

3次方程式 (Cardano 法)

東芝 加山 実生
東芝 平野 菅保

§ 1. 序

3次方程式を解く有名な公式 Cardano 法 (1545 年) は、実際に使用して解を求めると、解の精度が著しく悪い場合がある。したがって、一般には、解の精度も良く、効率のよい解法として Newton 法 (繰り返し法) を用いている。しかし、「2次方程式の解法と同様に、よく説明に用いられている公式を変形することによつて、解の精度を悪くしない公式が必ず求められるであろう。」という考えを従来持っていたので、今回、現在までに既知である Cardano 法の特徴をはつきりさせ、解の精度が3次方程式の係数の精度より当然得られる精度まで得られる公式を求めることにした。

§ 2. Cardano 法の計算手順

与えられる3次方程式を次の (2-1) 式とする。

$$(2-1) \quad a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$$

a_3, a_2, a_1, a_0 は複素係数

$$(2-1') \quad X^3 + (a_2/a_3)X^2 + (a_1/a_3)X + (a_0/a_3) = 0$$

$$X = Y + \bar{X} \text{ とおく}$$

$$(2-2) \quad Y^3 + \{3\bar{X} + (a_2/a_3)\}Y^2 + \{3\bar{X}^2 + 2(a_2/a_3)\bar{X} + (a_1/a_3)\}Y \\ + \{\bar{X}^3 + (a_2/a_3)\bar{X}^2 + (a_1/a_3)\bar{X} + (a_0/a_3)\} = 0$$

(2-2) 式の Y^2 の係数を零とする。

$$3\bar{X} + (a_2/a_3) = 0$$

$$(2-3) \quad \bar{X} = -(a_2/3a_3)$$

$$(2-2') \quad Y^3 + 3PY + Q = 0$$

$$(2-4) \quad P = \bar{X}^2 + (2/3)(a_2/a_3)\bar{X} + (a_1/a_3)/3 \\ = -(a_2/3a_3)^2 + (a_1/3a_3)$$

$$(2-5) \quad Q = \bar{X}^3 + (a_2/a_3)\bar{X}^2 + (a_1/a_3)\bar{X} + (a_0/a_3) \\ = 2(a_2/3a_3)^3 - (a_1/a_3)(a_2/3a_3) + (a_0/a_3)$$

$Y = u + v$ とおいて (2-2') 式に代入する。

$$(u+v)^3 + 3P(u+v) + Q = 0$$

$$u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + 3P(u+v) + Q = 0$$

$$(u^3 + v^3 + Q) + 3(uv + P)(u+v) = 0$$

したがって、次の (2-6) 式を満足する u, v が求められればよい。

$$(2-6) \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -Q \\ uv = -P \end{cases}$$

$$(2-6') \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -Q \\ u^3 v^3 = -P^3 \end{cases}$$

次に、(2-7) 式の解と係数の関係を求める。

$$(2-7) \quad w^2 + qw - p^3 = 0$$

$$(2-8) \quad \begin{cases} w_1 = (-q + \sqrt{q^2 + 4p^3})/2 \\ w_2 = (-q - \sqrt{q^2 + 4p^3})/2 \end{cases}$$

$$(2-9) \quad \begin{cases} w_1 + w_2 = -q \\ w_1 w_2 = -p^3 \end{cases}$$

(2-6') 式と (2-9) 式より、 w_1, w_2 と u^3, v^3 の関係は次の

(2-10) 式になる。

$$(2-10) \quad \begin{cases} u^3 = w_1 = (-q + \sqrt{q^2 + 4p^3})/2 \\ v^3 = w_2 = (-q - \sqrt{q^2 + 4p^3})/2 \end{cases}$$

$$(2-11) \quad \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{(-q + \sqrt{q^2 + 4p^3})/2} \\ u_2 = u_1 \omega \\ u_3 = u_1 \omega^2 \\ v_1 = \sqrt[3]{(-q - \sqrt{q^2 + 4p^3})/2} \\ v_2 = v_1 \omega \\ v_3 = v_1 \omega^2 \end{cases}$$

注 $\omega = -0.5 + \sqrt{0.75} i$

又、(2-6) 式の第2式より、次の (2-12) 式がなりたつ。

$$(2-12) \quad u_i v_i = -p \quad i=1, 2, 3$$

$$(2-12') \quad u_i = -p/v_i \quad i=1, 2, 3$$

したがって、 $Y_i, X_i (i=1, 2, 3)$ は (2-13), (2-14) 式で表

わされる。

$$(2-13) \quad Y_i = u_i + v_i = u_i - P/u_i = -P/v_i + v_i \quad i=1, 2, 3$$

$$(2-14) \quad X_i = Y_i + \bar{X} = Y_i - (a_2/3a_3) \quad i=1, 2, 3$$

(2-14) 式により X_i を求める場合、(2-15) 式がなりたつと

(2-16) 式がなりたつ。

$$(2-15) \quad |X_i| \ll |\bar{X}| = |(a_2/3a_3)|$$

$$(2-16) \quad |Y_i| \div |\bar{X}| = |(a_2/3a_3)|$$

すなわち、(2-14) 式で得られる解 X_i は (2-15) 式の関係がなりたつと、 Y_i と \bar{X} の加算により桁落ち現象が起り、有効桁数の減少、桁落ち誤差が大きくなる。この (2-14) 式での桁落ち誤差は (2-3) 式の \bar{X} を (2-4)、(2-5) 式に代入して得られる (2-2') 式の係数 P 、 q を用いて計算する限り、(2-6) 式から (2-13) 式までの計算式をどのように変形しても防ぐことができない。

2次方程式についても同様なことがいえる。

$$(2-17) \quad aX^2 + bX + c = 0 \quad a, b, c \text{ は複素係数}$$

$$(2-17') \quad X^2 + (b/a)X + (c/a) = 0$$

$$X = Y + \bar{X} \text{ とおく。}$$

$$(2-18) \quad Y^2 + \{2\bar{X} + (b/a)\}Y + \{\bar{X}^2 + (b/a)\bar{X} + (c/a)\} = 0$$

(2-18) 式の Y の係数を零とする。

$$2\bar{X} + (b/a) = 0$$

$$(2-19) \quad \bar{X} = -(b/2a)$$

$$(2-20) \quad Y^2 + R = 0$$

$$(2-21) \quad R = \bar{X}^2 + (b/a)\bar{X} + (c/a) \\ = -(b/2a)^2 + (c/a) \quad [= (-b^2 + 4ac)/4a^2]$$

$$(2-22) \quad Y_1 = \sqrt{-R} \quad [= \sqrt{b^2 - 4ac}/2a]$$

$$Y_2 = -\sqrt{-R} \quad [= -\sqrt{b^2 - 4ac}/2a]$$

$$(2-23) \quad X_i = Y_i + \bar{X} = Y_i - (b/2a) \quad i = 1, 2$$

(2-23) 式より得られる X_i と (2-19) 式より得られる \bar{X} との間には (2-24) 式がなりたつと、(2-25) 式がなりたつ。

$$(2-24) \quad |X_i| \ll |\bar{X}| = |b/2a|$$

$$(2-25) \quad |Y_i| \div |\bar{X}| = |b/2a|$$

すなわち、(2-24) 式がなりたつ解 X_i は (2-20) 式の係数、(2-21) 式の R を用いて Y_i を計算している限り、(2-23) 式で桁落ち誤差が入ってしまう。

ところで、(2-23) 式で有効桁数が減少する場合には、どんな性質があるだろうか。

① (2-23) 式で用いる Y_1 と Y_2 とは複素平面で考えると実数部、虚数部共に符号が反対であるから、解 X_1, X_2 は有効桁数の減少が同時に起ることはない。有効桁数が減少した解を X_2 とすると、(2-26) 式がなりたつ。

$$(2-26) \quad |X_2/X_1| \ll 1.0$$

② 有効桁数の減少が起る場合は、(2-25)式〔3次方程式の場合は(2-16)式〕がなりたつときである。

①の $|X_1| \gg |X_2|$ である場合、(2-17')式の係数は次のように表わされる。

$$b/a = -(X_1 + X_2) \doteq -X_1$$

$$c/a = X_1 \cdot X_2$$

$$X^2 + (-X_1)X + X_1 \cdot X_2 = 0$$

(2-19), (2-21), (2-22)式は次のようになる。

$$\bar{X} = X_1/2$$

$$R = -X_1^2/4 + X_1 \cdot X_2 \doteq -X_1^2/4$$

$$Y_1 = X_1/2, \quad Y_2 = -X_1/2$$

\bar{X} , R , Y_1 , Y_2 の中には絶対値の小さい解 X_2 は入っていない。次の(2-23)式を計算すると、解 X_2 には桁落ち誤差が大きくなる。

$$X_1 = Y_1 + X_1/2 = X_1$$

$$X_2 = Y_2 + X_1/2 = \varepsilon \quad \varepsilon: \text{零でなく誤差}$$

次に、3次方程式(2-1')式の解 X_1 , X_2 , X_3 と(2-3)式の \bar{X} との関係を考える。解と係数の関係より(2-27)式が得られる。

$$(2-27) \quad \bar{X} = -(a_2/3a_3) = (X_1 + X_2 + X_3)/3$$

(2-27)式より、解 X_1 , X_2 , X_3 の絶対値が共に \bar{X} の絶対値より小さいことはありえない。したがって、 \bar{X} の絶対値より絶

対値の小さい解は次の2通り考えられる。

① \bar{x} の絶対値より絶対値の小さい解が1つあるとき

② \bar{x} の絶対値より絶対値の小さい解が2つあるとき

まず①の場合を考える。条件は次の(2-28)式である。

$$(2-28) \quad |x_1| \geq |\bar{x}| \quad |x_2| \geq |\bar{x}| \quad |x_3| \ll |\bar{x}|$$

解と(2-1')式の係数との関係は

$$(2-29) \quad \begin{cases} a_2/a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3) \doteq -(x_1 + x_2) \\ a_1/a_3 = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 \doteq x_1 \cdot x_2 \\ a_0/a_3 = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{cases}$$

(2-3), (2-4), (2-5) 式の \bar{x} , p , q は次のようになる。

$$\bar{x} = -(a_2/3a_3) = (x_1 + x_2)/3$$

$$p = -(x_1 + x_2)^2/3^2 + x_1 \cdot x_2/3$$

$$q = -2(x_1 + x_2)^3/3^3 + x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2)/3 - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

もし(2-30)式がなりたつとすると、 q は(2-31)式となる

$$(2-30) \quad |x_1 + x_2| \gg |x_3|$$

$$(2-31) \quad q = -2(x_1 + x_2)^3/3^3 + x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2)/3$$

したがって、 \bar{x} , p , q の中には解 x_3 は入っておりず、この p , q , \bar{x} より解 x_3 を求めると、(2-14)式で桁落ち誤差が入る。

次に②の場合を考える。条件は次の(2-32)式である。

$$(2-32) \quad |x_1| \geq |\bar{x}| \quad |x_2| \ll |\bar{x}| \quad |x_3| \ll |\bar{x}|$$

解と係数との関係は

$$(2-33) \quad \begin{cases} a_2/a_3 \doteq -X_1 \\ a_1/a_3 = X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_3 + X_3 \cdot X_1 \doteq X_1(X_2 + X_3) \\ a_0/a_3 = -X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \end{cases}$$

$$\bar{X} = X_1/3$$

$$P = -(X_1/3)^2 + X_1(X_2 + X_3)/3 \doteq -(X_1/3)^2$$

$$Q = -2(X_1/3)^3 + X_1^2(X_2 + X_3)/3 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \doteq -2(X_1/3)^3$$

\bar{X} , P , Q の中には絶対値最大の解 X_1 のみ残り. X_2 , X_3 は消えてしまい. 更に $X_2 \neq X_3$ であるのに. 次に示すように 2 重根の条件を満足してしまう.

$$Q^2 + 4P^3 = 4(X_1/3)^6 - 4(X_1/3)^6 \doteq \varepsilon$$

ε : 零でなく誤差

注 (2-11) 式で $Q^2 + 4P^3 = 0$ であると

$$u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-Q/2}$$

$$Y_1 = 2\sqrt[3]{-Q/2} \quad Y_2 = Y_3 = \sqrt[3]{-Q/2} (\omega + \omega^2) = -\sqrt[3]{-Q/2}$$

これは「(2-1), (2-1') 式では 2 重根でないのに, (2-2) 式では 2 重根のようになっている。」ことを示す.

§ 3. Cardano 法の修正計算手順

2 次方程式 (2-17) 式の解のうち. 絶対値の大きい解 X_1 には桁落ち誤差が入らないのであるから 絶対値の小さい解 X_2 は (2-23) 式を用いる. 解と係数の関係式より (3-1) 式

で求められる。

$$(3-1) \quad X_2 = C / (aX_1)$$

$$X_1 = Y_1 - b/2a = (\sqrt{b^2 - 4aC} - b) / 2a$$

$$X_2 = 2C / (\sqrt{b^2 - 4aC} - b)$$

注 $b < 0.0 \quad b^2 \gg 4aC$

3次方程式の場合も(2-14)式で桁落ち誤差の入る解は、他の桁落ち誤差の入らぬ解を用いて求められるだろうか。
①の場合は \bar{X} の絶対値より絶対値の小さい解が1つ、 X_3 のみであるから、(3-2)式のようにして桁落ち誤差の入らぬ解 X_3 が求められる。

$$(3-2) \quad X_3 = -a_0 / (a_3 \cdot X_1 \cdot X_2)$$

しかし、②の場合は \bar{X} の絶対値より絶対値の小さい解が X_2 、 X_3 と2つあるから、2つの解 X_2 、 X_3 に桁落ち誤差が入るので(3-2)式は使用できない。そこで、絶対値の一番大きい桁落ち誤差の入っていない解 X_1 を用いて、3次方程式(2-1) , (2-1')式を $(X - X_1)$ で除し、2次方程式にして解 X_2 、 X_3 を求める方法^{*①}もある。2次方程式の係数の求め方は次の通りである。

$$(a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) = (X - X_1)(aX^2 + bX + C)$$

$$C = -a_0 / X_1$$

$$b = -a_0 / X_1^2 - a_1 / X_1$$

$$a = -a_0/X_1^3 - a_1/X_1^2 - a_2/X_1 = a_3$$

$$\{X^3 + (a_2/a_3)X^2 + (a_1/a_3)X + (a_0/a_3)\}$$

$$= (X - X_1)\{X^2 + (b/a)X + (c/a)\}$$

$$c/a = -a_0/(a_3 \cdot X_1)$$

$$b/a = -a_0/(a_3 \cdot X_1^2) - a_1/(a_3 \cdot X_1)$$

$$1 = -a_0/(a_3 \cdot X_1^3) - a_1/(a_3 \cdot X_1^2) - a_2/(a_3 \cdot X_1)$$

*① 数理解析研究所講究録 72 1969年5月

「数値解析の基礎理論研究会報告集」

②の場合: (2-3)式で決定される \bar{X} の絶対値、すなわら X より Y への座標変換で採用する \bar{X} の絶対値を①のようにできないか。(2-2)式で Y^2 の係数の代りに、 Y の係数が零になるように、 \bar{X} を決定してみる。

$$3\bar{X}^2 + 2(a_2/a_3)\bar{X} + (a_1/a_3) = 0$$

次の2つの解のうち、絶対値の小さい解を採用する。

$$(3-3) \quad \bar{X} = (a_1/a_3) / \{-(a_2/a_3) \mp \sqrt{(a_2/a_3)^2 - 3(a_1/a_3)}\}$$

(2-32)式の条件を用いて \bar{X} を表わすと(3-4)式になる。

$$(3-4) \quad \bar{X} = X_1(X_2 + X_3) / (2 \cdot X_1) = (X_2 + X_3) / 2$$

$$\text{注} \quad |(a_2/a_3)^2| \gg |3(a_1/a_3)|$$

(3-4)式の \bar{X} を(2-2)式に代入する。

$$(3-5) \quad Y^3 + SY^2 + T = 0$$

$$(3-6) \quad S = (3/2)(X_2 + X_3) - X_1 \doteq -X_1$$

$$(3-7) \quad T = (X_2 + X_3)^3 / 2^3 - X_1 \cdot (X_2 + X_3)^2 / 2^2 + X_1 \cdot (X_2 + X_3)^2 / 2 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \\ \doteq X_1 \cdot (X_2 + X_3)^2 / 2^2 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

(3-4) 式の \bar{X} および (3-5) 式の係数である (3-7) 式の T には、絶対値の小さい解 X_2, X_3 が入っているから、次の (3-8) 式を満足していれば、(3-5) 式より Y_1, Y_2, Y_3 を求め、(3-4) 式の \bar{X} を用いて、(3-9) 式によって解 X_1, X_2, X_3 が求められる。

$$(3-8) \quad |X_2| \doteq |X_3|$$

$$(3-9) \quad X_i = Y_i + \bar{X} \quad i = 1, 2, 3$$

(3-8) 式が満足されず、(3-10) 式を満足している場合

(3-4), (3-7) 式の \bar{X}, T は (3-11), (3-12) 式で表わされる。

$$(3-10) \quad |X_2| \gg |X_3|$$

$$(3-11) \quad \bar{X} = X_2 / 2$$

$$(3-12) \quad T \doteq X_1 \cdot X_2^2 / 2^2$$

すなわち、(3-10) 式を満足しているときは、(3-11), (3-12) 式の \bar{X}, S, T の中には解 X_3 は入っていない。

したがって、(3-5) 式より得られる Y_1, Y_2, Y_3 を (3-9) 式に代入して解 X_1, X_2, X_3 を求めると、 $Y_3 + \bar{X}$ の計算で桁落ち誤差が大きく入り、解 X_3 の精度を悪くする。しかし、解 X_1, X_2 には桁落ち誤差が入らないので、解 X_3 は (3-2) 式を用

いて得られる。

以上のことより、 X より Y へ座標変換をする場合、(2-2)式で Y の1次の係数が零になるように \bar{X} を決定すれば、(絶対値の小さい解を採用する。)いかなる場合でも、座標を Y より X へ逆変換するとき、2つの解には桁落ち誤差が入らない。

座標変換による桁落ち誤差のほかに、桁落ち誤差を注意すべき計算式は(2-10)、(2-13)式である。まず、(2-10)式で桁落ち誤差が入るのは、次の(3-13)式を満足するときである。

$$(3-13) \quad |q^2| \gg |4p^3|$$

(3-13)式がなりたつと、(2-10)式は(3-14)式になる。

$$(3-14) \quad u^3 \doteq (-q + q)/2 = \varepsilon \quad \varepsilon : \text{誤差のみ}$$

$$v^3 \doteq (-q - q)/2 = -q$$

したがって、 u^3 は誤差のみになる。そこで、 u は(2-12)式に v を代入して求める。

(2-13)式で桁落ち誤差が入るのは、次の(3-15)式を満足するときである。

$$(3-15) \quad |q^2| \ll |4p^3|$$

(3-15)式がなりたつと、(2-10)、(2-11)式は(3-16)、(3-17)式になる。

$$(3-16) \quad u^3 = \sqrt{P^3} \quad v^3 = -\sqrt{P^3}$$

$$(3-17) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sqrt{P} & v_1 &= -\sqrt{P} \\ u_2 &= \sqrt{P} \omega & v_2 &= -\sqrt{P} \omega^2 \\ u_3 &= \sqrt{P} \omega^2 & v_3 &= -\sqrt{P} \omega \end{aligned}$$

したがって、(2-13)式により Y を求めるとき、 u_1 と v_1 の加算で桁落ち誤差が入る。^{*②}そこで、(2-13)式を変形する。

$$(3-18) \quad \begin{aligned} Y_1 &= u_1 + v_1 = (u_1 + v_1)(u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2) / (u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2) \\ &= (u_1^3 + v_1^3) / (u_1^2 + P + v_1^2) \end{aligned}$$

(3-18)式の分母は次式でも表わされるので、(3-18)式は(3-19)式になる。

$$\begin{aligned} Y_2 \cdot Y_3 &= (u_1 \omega + v_1 \omega^2)(u_1 \omega^2 + v_1 \omega) \\ &= u_1^2 + u_1 v_1 (\omega^2 + \omega^4) + v_1^2 \\ &= u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 = u_1^2 + P + v_1^2 \end{aligned}$$

$$(3-19) \quad Y_1 = (u_1^3 + v_1^3) / (Y_2 \cdot Y_3) = -Q / (Y_2 \cdot Y_3)$$

$$\text{注} \quad \omega^2 = -0.5 - \sqrt{0.75} i$$

$$\omega^4 = -0.5 + \sqrt{0.75} i$$

*② $u_2 + v_2$, $u_3 + v_3$ には桁落ち誤差か入らない。§4. 参照

§4. 修正 Cardano 法の計算手順

$$(4-1) \quad a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$$

$$(4-1') \quad X^3 + C_2 X^2 + C_1 X + C_0 = 0$$

$$\text{注} \quad C_2 = a_2/a_3, \quad C_1 = a_1/a_3, \quad C_0 = a_0/a_3$$

$X = Y + \bar{X}$ とおく.

$$(4-2) \quad Y^3 + (3\bar{X} + C_2)Y^2 + (3\bar{X}^2 + 2C_2\bar{X} + C_1)Y \\ + (\bar{X}^3 + C_2\bar{X}^2 + C_1\bar{X} + C_0) = 0$$

(4-2) 式の Y の係数を零とする.

$$3\bar{X}^2 + 2C_2\bar{X} + C_1 = 0$$

2つの解のうち、絶対値の小さい解を \bar{X} とする.

$$|-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 3C_1}| \geq |-C_2 - \sqrt{C_2^2 - 3C_1}| \quad \text{ならば}$$

$$(4-3) \quad \bar{X} = C_1 / (-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 3C_1})$$

$$|-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 3C_1}| < |-C_2 - \sqrt{C_2^2 - 3C_1}| \quad \text{ならば}$$

$$(4-3') \quad \bar{X} = C_1 / (-C_2 - \sqrt{C_2^2 - 3C_1})$$

$$(4-2') \quad Y^3 + kY^2 + l = 0$$

$$k = 3\bar{X} + C_2$$

$$l = \bar{X}^3 + C_2\bar{X}^2 + C_1\bar{X} + C_0$$

$Z = 1/Y$ なる変換をする.

$$(4-4) \quad q + 3pZ + Z^3 = 0$$

$$p = k / (3l)$$

$$q = 1/l$$

$$|-q + \sqrt{q^2 + 4p^3}| \geq |-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}| \quad \text{ならば}$$

$$(4-5) \quad u_1 = \sqrt[3]{(-q + \sqrt{q^2 + 4p^3})} / 2$$

$$|-q + \sqrt{q^2 + 4p^3}| < |-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}| \quad \text{ならば}$$

$$(4-5') \quad u_1 = \sqrt[3]{(-q - \sqrt{q^2 + 4p^3})} / 2$$

$$(4-6) \quad \begin{cases} Z_1 = u_i - P/u_i \\ Z_2 = u_i \omega - P/(u_i \omega) \\ Z_3 = u_i \omega^2 - P/(u_i \omega^2) \end{cases}$$

解 Z_1, Z_2, Z_3 の中で、絶対値の一番小さい解はそれ以外の2つの解を用いて求める。例えば、もし解 Z_1 の絶対値が他の解 Z_2, Z_3 の絶対値より小さければ (4-7) 式で解 Z_1 を求める。

$$(4-7) \quad Z_1 = -P/(Z_2 \cdot Z_3)$$

(4-6) 式の加算で桁落ち、すなわち、有効桁数の減少が起り、解 Z_1 に桁落ち誤差が入ったとすると、(4-8) 式がなりにつ。

$$(4-8) \quad u_i \doteq P/u_i$$

(4-8) 式の条件を (4-6) 式の第2, 第3式に代入する。

$$(4-9) \quad \begin{cases} Z_2 = u_i \omega - u_i/\omega = u_i(\omega - \omega^2) \\ Z_3 = u_i \omega^2 - u_i/\omega^2 = u_i(\omega^2 - \omega) \end{cases}$$

注 $\omega - \omega^2 = 2\sqrt{0.75} \ i$

すなわち、(4-9) 式よりわかるように、解 Z_2, Z_3 を (4-6) 式を用いて求めるときには桁落ちが起らない。したがって、(4-6) 式より解 Z_1, Z_2, Z_3 を求めるとき、桁落ちが起るのはどれか1つの解のみである。

次いで、(4-1) 式の解は (4-10) 式で求められる。

$$(4-10) \quad X_i = \bar{X} + 1/Z_i \quad i=1, 2, 3$$

ここで、 X_i, Y_i, Z_i の大小関係を調べてみる。3つの解 X_1, X_2, X_3 を最も求めにくい条件は次の(4-11)式で表わされる

$$(4-11) \quad |X_1| \gg |X_2| \gg |X_3|$$

(3-11)式より、 Y_i の値は、

$$(4-12) \quad \begin{cases} Y_1 = X_1 - \bar{X} \doteq X_1 - X_2/2 \doteq X_1 \\ Y_2 = X_2 - \bar{X} \doteq X_2 - X_2/2 = X_2/2 \\ Y_3 = X_3 - \bar{X} \doteq X_3 - X_2/2 = -X_2/2 \end{cases}$$

$$(4-13) \quad |Y_1| \gg |Y_2| \doteq |Y_3|$$

$$(4-14) \quad \begin{cases} Z_1 = 1/Y_1 = 1/X_1 \\ Z_2 = 1/Y_2 = 2/X_2 \\ Z_3 = 1/Y_3 = -2/X_2 \end{cases}$$

$$(4-15) \quad |Z_1| \ll |Z_2| \doteq |Z_3|$$

(4-6)式の第1項および第2項は、第1, 第2, 第3式共にその絶対値が(4-16)式のように等しい。

$$(4-16) \quad |u_1| = |u_1 \omega| = |u_1 \omega^2|$$

$$|-P/u_1| = |-P/(u_1 \omega)| = |-P/(u_1 \omega^2)|$$

したがって、(4-6)式で析落ちしない Z 2つは、絶対値がほぼ等しく、(4-15)式の Z_2 と Z_3 にあたる。又、析落ちする絶対値が小さくなる Z は(4-15)式の Z_1 にあたる。

Z 座標より X 座標へ変換すると、

$$(4-17) \quad X_1 = \bar{X} + 1/Z_1 = X_2/2 + X_1 \doteq X_1$$

$$X_2 = \bar{X} + 1/\bar{z}_2 = X_2/2 + X_2/2 = X_2$$

$$X_3 = \bar{X} + 1/\bar{z}_3 = X_2/2 - X_2/2 = \varepsilon$$

ε : 零でなく誤差

解 X_1 , X_2 , X_3 の中で、絶対値が一番小さい解はそれ以外の2つの解を用いて求める。例えば、解 X_3 は X_1 , X_2 を用いて、(4-18)式で求める。

$$(4-18) \quad X_3 = -C_0/(X_1 \cdot X_2) = -a_0/(a_3 \cdot X_1 \cdot X_2)$$