数理解析研究所講究録
147巻 1972年 1-10

多体問題におけるSmaleの結果について

広大 理 大槻舒一

§0 序

多体問題に関して多くの研究があるが[2,3,5]、ここで問題にするのは、この問題をHamiltonian systemとして把えて、そのintegral manifoldの型とその上の運動の型とを決定する事である。そこには安定性の問題、周期解の存在の問題、エルゴード性の問題も含まれている。従来、この本来の問題はmetrical theoryとtopological theoryとの両端に分割されていて、それぞれは理論的に完結していても、そこからの追究は本来の問題を射程距離におくことができなかった。この間にあって、Arnold、Moser、その他の研究は特筆すべきものがあった。複雑な近似法を用いて、ArnoldによるKolmogorov-Arnoldの定理の証明、それを用いてLeontovichによる制限三体問題のLagrange pointの安定性の証明、Moser[6]による解析性を落した一般化である。この他にも個別的に良い結果

が多数得られているが、問題を大域的なものとして見返した時、得られているのは、integrable case の Liouville-Arnold の定理[4]、geodesic flow に関する Anosov の定理など、そう多くは見られない。ここで紹介しようとする事柄は、平面運動の場合の多体問題の integral manifold の型を決定する方法とその結果である。[1] これを見ると、少なくとも integral manifold の型を位相的に決定する方法としては有力なものであるが、どうもその上の運動の問題が消えてしまっている感がある。我々としては、この Smale の仕事を歓迎するが、integrable case の様に integral manifold とその上の運動とを総合的に求める事が出来る方法が望ましいと思っている。

§1 問題の定式化

M をリーマン多様体，$\pi: TM \to M$ を tangent bundle，$V: M \to R$ を微分可能な函数、$K: TM \to R$ を $K(x, v) = K(v) = K_x(v, v)$ $v \in T_xM$（ここで K_x はリーマン計量）で定義される函数とする．以上によってこれらは Hamiltonian system になっていて、M 上に flow が定義されている。G を M 上に作用し、K と V を不変にするリー群とする。この時 (M, K, V, G) を対称性をもつ力学系と呼ぶことにする。$\mathfrak{g}$ を G のリー環、$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の内積上に関する dual とするとき、$X \in \mathfrak{g}$ に対して M 上の vector field

$\alpha(x)$ が対応し(すなわち写像 $\alpha_x : \mathfrak{g} \to T_xM$ が存在する)、α_x の双対写像を $J_{1x} : T_x^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ とすると、写像 $J_1 : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ が定義される。$J = J_1 \circ K^*$ と置き、また $E = K + V\circ\pi$ と置くと、J と K はこの system の第一積分になっている。
(E, J は古典力学において、全エネルギー、角運動量と呼ばれているものに対応している)

ここで Smale の提示した問題を述べよう。

<u>問題</u>　写像 $E \times J : TM \longrightarrow R \times \mathfrak{g}^*$ の大域的な性質を調べよ。

$E \times J$ が locally trivial でなくなる様な $R \times \mathfrak{g}^*$ の点の集合 Σ を bifurcation set と呼び、$I_{c,p} = (E \times J)^{-1}(c, p)$, $c \in R$, $p \in \mathfrak{g}^*$ を integral manifold と呼ぶ事にすると、これは少なくとも次の問題を含んでいる。

<u>問題</u>　$E \times J$ の bifurcation set と integral manifold とを求めよ。

Smale の主要な結果である平面上の n 体問題は、

$$M = \{ x = (x_1 \cdots x_n) \in (R^2)^n \mid x_i \in R^2, \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0 \}$$

$$TM = M \times M, \quad K(x, v) = K(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \| v_i \|^2$$

$$V(x) = -\sum_{i \neq j} m_i m_j / \| x_i - x_j \|, \quad J(x, v) = J_x(v) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \times v_i$$

$G = SO(2) = S^1$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* = R$　と置いたものである。

(ここで R^2 は2次元ユークリッド空間、$m_i > 0$ は質点の質量である。また $\Delta = \{ (x_1 \cdots x_n) \in M \mid x_i = x_j, i \neq j \}$ とすると V は

$M-\Delta$ 上で定義されていて実際の相空間としては $T=T(M-\Delta)$
$=(M-\Delta)\times M$ を考えている

以後この場合だけを扱う事にする。

§2 bifurcation set

平面の n 体問題の bifurcation set を求めるためには相対平衡点という概念が必要である。

<u>定義</u> $x=(x_1\cdots x_n)\in M-\Delta$ が相対平衡点（$x\in Re$ と書く）

$\Leftrightarrow$ $\varphi_t(x)=(\varphi_t(x_1)\cdots\varphi_t(x_n))$ を R^2 上の 1-para 回転群から導びかれた運動とすると、この運動が system としての運動になっている。

（すなわち全体の相対位置を保ちながら回転運動をしている状態である。）

$\overline{Re}=Re/[S^1,R^1]$ を位置関係が相似的な相対平衡点を同一視したものとする。（解析で平衡点というのは $\overline{Re}$ の元を指す場合が多い）

$\overline{Re}$ に関して $n=2,3$ の場合は古典的にすべて求まっている

<u>命題</u>

(a) $n=2$, $\overline{Re}$ が一個

(b) $n=3$, $\overline{Re}$ が5個（3つの Euler point と2つの Lagrange point）

（この他に任意のnに対して、$n!/2$個の共線的相対平衡点の存在がMoultonによって示されている）

相対平衡点を見つける簡単な方法がある。（これは古典的に隠れた形で用いられていた）

<u>定理 2.1</u>　(Euler-Lagrange)

平面上のn体問題において、$S_K = \{ z \in M \mid K(z) = 1 \}$，

$\tilde{V}_S = V / S_K - \Delta$　とすると，

$z \in S_K - \Delta$ ；相対平衡点 $\Longleftrightarrow$ z ；$\tilde{V}_S$ の critical point

この定理の証明は簡単な回転座標系に関する定理を用いる。この定理によって次の bifurcation set に関する定理が証明できる。

<u>定理 2.2</u>

平面上のn体問題において

(a)　$E \times J$ の critical point ；$\Sigma' = \bigcup_{\alpha \in R_e} \Sigma_\alpha$

ここで　$\Sigma_\alpha = \{ (-V(Pz)^2, P) \in R \times R \mid P \neq 0,\ z \in \alpha,\ K(z) = 1 \}$

(b)　bifurcation set　$\Sigma = \Sigma' \cup \{ C = 0 \} \cup \{ P = 0 \}$

この様に bifurcation set と相対平衡との関係を明確に示したのはSmaleが最初であろう。（ Birkhoff [2] などもこの事を暗示する様な事を言っているが、解析的手法でキッチリし

た事を言うのは困難な事である。特にその点を境にして integral manifold の topological type が変る事を示すのに、differential topology の発展を待たねばならなかった。)

§3 integral manifold

平面上の n 体問題の場合の integral manifold $I_{c,p}$ に関する結果を書き下してみよう。

<u>定理 3.1</u>

(a) $p=0$

(i) $c \geq 0$, $I_{c,p} \simeq S(E(S_k-\Delta))\times R^+$ (diffeo)

(ii) $c<0$, $I_{c,p} \simeq E(S_k-\Delta)$ (diffeo)

(b) $p\neq 0$, $c\geq 0$

$$I_{c,p} \simeq E(S_k-\Delta) \quad \text{(diffeo)}$$

(c) $p\neq 0$, $c<0$

$$I_{c,p} \simeq \mathfrak{Z}_k(Q_{c,p}) \quad (k=2n-2) \quad \text{(homeo)}$$

ここで，$E(S_k-\Delta)$ は $S_k-\Delta$ 上の $J_z^{-1}(0)$ を fibre とする fibre bundle（fibre に計量が入って Riemannian vector space bundle になっている），$S(E(S_k-\Delta))$ は $E(S_k-\Delta)$ に附随する unit sphere bundle，$Q_{c,p}=\ell_p^{-1}[-\infty,c]\subset S_k-\Delta$，($\ell_p(z)=-\overline{V}(Pz)^2$) $\mathfrak{Z}_k(Q_{c,p})$ は $S^{k-1}\times Q_{c,p}$ を $\partial Q_{c,p}$ において一点に潰して得ら

れる manifold である。

注　(a)(b)において、この diffeo は C に関して smooth になっている。(c)においては、$(C,P)\notin\Sigma$ において C に関して smooth な diffeo であるが、$(C,P)\in\Sigma$ においては、homeo しか言えない。

この様に $E(S_k-\Delta)$ を基礎として、必要ならば歪めたり、潰すという様な位相的な操作を行って integral manifold を求めようとするのが Smale の基本的な方法である。

定理3.1を用いれば $n=2,3$ の場合は、V に関する若干の仮定（すなわち m_i に関する仮定）があれば、integral manifold $I_{C,P}$ の位相的な型は求まるが、見よいものではないし、解析で得られている結果との対比が容易ではない。

必要な方は原論文[I]を見てもらいたい。

§4　定理3.1の略証

1　相空間 $T=T(M-\Delta)=(M-\Delta)\times M$ を極座標で表わすと $T=R^+\times(S_k-\Delta)\times M$ となる、このとき、

$$I_{C,P}=\{(t,z,v)\in T \mid v\in J_{tz}^{-1}(P),\ K(v)=C-V(tz)\}$$

$\alpha_P(x)$ を 0 から $J_x^{-1}(P)$ への vector で、K-norm に関して長さが最小なものとする。

$V_P(x)=V(x)+K(\alpha_P(x))$ と置くと，平面上の n 体問題の

場合は、$V_p(x) = V(x) + P^2 / \lambda(x)$、となる。

（この $V_p(x)$ を amended potential と呼んで注目した事は、Smaleの卓見であった。）

$$I'_{c,p} = \{(t, z, u) \in T \mid u \in J_z^{-1}(0),\ K(u) = c - V_p(tz)\}$$

と置くと、$(t, z, v) \rightsquigarrow (t, z, v - \alpha_p(tz) = u)$ の対応で

$I_{c,p} \simeq I'_{c,p}$ (diffeo) となる。

（この diffeo が証明の key point である。$I'_{c,p}$において、bundle structure が見てとれるであろう。）

2. $K(u) = c - V_p(tz) \geq 0$ であるから、t, z に関して制限がある事になる。

$V_p(tz) = c$ となる $t(c,p,z) > 0$ が存在するとき、それを $t_- \leq t_+$ とすると（存在するとしても高々2つ）、実は、

$$I'_{c,p} = \{(t, z, u) \in T \mid u \in J_z^{-1}(0),\ K(u) = c - V_p(tz),\ z \in Q_{c,p},\ t^- \leq t \leq t^+\}$$

（かならずしも t_-, t_+ が存在するとはかぎらないが $t_- \leq t \leq t_+$ を、t_- が存在しないとき $0 < t \leq t_+$、t_+ が存在しない時は $t_- \leq t < +\infty$ と解釈する。）

3. これから先は(a)(b)と(c)の場合で大きく分かれる。

$p = 0$, 又は $p \neq 0$, $c \geq 0 \Rightarrow Q_{c,p} = S_k - \Delta$

$p = 0$, $c \geq 0 \Rightarrow 0 < t < +\infty$

$p = 0$, $c < 0 \Rightarrow 0 < t \leq t_+ < +\infty$

$$P \neq 0,\ c \geq 0 \Rightarrow 0 < t_- \leq t < +\infty$$

となって(a)(b)の場合は見やすい。

4、 $P \neq 0,\ c < 0$ の場合、$Q_{c,P} \subsetneq S_K - \Delta$, $0 < t_- \leq t \leq t_+ < +\infty$ となって複雑である。

E ; S_K上の bundle (fibre は $J_z^{-1}(0)$)

ξ ; S_K上の trivial line bundle , ξ_zはE_zに対して法線方向のベクトル

この時、$E + \xi$ (Whitney sum) はS_K上の trivializable vector space bundle になっている。

(すなわち $E + \xi \simeq R^k \times S_K$)

$\tau(z) = \tau_P(z) = -P^2/2V(z)$ と置くと、$l_P(z) = V_P(\tau_P(z)\cdot z)$ であるが、実は $l_P(z) = \min_{t \in R^+} V_P(tz)$ となっている。

($K(u) = c - V_P(tz) \geq 0$ であるから上の事が、z が $Q_{c,P}$ に制限される理由である。)

$$g_P ; R^+ \times (S_K - \Delta) \longrightarrow \xi \quad \text{diffeo}$$

$$(t, z) \rightsquigarrow (t - \tau_P(z), z)$$

$$f_P ; (E + \xi) \longrightarrow R$$

($f_{P,z}(u, g_{P,z}(t)) = K(u) + V_P(tz)$, $t \in R^+$, $z \in Q_{c,P}$ で定義される函数で、$S_K - \Delta$上で smooth である)

このとき $f_P^{-1}(c) = I'_{c,P}$ となっているのである。

(実は $g_P \circ f_P^{-1}(c) = I'_{c,P}$)

$f_p ; R^k \times (S_k - \Delta) \to R$ と考えると $f_p^{-1}(c) \simeq \mathfrak{z}_k(\alpha_{c,p})$ を見るのはそう困難ではない。

Q.E.D

Reference

[1] Smale, S ; Topology and Mechanics I ; Inven. Math. 10 305～331 (1970), II, Inven. Math. 11, 45～64 (1970)

[2] Birkhoff, G.D ; Dynamical systems ; Providence (1966)

[3] Wintner, A ; The analytical foundations of celestial mechanics ; Princeton, N.J Univ. Press (1941)

[4] Arnold, V.I ; Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics ; Russian Math. Surveys 18 85～193 (1963)

[5] Sternberg, S ; Celestial Mechanics I, II ; Benjamin (1969)

[6] Moser, J ; Lecture on Hamiltonian systems