

Sheaf 理論の位相空間

への応用に ついて

東京教育大 理 児玉 之光

§ 1. 序

Sheaf 理論が代幾何、代数的位相幾何、関数論等には中々
り応用面を持つことはよく知られてゐる。この小論では Sheaf
が位相空間論にも興味ある応用面を持つことを二方面に ついて
述べてみる。その一つはコンパクト化に關することであり、

他は次元論に對するものである。この方面では多くの興味
ある部分が未開闢に残つており、この論で述べることは氷山の
一角にすぎない。Sheaf に ついての定義、記号等は God-
ement [2], Grothendieck [3] に よる。この論では Sheaf に よ
つてつねに加群の sheaf を意味し、単像はすべて連続である
とする。

§ 2.

X を位相空間、 A を X 上の sheaf とする。 $A \subset X$ に ついて
 $A|A$ は A に制限した A 上の sheaf である。また $A(A)$ は

A 上での A の section の作る加群を意味する。 $x \in X$ について A_x があることは $(A)_x$ は x 上の A の stalk である。 X 上の sheaf の complex $A^* = \{A^i: i=0, 1, \dots\} : A^0 \xrightarrow{\delta} A^1 \xrightarrow{\delta} \dots \rightarrow A^i \rightarrow \dots$, $\delta^2 = 0$, と X の部分集合 A について, $\mathcal{H}^i(A^*|A)$ は A 上の i -次 cohomology sheaf を意味し, $H^i(A^*|A)$ は上の sheaf の complex から得られる加群の cochain complex: $A^0(A) \rightarrow A^1(A) \rightarrow \dots \rightarrow A^i(A) \rightarrow \dots$, の i -次 cohomology 群を表わす。 また A を得たとする X の i -次 sheaf cohomology 群は $H^i(X; A)$ で表わされる。

(2.1) G を各 stalk が加群 G である constant sheaf であり, X がハウスドルフ空間ならば, $H^i(X; G)$ は G を得たとする X の Čech cohomology group に等しい。(Godement [2])

(2.2) A が X 上の injective sheaf であり, A が X の閉集合ならば, $A|A$ は A 上の soft sheaf である (Grothendieck [3])。

$f: X \rightarrow Y$ を写像, A を X 上の sheaf, $f(A)$ は A の f による direct image を表わす。

(2.3) A が injective であるならば, $f(A)$ は injective である。

$f: X \rightarrow Y$ をハウスドルフ空間 X から Y への写像とする。 B を Y の閉集合, $A = f^{-1}(B)$ とおく。 以下の事実は Godement [2], Grothendieck [3], [4] に与えられている。

(2.4) $f(A)|B = f(A|A)$ (sheaf の category 上の functor 4.2)。

$$(2.5) \quad i_f : f(A)(B) \cong A(A).$$

(2.6) (2.5) より $A^* \in X$ 上の sheaf の complex とすれば, 同型対応 $j_i : H^i(f(A^*)|B) \cong H^i(A^*|A)$, $i=0, 1, 2, \dots$, が得られる. 特異に B が 1 点 y から成るとき, $(\mathcal{H}^i(f(A^*)))_y \cong H^i(A^*|f^{-1}(y))$.

(2.7) $A \in X$ 上の sheaf, $\mathcal{L} \in Y$ 上の sheaf, $h: \mathcal{L} \rightarrow f(A)$ は $\mathbb{Z}$ 同型とす. $\mathcal{J}^*$, $\mathcal{J}^* \in$ とれとれ A , $\mathcal{L}$ の injective resolution とすれば, $f(\mathcal{J}^*)$ は Y 上の injective sheaf から成る complex であるから (2.3), $\mathbb{Z}$ 同型 $h^i: \mathcal{J}^i \rightarrow f(\mathcal{J}^i)$ が得られる. $\mathcal{J}^i$ の可換図形が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{J}^0 & \rightarrow & \mathcal{J}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{J}^i \rightarrow \dots \\ & & \downarrow h & & \downarrow h^0 & & \downarrow h^1 \\ 0 & \rightarrow & f(A) & \rightarrow & f(\mathcal{J}^0) & \rightarrow & f(\mathcal{J}^1) \rightarrow \dots \rightarrow f(\mathcal{J}^i) \rightarrow \dots \end{array}$$

h^i は chain homotopy の $\mathbb{Z}$ unique に定まる. 尤も Y の開集合 B , $A = f^{-1}(B)$ により $\mathbb{Z}$ 同型 $h^*: \mathcal{H}^i(\mathcal{J}^*|B) \rightarrow \mathcal{H}^i(f(\mathcal{J}^*|A))$, $h^*: H^i(\mathcal{J}^*|B) \rightarrow H^i(f(\mathcal{J}^*|A))$ が得られる. =

のとき (2.2) より $\mathcal{J}^*|B$ は $\mathcal{L}|B$ の soft resolution であるから,

$$H^i(\mathcal{J}^*|B) = H^i(B: \mathcal{L}|B). \quad \text{また (2.5) より } H^i(f(\mathcal{J}^*|A)) \stackrel{j_i}{\cong}$$

$$H^i(\mathcal{J}^*|A) = H^i(A: A|A) \quad \text{であるから, } \mathbb{Z} \text{ 同型 } \tau(h, f): H^i(B:$$

$$A|B) \rightarrow H^i(A: A|A) \quad \text{が得られる.}$$

(2.8) direct image functor は left exact であるから (2.6), (2.7)

$$\text{より } \tau(1, f): H^0(B: f(A)|B) \cong H^0(A: A|A).$$

(2.9) Z は $\mathbb{Z}$ 同型の sheaf とし Z_x により Z の stalk が Z である X

上の constant sheaf とする。direct image の定義より monomorphism $h: Z_Y \rightarrow f(Z_X)$ が得られる。(2.7) と (2.8) から $r(1, f): H^0(Y: f(Z_X)) \cong H^0(X: Z_X)$, また $r(h, f)$ は合成写像 $r(1, f)h^*: H^i(Y: Z_Y) \rightarrow H^i(X: Z_X)$ であり, これは f による誘導された integral Čech cohomology 群の間の準同型に等しい。

次の様な問題が K. Kuratowski によって与えられた。

(2.10) U と V は n -次元空間 R^n の有界連結開集合とする。もし U と V が同相ならば, $R^n - U$ と $R^n - V$ の連結成分からなる集合の濃度は等しいか?

この問題は, M.K. Fort, Jr [1] によって代数的手段を用いて肯定的に解かれた。E.G. Sklyarenko は sheaf を用いて上記の解を含む差別的な経路を与えた。

定義 1. 完全正則空間 X のコンパクト化 αX は, $\alpha X - X$ の各コンパクト連結部分集合の 1 点から成るとし, punctiform コンパクト化とされる。

定義 2. コンパクト化 αX が 完全 であるとは, X の任意の開集合 U について $O(U) = \alpha X - \overline{X - U}^{\alpha X}$ とおくと, $Bd_{\alpha X} O(U) = \overline{Bd_X U}^{\alpha X}$ が成立する。ここで $\overline{\quad}^{\alpha X}$ は αX での閉包を, $Bd_{\alpha X}$ は αX での境界を意味する。

(2.11) αX が完全コンパクト化である必要十分条件は, 射影

$\pi: \beta X \rightarrow \alpha X$ が monotone であることは、 $\pi: \beta X$ は X の Stone-Čech π -コンパクト化である。

(2.12) X が minimal な完全 π -コンパクト化 μX を持つための必要十分条件は、 X が π と 1 の punctiform π -コンパクト化を持つことである。このとき μX は maximal な punctiform π -コンパクト化である。

(2.11) と (2.12) は E.G. Sklyarenko [10] による。

定理 1 (Sklyarenko [12]). X, Y は同相な連結完全 π -空間とし、 $\alpha X, \gamma Y$ はその punctiform π -コンパクト化とする。 $\pi: \beta X \rightarrow \alpha X, \nu: \beta Y \rightarrow \gamma Y$ を射影とする。もし π, ν が 1:2 の integral Čech cohomology 群の間の monomorphism を誘導するならば、任意の同相写像 $f: X \rightarrow Y$ は同相写像 $\bar{f}: \alpha X \rightarrow \gamma Y$ に拡張される。

定理 1 が Kuratowski の問題 (2.10) に解を与えることは、7章の補題に示される。明らかに $n > 1$ とする。 $S^n \in \pi$ 次元球面とし、 $S^n \supset U, V$ とする。 αU は S^n から $S^n - U$ の各連結成分を 1 点に縮めた空間とし、 $h: S^n \rightarrow \alpha U$ を商写像とする。 h は monotone であるから Vietoris-Begle の定理により、 $h^*: H'(\alpha U) \rightarrow H'(S^n)$ は monomorphism である。($\Rightarrow H'(\alpha U)$ は integral Čech cohomology 群である。) したがって $H'(\alpha U) = 0$ 。同様に γV は S^n から $S^n - V$ の各連結成分を 1 点に縮めた商空間

同値ならば, $H'(\gamma V) = 0$. $\alpha U \in \gamma V$ は $U \in V$ の punctiform
 $\gamma =$ パラト化であるから, 定理 1 により任意の同相写像 $f:$
 $U \rightarrow V$ は同相写像 $f: \alpha U \rightarrow \gamma V$ に拡張される. 二れより集合
 $\alpha U - U$ と $\gamma V - V$ の濃度は等しい, したがって $S^n - U$ と $S^n - V$ の
 連結成分からなる集合の濃度は等しい.

(定理 1 の証明). (2.11) と (2.12) より π と ν が monotone である
 $\Leftrightarrow \varepsilon$ である. π が monotone である $\Leftrightarrow \varepsilon$ を示す. $Z_{\beta x}$
 の direct image を考えよ. 各 $x \in \alpha X$ について π の stalk $(f(Z_{\beta x}))_x$
 は (2.6) より $H^0(\pi^{-1}(x): Z_{\beta x} | \pi^{-1}(x))$ であるから, 各々の群が Z
 と同型である $\Leftrightarrow \varepsilon$ である. 二れから $h: Z_{\alpha x} \rightarrow f(Z_{\beta x})$ は
 natural monomorphism とし f は h の同型 ε である. 正
 列: $0 \rightarrow Z_{\alpha x} \xrightarrow{h} \pi(Z_{\beta x}) \rightarrow \pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x} \rightarrow 0$ は 正列: $0 \rightarrow$
 $H^0(\alpha X: Z_{\alpha x}) \xrightarrow{h_0^*} H^0(\alpha X: \pi(Z_{\beta x})) \rightarrow H^0(\alpha X: \pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x}) \rightarrow H'(\alpha X: Z_{\alpha x})$
 $\xrightarrow{h_1^*} H'(\alpha X: \pi(Z_{\beta x})) \rightarrow H'(\alpha X: \pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x})$ に誘導する. $\alpha X, \beta X$
 は連結であるから, (2.9) より $\gamma(1, f)h_0^*: H^0(\alpha X: Z_{\alpha x}) \rightarrow H^0(\beta X: Z_{\beta x})$
 は同型であり h_0^* は同型となる. また $\gamma(1, f)h_1^*$ は段々
 monomorphism であるから, h_1^* は monomorphism となる.
 二れから $H^0(\alpha X: \pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x}) = 0$ となる. この群は αX 上
 の $\pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x}$ の section の加群に等しい. αX が punctiform
 $\gamma =$ パラト化であり, $x \in X$ について $\pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x}$ の stalk $(\pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x})_x =$
 0 であるから, $\pi(Z_{\beta x})/Z_{\alpha x} = 0$ が得られる. 二れから h は

同型対応となる。

Sklyarenko [11] は更に次の様な興味ある定理を証明した。

定理 2. $\alpha X, \gamma X \in X$ の punctiform $\mathcal{O} =$ パクト化とする。

X の点の部分 σ なる半像 $f: \alpha X \rightarrow \gamma X$ が存在し、 $f^*: H^i(\gamma X) \rightarrow H^i(\alpha X)$ が $i=0$ で同型、 $i=1$ で monomorphism ならば、 f は同相半像である。

定理 3. X が punctiform $\mathcal{O} =$ パクト化をなすならば、射影が同型対応 $H^0(\beta X) \cong H^0(\alpha X)$ を誘導する様な任意の punctiform $\mathcal{O} =$ パクト化 αX の weight はすべて等しい。

次節論において、sheaf 理論が重要な役割を演ずることは [5], [6], [7], [8] 等でもよく知られている。この方面で Zariski [15] と Skolder [13], [14] は興味ある結果を得た。今傍ら T_2 の空間はパラ $\mathcal{O} =$ パクト T_2 であるとする。 A を空間 X 上の sheaf, $U \in X$ の開集合とする。 A_U を次の様な A の部分 sheaf とする； $(A_U)_x = A_x, x \in U$ ； $(A_U)_x = 0, x \notin U$ 。

定義 2. $D(X; A) = \max \{ n : \text{ある開集合 } U \subset X \text{ について } H^n(X; A_U) \neq 0 \}$ 。

(2.13) $\dim X = D(X; Z_X)$ ([9: Appendix] 参照)。

(2.14) $D(X; A) \leq n \iff A$ の $n+1$ の soft resolution: $0 \rightarrow A \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^n \rightarrow 0$ が存在する。

(2.15) $f: X \rightarrow Y$ が同相半像で $\dim f = 0$ ならば、 $\gamma(1, f)$:

$$H^i(Y: f(A)) \cong H^i(X: A), i=0, 1, \dots \quad \text{且} \quad D(Y: f(A)) \leq D(X: A).$$

$$\therefore \dim f = \max \{ \dim f^{-1}(y) : y \in Y \}.$$

A. Zarelua [15] は (2.14) を更に詳しく分析する為に、次の概念を導入した。

定義 3. sheaf の system $\Sigma = \{U_\lambda, A_\lambda, \gamma_\mu^\lambda\}$ は X 上の partial inductive system である: (1) $\{\lambda\}$ は directed set であり $\{U_\lambda\}$ は X の開被覆である, (2) A_λ は U_λ 上の sheaf , (3) $\lambda \geq \mu$ ならば $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ であり γ_λ^μ は同型 $A_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu} \rightarrow A_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ であり, $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_1$ ならば $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \neq \emptyset$ であり $\gamma_{\lambda_n}^{\lambda_1} = \gamma_{\lambda_n}^{\lambda_{n-1}} \dots \gamma_{\lambda_2}^{\lambda_1}$ であり, (4) $x \in U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}$ ならば, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq \mu$ ならば $x \in U_\mu \cap U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}$ である. 更に Σ は, (5) γ_μ^λ は monomorphism であり, $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば $\lambda_1, \lambda_2 \leq \mu$ ならば $\lambda_1, \lambda_2 \leq \mu$, $U_\mu = U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2}$ ならば μ である, である. Σ は inductive である.

partial inductive system $\Sigma = \{U_\lambda, A_\lambda, \gamma_\mu^\lambda\}$ に対しては $x \in X$ に対して $A_x = \{\lambda : x \in U_\lambda\}$ であり, $\{(A_\lambda)_x : \gamma_\mu^\lambda, \lambda \in A_x\}$ は x 上の inductive system である. $A_x = \varinjlim \{(A_\lambda)_x\}$, $A_\infty = \bigcup_{x \in X} A_x$ である. presheaf から sheaf へ行くと同様の方法に従って, A_∞ に位相を導入すれば A_∞ は X 上の sheaf である. A_∞ は Σ の limit である.

定義 4. X の開集合 U 上の sheaf A に対して, X の A は (国

ある 相対次元 $\dim(X:A) \leq n$ ならば, U に含まれる X の任意の開集合 F に対して $\dim(F:A) \leq n$ となるのである.

(2.16) $\Sigma = \{A_\lambda\}$ が X 上の sheaf の $\mathbb{C}$ -則 partial inductive system である. 各 A_λ に対して $\dim(X:A_\lambda) \leq n$ ならば, Σ の limit A に対して $\dim(X:A) \leq n$ である.

$f: X \rightarrow Y$ が finite to one (各 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ が有限個の点からなる) 射影像である. $n \geq 0$ に対して $X_n = \cup \{f^{-1}(y) : f^{-1}(y) \text{ が } \leq n \text{ 個の点からなる}\}$ とおく. X の部分集合 M に対して, $\text{rd}_X M = \max \{\dim F : F \text{ は } M \text{ に含まれる } X \text{ の開集合}\}$ である. $M = \emptyset$ のとき $\text{rd}_X M = -\infty$ とおく.

(2.17) $f: X \rightarrow Y$ が finite-to-one 射影像ならば, 次のような sheaf の $\mathbb{C}$ -列 $\mathcal{G}^i, i=1, 2, \dots$, が存在する; $0 \rightarrow \mathcal{Z}_Y \rightarrow f(\mathcal{Z}_X) \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \mathcal{G}^2 \rightarrow \dots$.

(2.16) と (2.17) より spectral sequence を計算すると $n \geq 0$ となる次の重要な定理が得られる.

定理 4. $f: X \rightarrow Y$ が finite to one 射影像ならば $\dim Y \leq \max_{0 \leq n < \infty} \{\text{rd}_X X_{n+1} + n\}$. 特には各 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ が高々 $n+1$ 個の点から成る場合には, $\dim Y \leq \dim X + n$ である.

Zarelua [15] はまた, (2.17) を使用して本エッセイの第 1 章に同じ Chernavskii の結果を含む定理を証明した.

次の定理は Skovder [13], [14] によって与えられた. これは

は Hurewicz の結果の精密な一般化である。

定理 5. $f: X \rightarrow Y$ ε $\dim f = 0$ とする開写像 εL , $\dim Y \geq \dim X + k$ とする。 $rd_Y Y_{s+1} \geq \dim Y - s$, $s = 0, 1, \dots, k$, が成り立つ。

定理 6. $f: X \rightarrow Y$ ε 開写像 εL , $\dim Y \geq \dim X + k$ とする。 $g \geq 0$ により $M_g = \{y \in Y: \dim f^{-1}(y) \geq g\}$ とおく。 ある $l \geq 0$ により $\max_{g \geq 0} (rd_Y M_g + g) \leq \dim Y - l$ が成り立つれば、任意の $s \leq \min(l-1, k)$ により $rd_Y Y_{s+1} \geq \dim Y - s$ であり、更に $l \leq k$ とすれば $rd_Y Y_{l+1} \geq \dim Y - l - \dim f$ が成り立つ。

定理 7. $f: X \rightarrow Y$ ε 開写像 εL , $\dim Y \geq \dim X + 1$ とする。このとき $rd_Y Y_2 \geq \dim Y - \dim f - 1$ が成り立つ。もし $rd_Y Y_2 = \dim Y - \dim f - 1$ が成り立つれば、 $rd_Y M_1 = rd_Y M_2 = \dots = rd_Y M_{\dim f} = rd_Y Y_2$ とする。このとき M_g , $g = 1, \dots, \dim f$, は定理 6 の様に定義される。

問題 1. Sklyarenko の定理は、「適当な条件をもつ写像 $X \rightarrow Y$ が $\alpha X \rightarrow \alpha Y$ に拡張される」という形で一般化できるか? 1211 又は、与えられた写像 $f: X \rightarrow Y$ が perfect かつ monotone である場合はどうか?

問題 2. 上記の次に因る定理 (4-7) に集合論的証明が与えられるか?

次の問題の解決には, *sheaf* が非常に有効であるように思われる. ([6], [7], [9] 参照.)

問題 3. 次の標数 p は存在するか? すべての完備な可分距離空間 X に対し, $\dim(X \times X) \geq 2 \dim X - p$ が成立する. (X がコンパクト空間ならば $p=1$ となる.)

問題 4. $\dim(X \times X) = 2 \dim X$ となる可分距離空間は?

参考文献

[1] M.K. Fort, Jr., The complements of bounded, open, connected subsets of Euclidean space, *Bull. Acad. Polonaise des Sciences*, vol. 9 (1961), 457-460.

[2] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, Paris (1958).

[3] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologie, *Tohoku Math. J.*, 9(1957), 119-221.

[4] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique*. III, *Publ. Math. IHES*, 11(1963).

[5] Y. Kodama, A remark on the cohomology group and the dimension of product spaces, *J. of Math. Soc. Japan*, 21(1969), 54-57.

[6] Y. Kodama, On subset theorems and the dimension products, *Amer. J. of Math.*, 91(1969), 486-498.

- [7] V. I. Kuzminov, Test spaces with respect to cohomological dimension of paracompact spaces, *Doklady Acad. Nauk SSSR*, 181 (1968), 538-541.
- [8] V. I. Kuzminov, Homological dimension theory, *Uspehi Mat. Nauk*, 23, 5(143)(1968), 3-49.
- [9] K. Nagami, *Dimension theory*, Academic Press (1970).
- [10] E. G. Sklyarenko, Some questions in the theory of bicompatifications, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 26(1962), 427-452.
- [11] E. G. Sklyarenko, Bicompatifications with penciliform boundaries and cohomology groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 27 (1963), 1165-1180.
- [12] E. G. Sklyarenko, Some applications of the theory of sheaves in general topology, *Uspehi Mat.* 19.6(120)(1964), 41-62.
- [13] G. S. Skorder, On dimension raising mappings, *Mat. Zam.* 7.6(1970), 697-705.
- [14] G. S. Skorder, On resolutions of continuous mappings, *Mat. Sb.* 82(124)(1970), 532-550.
- [15] A. V. Zarelua, Finite to one mappings of topological spaces and cohomology manifolds, *Sibirsk Mat. J.*, 10(1969), 64-92.