数理解析研究所講究録
148巻 1972年 20-24

PL多様体の Gauss map と全曲率について

横浜市大　文理　本間龍雄

§1 序

n次元ユークリッド空間R^nの中に埋め込まれたPL多様体に対し，全曲率を定義し，その全曲率と多様体の位相構造との関係，あるいは埋め込みのようすを調べようとする試みである。

全曲率は普通の全曲率と絶対全曲率の二種類にわけることができるが，両者とも多次元の角の和として，定義される。

普通の全曲率は Gauss map の写像度に関連し，結局その多様体のオイラーの標数で表現される。絶対全曲率は臨界点を用いて，定義するのが自然と思われるが，その多様体の凸性あるいは unknottedness と関連してくるものと予想される。

§2. 角の和について

MをR^nのn次元PL多様体，KをMの一つの単体分割とす

る。ξがKの任意の単体であるとき，ξのMに関する角$\angle(\xi, M)$ をつぎのように定義する。ξの内点をpとし，$S(p,r)$はpを中心とし，半径rの球面で，

$$S(p,r) \cap cl(M - |st(\xi, K)|) = \phi$$

であるとき，

$$\underline{\angle(\xi, M)} = \omega(S(p,r) \cap M)/r^{n-1}$$

とおく。ただし ω は面積を表わす。もちろん，$\angle(\xi, M)$の定義はpやrの選び方に無関係である。特にMがn次元単体η^nであるときは，つぎの定理が成立つ。

<u>定理 1.</u> $\displaystyle\sum_{\xi^i < \eta^n} (-1)^i \angle(\xi^i, \eta^n) = 0$

この定理は，三角形の内角の和が二直角であるという初等幾何の定理の拡張である。

$N = cl(R^n - M)$で，ξはKの境界$\dot{K}$の単体であれば，$\angle(\xi, M)$の定義と同様にして，$\angle(\xi, N)$が定義されるが，Mがコンパクトなn次元PL多様体であるとき，定理1を用いて，つぎの定理を得る。

<u>定理 2</u> $\displaystyle\sum_{\xi^i \in \dot{K}} (-1)^i \angle(\xi^i, N) = \chi(M)\ \omega(S)$。

ただし，$\chi(M)$ は M のオイラーの標数，S は $n-1$ 次元単位球面である。

§3. Gauss map について

η^n が R^n の n 次元単体で，ξ^i を η^n の i 次元面，$\hat{\xi}^{n-i-1}$ を ξ^i の対面とすると，η は ξ と $\hat{\xi}$ のジョイン $\eta=\xi\hat{\xi}$ と書ける。$p\in\xi$，$q\in\hat{\xi}$ ならば，単位ベクトル $\frac{\overrightarrow{pq}}{\overline{pq}}$ を単位球面上の一点と見なして，

$$\underline{\hat{\angle}(\xi^i,\eta^n)}=\omega\left\{\frac{\overrightarrow{pq}}{\overline{pq}}\ \middle|\ p\in\xi^i,\ q\in\hat{\xi}^{n-i-1}\right\}.$$

とおくと

$$\hat{\angle}(\xi^i,\eta^n)=\hat{\angle}(\hat{\xi}^{n-i-1},\eta^n)$$

は明らかであるが，さらにつぎの定理が成立する。

<u>定理 3</u>　$$(-1)^i\hat{\angle}(\xi^i,\eta^n)=\sum_{\zeta^j<\xi^i}(-1)^j\angle(\zeta^j,\eta^n)$$

P を R^n のコンパクト多面体，$H\supset K$ は $R^n\supset P$ の単体分割で，K は H のフルな部分複体とする。$f:H\to[0,1]$ は線型写像（H の各単体上で線型）で，$\xi\in K$ ならば $f(\xi)=0$，$\xi\in H$，$\xi\cap K=\phi$ ならば，$f(\xi)=1$ とする。いま，$f^{-1}([0,\frac{1}{2}])=M$ とすると，M は P の正則近傍であり，

$f^{-1}(\frac{1}{2})$ は M の境界 $\dot{M}$ であって，それぞれ n 次元，$n-1$ 次元多様体である。

$\dot{M}$ の各点 x に対し，x を含む M の単体を η とすると，K はフルであるから，$\eta \cap P = \xi$ は η の面である。ξ の対面を $\hat{\xi}$ とする。ξ 上の点 p と $\hat{\xi}$ 上の点 q が x に対し一意的に定まり，x は pq の中点となる。したがって，x に対応して，単位ベクトル $\frac{\overrightarrow{pq}}{\overline{pq}}$ が一意的に定まったことになるから，$f(x) = \frac{\overrightarrow{pq}}{\overline{pq}}$ とおくと，

$$f : \dot{M} \to S$$

は正則近傍 M の境界 $\dot{M}$ から単位球面 S への写像となる。f の写像度を $\underline{deg(f)}$ で表わすと，定理3を用いて，つぎの定理が証明される。

<u>定理4</u>　$\deg(f) = \chi(P) = \chi(M)$.

§4 絶対全曲率について

M を R^n の中に埋め込まれた locally flat な m 次元 PL 閉多様体とする。v を R^n の単位ベクトル，p を M の点とする。p を通る v に垂直な $n-1$ 次元超平面 E^{n-1} と M の交わり

MのE^{m+1}が，pにおいて $m-1$次元PL球を近傍として
もつとき，pはv方向に対し<u>臨界点でない</u>という。

$$\underline{\hat{\tau}(p,M)} = \frac{1}{2}\omega\{v \mid v \in S,\ p\text{はv方向に対し臨界点}\}$$

とおくと，pがMの単体分割Kの頂点でなければ，$\hat{\tau}(p,M) = 0$ である。

$$\underline{\mathcal{K}(M)} = \Sigma\{\hat{\tau}(p,M) \mid p\text{はKの頂点}\}$$

とおくと，$\mathcal{K}(M)$はKの選び方によらない。これをMの<u>絶対全曲率</u>と呼ぶことにする。つぎの定理は明らかである。

<u>定理5</u>　$\mathcal{K}(M) \geqq \omega(S)$

さらにつぎの予想がたてられる。

予想1.　$\mathcal{K}(M) = \omega(S)$ ならば，Mは$m+1$次元凸体の境界である。

予想2.　$\mathcal{K}(M) < 2\omega(S)$ ならば，Mはm次元PL球で，unknottedである。