したように, β-展開に関しては,

$$\left|\log \#(W_n(X_\beta)) - n\log\beta\right| \leq \frac{C_k}{n^k} \quad (\forall n\geq 0)$$

$\left(-\log\frac{1}{M_\beta(1-\beta^{-1})}\right)$

であるから, 1) が成立している.

補題 3 任意の $\varphi\in L^1(X_\beta, d\rho_\beta)$ に対して,

$$\lim_{k\to\infty} S_\beta^k\varphi = c(\varphi) f_\beta \qquad (\text{in } L^1(X_\beta, d\rho_\beta))$$

ここで, $c(\varphi)\in\mathbb{C}$, 従って

$$c(\varphi) = \int_{X_\beta}\varphi\, d\rho_\beta$$

さらに, この収束は, $\{\varphi\in L^1(X_\beta, d\rho_\beta) \mid \mathrm{ess.sup}|\varphi|\leq 1\}$ に対して一様である.

証明の概略を述べておこう. 先ず, $N_n(u) = \#\{w\in W_n(X_\beta) \mid$

$uw \in \mathcal{W}_{k+n}(X_\beta)\}$ とおくと，$u \in \mathcal{W}_k(X_\beta))$．§4と全く同様にして，$\lim \beta^{-n} N_n(u)$ の収束がいえる．φ が有限個の座標のみに依存する場合，L^∞-norm での一様収束が，これから従う．(実際は，$S^k\varphi$ に現われる $\mathcal{W}_k(X_\beta)$ 上の和を，$\mathcal{W}_{k-j}(X_\beta)\cdot \omega_\beta[0,j)$ 上の和の，j についての和に直して，j の大きい部分と小さい部分にわければよい) 後は，$L^1(X_\beta, d\rho_\beta)$ の元を，上のような φ で近似すればよい

定理の証明　$\mu([u], E_\omega) = \mu_\beta([u] \cap \sigma^{-k} E_\omega)$ とおけば，これは，$\mathcal{W}_k(X_\beta) \times X_\beta$ 上の確率測度を与える．補題1から，ω に関しては，ρ_β に絶対連続であるから，

$$(5) \qquad \int_{X_\beta} \mu([u], d\omega)\, \varphi \circ \sigma^k(\omega) - \mu_\beta([u])\, \mu_\beta(\varphi)$$

を評価するときに，補題2の作用素 S を使って書き直して，補題3を使えば，(5) が，$\|\varphi\| = 1$ に対して，一様に，さらにそれを $u \in \mathcal{W}_k(X_\beta)$ について足しあわせた際，k についても一様に，0に収束することがわかる．従って，条件(1)をみたす．

証明終．

後記

確率論的な立場から，symbolic dynamics あるいはその周辺の考え方がどの程度有効であるかわからないが，β変換

に関してわかっている性質を列挙してみた．Markov性の証明は，かなり簡略化されている．Weak Bernoulliであることの以前の証明は誤りで，例えば，最後の節に述べた方法によってできる．しかし，Smorodinskyの証明と比較すればわかるように，測度をはかるか，数えるかの違いだけであるかもしれない．