数理解析研究所講究録
149巻 1972年 146-167

重調和方程式の数値解法＜講演予稿＞

三 好 哲 彦（熊本大．理）

§1 序

重調和項を含む偏微分方程式

(1.1) $$\Delta^2 u = f \quad ,$$

(1.2) $$\partial_{tt} u + \Delta^2 u = f$$

等の近似解を数値的に求めるという問題は、2階の偏微分方程式の場合とは異り特殊な困難さを持っている。現在、これらの問題を解く為に使用されている方法を大別すると、変分法に基く近似解法と差分法に基く近似解法とに分る事ができるであろう。前者の代表的なものはいうまでもなく、Ritz[1]の方法である。この方法の欠点は、この方法使用にあたり必要不可欠な関数系（*basis*）の構成が一般にはきわめて困難であるという事にある。最近になって、いわゆる有限要素法（FEM）がRitz法の精神を受け継ぐ事によって、この欠点をある程度是正したかに見える。しかし、境界条件の処理はFEMにより確にある程度容易にできるようにはなったが、今度は別の問題が生じた。すなわち、いわゆる

conforming basis を使用する事にすれば莫大な連立1次方程式を解かなければならなくなるのである。これを避ける為に non-conforming basis で我慢すれば近似解の精度が一般に悪くなる。しかもこの場合には特殊な場合[2]を除いて、近似解の収束性の証明さえもなされてはいない。

差分法の場合にも境界条件の処理の困難さは変らない。それのみか、Dirichlet タイプの境界条件の場合はともかくとして、他の境界条件の場合には事情は変分法の場合よりも一層悪くなるとさえ言わなければならない。更に、電子計算機を有効に使う（汎用コードの作製）という立場からすれば、差分法は変分法（特にFEM）にくらべると実用上数段劣っていると言わざるを得ないであろう。

以上がほゞ(1.1),(1.2)にたいする数値解法の現状である。ところで、問題の困難さは要するに、非調和項が存在する、という事にのみ由来している。したがって、この項を2つに分解し、与えられた方程式がそれと同等な2階の連立方程式に（境界条件、初期条件を含めて）分解できれば、その連立方程式にFEMを適用する事によって、すべての問題は解消するはずである。これまでこの方向での試みがなされなかった（筆者の知る範囲内での話だが）最大の理由は、この2階の連立方程式に対応する新しい変分原理が確立されてい

なかったからだと思われる。　そこでこの報告では，まず Part(I)において，分解されてあて来た2階の連立方程式に対応した変分原理を導き，それをもとにして，(1.1)にたいするFEMの適用を述べ，さらに近似解の収束性をあきらかにする。　Part(II)では，Part(I)の結果，及び波動方程式にたいするFEMの安定性についての藤井[3]の結果を使って，(1.2)にたいするFEMの適用，近似解の安定性，収束性を議論する。

Part(I) －定常問題－

§2　予備的考察

考える境界値問題は次のものに限定して話を進めるが，他の境界条件の場合も全く同様に議論できる。これはFEMの良いところである。

(2.1)　$$\Delta^2 u = f \qquad \text{in } \Omega$$

(2.2)　$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

さらに話を簡単にする為に次の仮定をおく。これは f 及び $\partial\Omega$ の滑かさに関する条件である。

[仮定]：上の境界値問題の解は $W_2^4(\Omega)$ に属す。

この時，容易にわかる事であるが次の(I),(II),(III)が成立する。

(I)：問題(2.1)～(2.2)は次の問題と同等である。

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \Delta u = v \\ \Delta v = f \end{cases} \quad \text{in } \Omega$$

$$(2.4)\qquad u\big|_{\partial\Omega} = \frac{du}{dn}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

をみたす $u \in W_2^4(\Omega)$, $v \in W_2^2(\Omega)$ を求める。

(II)：問題 (2.3)～(2.4) の解 (u, v) は次の問題の一意解である。

$$(2.5)\qquad (\partial u, \partial \varphi)^{(*)} + (v, \varphi) = 0 \qquad {}^{\forall}\varphi \in W_2^1(\Omega)$$

$$(2.6)\qquad (\partial v, \partial \varphi) + (f, \varphi) = 0 \qquad {}^{\forall}\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

をみたす $(u, v) \in (\overset{\circ}{W}{}_2^1, W_2^1)$ を求める。

(III)：問題 (2.5)～(2.6) の解 $(\bar{u}, \bar{v})$ は，方程式

$$(2.7)\qquad (\partial u, \partial \varphi) + (v, \varphi) = 0 \qquad {}^{\forall}\varphi \in W_2^1(\Omega)$$

をみたす $(u, v) \in (\overset{\circ}{W}{}_2^1, W_2^1)$ の内で汎関数

$$(2.8)\qquad F(u, v) = (v, v) - 2(f, u)$$

を最小にするものである。（(*)：$(\partial u, \partial \varphi) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \partial_i u\, \partial_i \varphi\, dx$）

§3. 近似解の決定方程式

Ω；多角形領域，Ω_h：Ω の3角形分割 (regular)

n；Ω_h の内部節点数，N：$\overline{\Omega}_h$ 内の節点数

$\sum_1^n$；Ω_h の内部節点に関する和．

$\varphi_p(x)$ $(p = 1, 2, \cdots, N)$ ；次の条件をみたす関数

(1) $\overline{\Omega}$ で連続，$\partial\Omega$ で 0 となる。(2) 各要素内では高々 k 次の多項式 (3) 1次独立．

このとき，$\bar{u}$, $\bar{v}$（真の解）の近似関数をそれぞれ

$$u_h = \sum_{1}^{n} u_p \varphi_p(x) \tag{3.1}$$

$$v_h = \sum_{1}^{N} v_p \varphi_p(x) \tag{3.2}$$

の形で求める事にして、係数$\{u_p\}$, $\{v_p\}$を連立一次方程式

$$(\partial u_h, \partial\varphi_p) + (v_h, \varphi_p) = 0 \qquad p = 1 \sim N \tag{3.3}$$

$$(\partial v_h, \partial\varphi_p) + (f, \varphi_p) = 0 \qquad p = 1 \sim n \tag{3.4}$$

から決定する。

<u>定理 1.</u>　$\{u_p\}$, $\{v_p\}$は一意的に決定される。

<u>定理 2.</u>　アルゴリズム(3.3)~(3.4)は次の2つのアルゴリズムと同等である。

(A)：　v_hをu_hから、方程式

$$(\partial u_h, \partial\varphi_p) + (v_h, \varphi_p) = 0 \qquad p = 1 \sim N \tag{3.5}$$

によって定めるとき、次の汎関数をu_hに関して最小にする。

$$F(u_h) = (v_h, v_h) - 2(f, u_h) \tag{3.6}$$

(B)：　汎関数

$$B[u_h, v_h] = 2(\partial u_h, \partial v_h) + (v_h, v_h) + 2(f, u_h)$$

の、$\{u_p\}$, $\{v_p\}$に関する stationary point を求める。

<u>定理 3.</u>　$(\bar{u}, \bar{v})$を真の解とすれば、(3.6)の$F(u_h)$は次のようにも表す事ができる。

$$F(u_h) = -2(\partial[\bar{u} - u_h], \partial[\bar{v} - v_h]) - (\bar{v} - v_h, \bar{v} - v_h) - (\bar{v}, \bar{v}). \tag{3.7}$$

§4. 近似解の収束性.

この節より. (u,v) を真の解とする.

(i) $u-u_h$ を $v-v_h$ で評価すること. $\dot{u}_h$ を (3.1) の形をしたuの補間関数とする. $u-\dot{u}_h=\varepsilon_h$, $\|\varepsilon_h\|_1=\varepsilon$ とおく. ただし $\|\varepsilon_h\|_1^2=(\partial\varepsilon_h,\partial\varepsilon_h)$ である.

補題1. 次の評価が成立する。

(4.1) $$\|u-u_h\|_1\leq\varepsilon+C\|v-v_h\|$$

(ii) $v-v_h$ の評価. $\dot{u}_h$ より $\bar{v}_h$ を次の方程式から定める.

(4.2) $$(\partial\dot{u}_h,\partial\varphi_p)+(\bar{v}_h,\varphi_p)=0,\quad p=1\sim N.$$

次に. v にたいする (3.2) の形での補間関数を $\dot{v}_h$ とし. $v-\dot{v}_h=\delta_h$, $\|\delta_h\|_1=\delta$, $v-\bar{v}_h=\rho_h$, $\|\rho_h\|=\rho$ とおく。

補題2. 次の評価が成立する.

(4.3) $$\|v-v_h\|\leq C(\delta+\sqrt{\delta\varepsilon}+\sqrt{\lambda})$$

ただし, $0\leq\lambda\leq\rho^2+2\rho\delta+2\varepsilon\delta$.

証明. δ_h の定義より. $(\partial[u-\dot{u}_h],\partial[v-\bar{v}_h])$

$$=(\partial[u-\dot{u}_h],\partial[\dot{v}_h-\bar{v}_h])+(\partial[u-\dot{u}_h],\partial\delta_h).$$

一方 (4.2) 式より. $(\partial[u-\dot{u}_h],\partial[\dot{v}_h-\bar{v}_h])$

$$=-(v-\bar{v}_h,\dot{v}_h-\bar{v}_h)=-(v-\bar{v}_h,v-\bar{v}_h)+(v-v_h,\delta_h).$$

したがって. $2(\partial[u-\dot{u}_h],\partial[v-\bar{v}_h])+(v-\bar{v}_h,v-\bar{v}_h)$

$$=-(v-\bar{v}_h,v-\bar{v}_h)+2(v-\bar{v}_h,\delta_h)+2(\partial[u-\dot{u}_h],\partial\delta_h).$$

上式の右辺を λ_h とすれば. $\lambda\equiv|\lambda_h|\leq\rho^2+2\rho\delta+2\varepsilon\delta$.

ところで $\dot{u}_h, \dot{v}_h$ は (4.2) 式によって結ばれているから

定理 2 により近似解 u_h にたいしては，

$$F(u_h) = -2(\partial[u-u_h], \partial[v-v_h]) - (v-v_h, v-v_h) - (v, v)$$

$$\leq F(\dot{u}_h)$$

$$= -2(\partial[u-\dot{u}_h], \partial[v-\dot{v}_h]) - (v-\dot{v}_h, v-\dot{v}_h) - (v, v)$$

$$= -\lambda_h - (v, v)$$

すなわち次の関係式を得る．

$$(4.4) \qquad -2(\partial[u-u_h], \partial[v-v_h]) - (v-v_h, v-v_h) \leq -\lambda_h$$

一方， $(\partial[u-u_h], \partial[v-v_h])$

$$= (\partial[u-u_h], \partial[\dot{v}_h - v_h]) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h)$$

$$= -(v-v_h, \dot{v}_h - v_h) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h)$$

$$= -(v-v_h, v-v_h) + (v-v_h, \delta_h) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h)$$

であるからこれを (4.4) 式へ代入すれば，

$$(v-v_h, v-v_h) - 2(v-v_h, \delta_h) - 2(\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \leq -\lambda_h$$

Schwarz の不等式及び (4.1) 式により次の 2 次不等式を得る．

$$(4.5) \qquad \|v-v_h\|^2 - 2\delta(1+C)\|v-v_h\| - 2\delta\varepsilon - \lambda \leq 0$$

これを解いて (4.3) 式を得る． (証終)

(iii) ρ の評価 (a) — 1 次 basis —

まず $\rho_p(x)$ が要素上で 1 次式となる場合について考える．勿論 $\rho_p(p) = 1$ とする．

<u>補題3.</u>　$\hat{u}$を3角形Δ内で線型な任意の関数としたとき、次の不等式が成立する.（実際には線型である必要はない）.

$$(4.6)\qquad \max_{\Delta} |\hat{u}| \leq \frac{c}{h} \|\hat{u}\|_{\Delta}$$

ただし、hはΔの最小辺の長さ，$c = c(\sqrt{\sin\theta}^{-1})$, θ：Δの最小角.

証明はSobolevの埋蔵定理による.

<u>補題4.</u>　$\hat{u}$を(3.2)の形をした要素内では線型な関数とすれば次の不等式が成立する.

$$(4.7)\qquad \sqrt{\sum_{p \in \overline{\Omega}_h} u_p^2 \cdot h^2} \leq C \|\hat{u}\|_{\Omega_h}$$

証明は補題3による.

〔定義〕 3角形分割Ω_hが strongly regular であるとは，Ω_hは regular な分割である上に，$h \to 0$のとき次のようなΩ_hの部分領域Ω'_hがとれるときをいう.

(1)　$(\overline{\Omega}_h - \Omega'_h)$内の節点数$= O(\underline{h}^{-1})$，　$\underline{h}$：$\min_{h} h$

$$(2)\qquad (\partial \dot{u}_h, \partial \varphi_p) = \begin{cases} -\Delta u|_p \cdot (1, \varphi_p) + O(h^3) & \text{if } p \in \overline{\Omega}'_h \\ O(h^2) & \text{if } p \in \Omega_h - \overline{\Omega}'_h \end{cases}$$

ただし，$\dot{u}_h$は$u \in C^3(\overline{\Omega})$の補間関数とする（区分的に線型な関数での）

<u>補題5.</u>　分割Ω_hが strongly regular であれば$\dot{u}_h$を区分的に線型な関数による$u \in C^3(\overline{\Omega})$の補間関数としたとき，方程式

$$(4.8)\qquad (\partial \dot{u}_h, \partial \varphi_p) + (\overline{v}_h, \varphi_p) = 0 \qquad p = 1 \sim N$$

によって定められる$\overline{v}_h$は次の関係式をみたす.

$$(4.9)\qquad \|v - \overline{v}_h\| = O(h^{\frac{1}{2}} + \delta) \quad \text{as } h \to 0 .$$

(iv) ρ の評価 (b) ー2次以上の basis ー

$\hat{u}$ を次の条件をみたす Ω_h 上の関数とする.

(4.10) (1) $\bar{\Omega}_h$ で連続 (2) 各要素内では高々 k 次多項式

<u>補題 6</u> ：藤井[3], 鵜飼[4]). (4.10) の条件をみたす $\hat{u}$ にたいし次の不等式が成立する. たゞし $h = \underset{\Delta}{\mathrm{Min}}$ (Δ の最小辺の長さ).

$c' = c'(\sqrt{\sin\theta}^{-1})$, θ：前出

$$\sum_i \|\partial_{x_i} u\| \leq \frac{c'}{h}\|u\| \tag{4.11}$$

<u>補題 7.</u> $\dot{u}_h$ を (3.1) の型の関数による u の補間関数とする. (4.2) 式によって定められた $\bar{v}_h$ にたいし次の評価が成立する.

$$\rho = \|v - \bar{v}_h\| = O\left(\frac{\varepsilon}{h} + \delta\right) \quad \text{as } h \to 0 \tag{4.12}$$

たゞし $\varepsilon = \|u - \dot{u}_h\|_1$, $\delta = \|v - \dot{v}_h\|_1$.

<u>定理 4.</u> u, v $\dot{u}_h$, $\dot{v}_h$, ε, δ を前出のものとする. このとき F E M による近似解 u_h, v_h にたいし次の評価が成立する.

$$\|u - u_h\|_1,\ \|v - v_h\| = O\left(\frac{\varepsilon}{h} + \delta\right) \tag{4.13}$$

特に Ω_h が strongly regular な分割であれば, u_h, v_h が区分的に線型な場合でも次の評価が成立する.

$$\|u - u_h\|_1,\ \|v - v_h\| = O(h^{\frac{1}{2}}) \tag{4.14}$$

ε, δ を実際に評価するために. よく知られている補間定理を次に述べる. w を Ω_h で十分滑かな関数とし. その補間関数 $\dot{w}_h$ を次のように定める.

$\dot{w}_h^{(1)}$；要素内で1次式，3頂点でwと一致

$\dot{w}_h^{(2)}$；　〃　2次式，3頂点及び3辺の中点でwと一致．

$\dot{w}_h^{(3)}$；　〃　3次式，3頂点でw, $\partial_i w$ $(i=1, 2)$と，さらに重心でwと一致する．

補題8.（Zlámal [5]）

(4.15) $$\sum_{|\alpha|\le 1} \| \partial^\alpha (w - \dot{w}_h^{(i)}) \|_{\Omega_h} \le C M_{i+1} h^i \quad (i=1,2,3)$$

ただし $M_j = \mathrm{Max}\, |\partial^j w|$．

定理5. 真の解u, vが十分滑かであれば，FEMの近似解u_h, v_hにたいし次の評価が成立する．

2次式のbasis $\Rightarrow$ $\|u-u_h\|_1$, $\|v-v_h\| = O(h)$

3次式　〃　$\Rightarrow$ $\|u-u_h\|_1$, $\|v-v_h\| = O(h^2)$

特にΩ_hがstrongly regularな分割であれば

1次式のbasis $\Rightarrow$ $\|u-u_h\|_1$, $\|v-v_h\| = O(h^{\frac{1}{2}})$

注意(1)：Friedrichs-Keller [6] 式の分割はstrongly regularである．これ以外にもs.r.となる分割はかなり多くある．

注意(2)：ACM-basisの収束のオーダーは$O(h^{\frac{1}{2}})$である[2]．これと比較すれば，1次式のbasisでもさ程悪くはないと思われる．

注意(3)：方程式(3.3)～(3.4)はinner-outer iterationを使っても簡単に解く事ができる．又Smith [7] 参照の事．

Part (II) －非定常問題－

§5. 予備的考察

次の初期値－境界値問題を考える．

$$(5.1)\qquad \partial_{tt} u + \Delta^2 u = f \qquad in\ \Omega \times (0, T]$$

$$(5.2)\qquad \begin{cases} u/_{t=0} = a, & \partial_t u/_{t=0} = b \\ u/_{\partial\Omega} = 0, & \frac{du}{dn}/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

この問題が十分滑かな解 u を持てば，u, $v = \Delta u$ は方程式

$$(5.3)\qquad \begin{cases} \Delta u = v \\ \partial_{tt} + \Delta v = f \end{cases} \qquad in\ \Omega \times (0, T]$$

を (5.2) の条件下で解くという問題の解になっている．定常問題の場合からのアナロジーとして次のようなアルゴリズムが考えられる．近似関数 $u_h^{(m)}, v_h^{(m)}$ $(m = m \cdot \Delta t,\ \Delta t = \frac{T}{M})$ を

$$(5.4)\qquad \begin{cases} u_h^{(m)} = \sum_1^n u_p^{(m)} \varphi_p \\ v_h^{(m)} = \sum_1^N v_p^{(m)} \varphi_p \end{cases}$$

とおいて．方程式

$$(5.5)\qquad \begin{cases} (\partial u_h^{(m)}, \partial\varphi_p) + (v_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t D_{\bar{t}}\, u_h^{(m)}, \varphi_p) - (\partial v_h^{(m)}, \partial\varphi_p) = (f, \varphi_p) & p = 1 \sim n \end{cases}$$

$$(1 \leq m \leq M-1)$$

より $u_h^{(m+1)}$ を出す．たゞし，初期条件は次のように与える．

$$(5.6)\qquad u_h^{(0)} = P_h a, \quad D_t u_h^{(0)} = P_h b,$$

こゝで．$D_t, D_{\bar{t}}$ は前進．後退差分，P_h は適当な Projection.

補題 9. アルゴリズム (5.5)～(5.6) は次のアルゴリズムと同等.
$\overline{w}_h^{(m)}$, $\overline{v}_h^{(m)}$ を (5.4) の $u_h^{(m)}$, $v_h^{(m)}$ と同様な形の関数とする.

(5.7) $$\begin{cases} (D_t\overline{v}_h^{(m)}, \varphi_p) + (\partial\overline{w}_h^{(m)}, \partial\varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t\overline{w}_h^{(m)}, \varphi_p) - (\partial\overline{v}_h^{(m+1)}, \partial\varphi_p) = (f^{(m+1)}, \varphi_p) & p = 1 \sim n \end{cases}$$

より $\overline{v}_h^{(m+1)}$, $\overline{w}_h^{(m+1)}$ を出し ($m = 0, 1, 2, \cdots, M-1$)

(5.8) $$D_t\overline{u}_h^{(m)} = \overline{w}_h^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \cdots, M-1)$$

より $\overline{u}_h^{(m+1)}$ を求める. ただし. 次の初期条件を与える.

(5.9) $$\overline{u}_h^{(0)} = P_h a,\ D_t\overline{u}_h^{(0)} = P_h b,\quad \overline{w}_h^{(0)} = P_h b$$

(5.10) $$(\partial\overline{u}_h^{(0)}, \partial\varphi_p) + (\overline{v}_h^{(0)}, \varphi_p) = 0 \qquad p = 1 \sim N$$

注意 : アルゴリズム (5.7)～(5.10) は. 与えられた方程式を次のように分解した上で, これをいわゆる consistent mass system の形で近似したものである.

$$u_t = w, \quad \Delta u = v$$

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta w = 0 \\ \partial_t w + \Delta v = f \end{cases}$$

補題の証明. $u_h^{(m)} = \overline{u}_h^{(m)}$, $v_h^{(m)} = \overline{v}_h^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$) をいう。
まず (5.6), (5.9) により. $u_h^{(0)} = \overline{u}_h^{(0)}$, $u_h^{(1)} = \overline{u}_h^{(1)}$ は明らか. また $v_h^{(0)}$ を (5.5) 式により $u_h^{(0)}$ から定める事にすれば, (5.10) より. $v_h^{(0)} = \overline{v}_h^{(0)}$ となる. 次に (5.8), (5.9) より.

(5.11) $$D_t\overline{u}_h^{(m)} = \overline{w}_h^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots, M-1)$$

したがって. $D_t D_{\bar{t}}\overline{u}_h^{(m+1)} = D_t\overline{w}_h^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, \cdots, M-2$) となるが.

これを(5.7)の第2式へ代入すると

$$(5.12)\qquad (D_t D_{\bar t}\bar u_h^{(m+1)}, \varphi_p) + (\partial \bar v_h^{(m+1)}, \partial\varphi_p) = (f^{(m+1)}, \varphi_p) \qquad p=1\sim N$$
$$(m=0,1,2,\cdots,M-2)$$

次に、(5.11)の両辺を空間座標に関して微分すると

$$D_t\,\partial \bar u_h^{(m)} = \partial \bar w_h^{(m)} \qquad a.e. \quad (m=0,1,2,\cdots,M-1)$$

これを(5.7)へ代入すると次式を得る。

$$(D_t \bar v_h^{(m)}, \varphi_p) + (D_t\,\partial \bar u_h^{(m)}, \partial\varphi_p) = 0 \qquad p=1\sim N \quad (m=0,1,\cdots,M-1)$$

したがって、(5.10)を考慮すれば

$$(5.13)\qquad (\partial \bar u_h^{(m)}, \partial\varphi_p) + (\bar v_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 \qquad p=1\sim N \quad (m=0,1,2,\cdots,M)$$

方程式(5.5)と方程式(5.12),(5.13)をくらべてみると全く同じものであり、さらに両者の初期値も同じであるから両方のアルゴリズムは等しい(勿論、$v_h^{(M)}$は(5.5)の上の式を使って最後に$u_h^{(M)}$から計算されたものとする)。(証終)

§6　安定条件

この節ではscheme (5.5)が安定である為の十分条件を導く。証明方法は藤井[3]の使った方法に沿っている。

<u>定理6</u>　条件 $\dfrac{\sqrt{\Delta t}}{h} < \dfrac{\sqrt{2}}{C}$ のもとでscheme (5.5)にたいする次の形でのエネルギー不等式が成立する。

$$(6.1)\qquad \|D_{\bar t} u_h^{(M)}\|^2 + \|v_h^{(M)}\|^2 \le K(T)\sum_{1}^{M}\Delta t\,\|f^{(m)}\|^2$$
$$+ K(T)\left[\|D_t u_h^{(0)}\|^2 + \|v_h^{(0)}\|^2\right]$$

ただし h, C は補題6にいうところの定数である。

この定理を証明する為に，いくつかの補題を設ける．この節では以下 suffix h を省く．

補題10.　次の不等式が $2 \leqq k \leqq M$ に関して成立する。

$$(6.2)\qquad (1-\rho)(\|D_{\bar t}u^{(k)}\|^2+\|v^{(k)}\|^2)$$
$$\leqq (1+\rho)(\|D_t u^{(0)}\|^2+\|v^{(0)}\|^2)$$
$$+\sum_1^M \Delta t\cdot\|f^{(m)}\|^2+\sum_1^k \Delta t\cdot\|D_{\bar t}u^{(m)}\|^2$$

ただし，$\rho = \dfrac{\Delta t\cdot(c')^2}{2h^2}$ である．　c', h ; 前出．

証明.
$$\sum_{m=1}^{k-1}(D_t D_{\bar t}u^{(m)}, D_t u^{(m)}+D_{\bar t}u^{(m)})\Delta t$$
$$(6.3)\qquad -\sum_{m=1}^{k-1}(\partial v^{(m)}, \partial[D_t u^{(m)}+D_{\bar t}u^{(m)}])\Delta t$$
$$=\sum_{m=1}^{k-1}(f^{(m)}, D_t u^{(m)}+D_{\bar t}u^{(m)})\Delta t$$

が(5.5)より成立するが，$D_t D_{\bar t}u^{(m)}\cdot(D_t u^{(m)}+D_{\bar t}u^{(m)}) = D_t(D_{\bar t}u^{(m)})^2$ であるから(6.3)式の左辺オ一項は次のようになる．

$$(6.4)\qquad \|D_{\bar t}u^{(k)}\|^2-\|D_t u^{(0)}\|^2.$$

次に(5.5)式より $(\partial D_t u^{(m)}, \partial v^{(m)})+(D_t v^{(m)}, v^{(m)})=0$ であるから．

$$\sum_{m=1}^{k-1}(\partial v^{(m)}, \partial[D_t u^{(m)}+D_{\bar t}u^{(m)}])\Delta t$$
$$=-\sum_{m=1}^{k-1}(D_t v^{(m)}+D_{\bar t}v^{(m)}, v^{(m)})\Delta t = -(v^{(k)}, v^{(k-1)})+(v^{(0)}, v^{(1)})$$
$$=-(v^{(k)}, v^{(k)})+(v^{(0)}, v^{(0)})+(v^{(k)}, D_{\bar t}v^{(k)})\Delta t+(v^{(0)}, D_t v^{(0)})\Delta t.$$

したがって(6.3)式は次のように表わされる．

$$(6.5)\qquad \|D_{\bar t}u^{(k)}\|^2+\|v^{(k)}\|^2$$
$$=\|D_t u^{(0)}\|^2+\|v^{(0)}\|^2+\sum_{m=1}^{k-1}(f^{(m)}, D_t u^{(m)}+D_{\bar t}u^{(m)})\Delta t$$
$$+(v^{(k)}, D_{\bar t}v^{(k)})\Delta t+(v^{(0)}, D_t v^{(0)})\Delta t$$

ところで，(5.5)式及び補題6により

$$(v^{(k)}, D_{\bar{t}} v^{(k)})\Delta t = -(\partial D_{\bar{t}} u^{(k)}, \partial v^{(k)})\Delta t$$
$$\leqq \frac{\Delta t}{2}(\|\partial D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|\partial v^{(k)}\|^2)$$
$$\leqq \rho(\|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|v^{(k)}\|^2).$$

さらに $(v^{(0)}, D_t v^{(0)})\Delta t$ にたいしても同様の不等式が成立する。

これらを(6.5)へ代入して整理すれば(6.2)を得る。(証終)

<u>補題 11</u>　次の不等式が $2 \leqq k \leqq M$ に関して成立する．

(6.6)
$$(1-\rho)\|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2$$
$$\leqq \left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{k-2}\left\{(\bar{C} + \Delta t)\|D_t u^{(0)}\|^2 + \bar{C}\|v^{(0)}\|^2 + \sum_1^M \Delta t\cdot\|f^{(m)}\|^2\right\} + \Delta t\|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2$$

たゞし，$\bar{C} = 1 + \rho$

<u>証明</u>　$k = 2$ のときは補題10により

$$(1-\rho)\|D_{\bar{t}} u^{(2)}\|^2 \leqq (1+\rho)(\|D_t u^{(0)}\|^2 + \|v^{(0)}\|^2) + \sum_1^M \Delta t\cdot\|f^{(m)}\|^2 + \Delta t\cdot\|D_t u^{(0)}\|^2 + \Delta t\|D_{\bar{t}} u^{(2)}\|^2$$

であるからたしかに成立している。　$2 \leqq n \leqq k$ なる任意の n について補題が成立しておれば $n = k+1$ にたいしても成立するという事を示す。(6.6)で k を n で置き換えた式を整理すれば

$$\|D_{\bar{t}} u^{(n)}\|^2 \leqq \frac{1}{1-\rho-\Delta t}\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{n-2}\{\quad " \quad\}$$

であるから，

$$\sum_{n=2}^{k} \Delta t\cdot\|D_{\bar{t}} u^{(n)}\|^2 \leqq \sum_{n=2}^{k} \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\left(1+\frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{n-2}\{\quad " \quad\}$$

(6.7) $$= \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{k-1} - 1 \right] \left\{ \quad " \quad \right\}$$

一方．(6.2)式を整理して，少し補正すれば，

$$(1-\rho)\| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 \leqq \bar{c}\left(\| D_t u^{(0)} \|^2 + \| v^{(0)} \|^2 \right) + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2$$
$$+ \Delta t \cdot \| D_t u^{(0)} \|^2 + \sum_2^k \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(m)} \|^2 + \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2$$

上式の右辺才4項へ(6.7)を代入すれば次の結果を得る．

$$(1-\rho)\| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 \leqq (\bar{c}+\Delta t)\| D_t u^{(0)} \|^2 + \bar{c}\| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2$$
$$+ \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 + \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{k-1} - 1 \right] \left\{ (\bar{c}+\Delta t)\| D_t u^{(0)} \|^2 \right.$$
$$\left. + \bar{c}\| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right\}$$
$$= \left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{k-1} \left\{ (\bar{c}+\Delta t)\| D_t u^{(0)} \|^2 + \bar{c}\| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right.$$
$$\left. + \Delta t \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 \right\}$$

したがって $n = k+1$ にたいしても成立する．（証終）

<u>系 1.</u> 次の不等式が成立する。

$$\sum_{n=2}^M \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(n)} \|^2 \leqq \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{M-1} - 1 \right] \left\{ (\bar{c}+\Delta t)\| D_t u^{(0)} \|^2 \right.$$
$$\left. + \bar{c}\| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right\}$$

<u>定理 6 の証明：</u> ρ を固定すれば，

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t}\right)^{M-1} < \left(\frac{1-\rho}{1-\rho-\Delta t}\right)^M \longrightarrow e^{\frac{T}{1-\rho}} \quad (\Delta t \to 0)$$

したがって系 1 より

(6.8) $$\sum_{n=1}^M \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(n)} \|^2 \leqq \mathrm{const}(T)\left(\| D_t u^{(0)} \|^2 + \| v^{(0)} \|^2 \right)$$
$$+ \mathrm{const}(T) \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2$$

(6.2)式で $k = M$ とおいて (6.8)式を代入すれば (6.1)式を得る。

（証終）

§7. 近似解の収束性

補題12. $\varepsilon(x)\in L^2(\Omega)$ とする. $\alpha(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\beta(x)\in W_2^1(\Omega)$ が

(7.1) $$(\partial\alpha,\partial\varphi)+(\beta,\varphi)=0 \qquad {}^\forall\varphi\in W_2^1$$

(7.2) $$(\partial\beta,\partial\varphi)+(\varepsilon,\varphi)=0 \qquad {}^\forall\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$$

をみたしているとき次の評価ができる.

(7.3) $$\|\alpha\|_1 \le const.\|\beta\|, \quad \|\beta\|\le const.\|\varepsilon\|$$

証明. (7.1)式で $\varphi=\beta$, (7.2)式で $\varphi=\alpha$ とおけば

$$(\partial\alpha,\partial\beta)+(\beta,\beta)=0, \quad (\partial\beta,\partial\alpha)+(\varepsilon,\alpha)=0$$

したがって.

(7.4) $$(\beta,\beta)=-(\varepsilon,\alpha)\le\|\varepsilon\|\cdot\|\alpha\|$$

一方(7.1)で $\varphi=\alpha$ とおけば

$$(\partial\alpha,\partial\alpha)+(\beta,\alpha)=0$$

したがって. $\|\alpha\|_1^2\le\|\beta\|\cdot\|\alpha\|\le const.\|\beta\|\cdot\|\alpha\|_1$, すなわち.

(7.5) $$\|\alpha\|_1\le const.\|\beta\|$$

(7.4)と(7.5)より $\|\beta\|\le const.\|\varepsilon\|$ を得る。 (証終)

以下議論の筋道を明白にするために(5.1)の方程式の右辺 $f=0$ と仮定する. 又次の仮定をおく.

仮定 : 問題(5.1)~(5.2)は $\Omega\times[0,T]$ で十分滑かな一意解を持つ. したがって. 方程式(5.1)は $t=0$ においても成立する。

さて. u を問題の真の解としよう。次の方程式より. $\bar{u}_k^{(m)}$, $\bar{v}_k^{(m)}$ を定める。ただし. これらはそれぞれ(5.4)の

$u_h^{(m)}$, $v_h^{(m)}$ と同じ型の関数である。

$$(7.6)\quad \begin{cases} (\partial \bar{u}_h^{(m)}, \partial \varphi) + (\bar{v}_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (\partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_h^{(m)}, \partial \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim n \end{cases}$$

$$(m = 0, 1, 2, \cdots, M)$$

補題 13. (7.6) で定められた $\bar{u}_h^{(m)}$, $\bar{v}_h^{(m)}$ にたいし次の評価が成立する。ただし $\nu\ (>0)$ は basis の次数に応じて定まるところの定理 5 における近似解の収束のオーダーである。(h: 前出)

$$(7.7)\quad \| D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)} \|_1 = O(h^{\nu}) \qquad (1 \leq m \leq M-1)$$

証明. 次の方程式の解 $(U^{(m)}, V^{(m)}) \in (\overset{\circ}{W}{}_2^1, W_2^1)$ $(1 \leqq m \leq M-1)$ は一意的に存在する。

$$(7.8)\quad \begin{cases} (\partial U^{(m)}, \partial \varphi) + (V^{(m)}, \varphi) = 0 & {}^{\forall}\varphi \in W_2^1 \\ -(\partial V^{(m)}, \partial \varphi) = -(\partial_{tt} u^{(m)}, \varphi) \\ \qquad + (\partial_{tt} u^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi) & {}^{\forall}\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \end{cases}$$

一方、この2番目の式の右辺オ2項を除いた場合の (7.8) の解はあきらかに $\bar{U}^{(m)} = \partial_{tt} u^{(m)}$, $\bar{V}^{(m)} = \Delta \partial_{tt} u^{(m)}$ である。

ところで $\| \partial_{tt} u^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)} \| = O(\Delta t^2)$ であるから補題 12 により

$$(7.9)\quad \| \partial_{tt} u^{(m)} - U^{(m)} \|_1 = O(\Delta t^2) \qquad (1 \leqq m \leqq M-1)$$

一方 (7.6) の両辺に $D_t D_{\bar{t}}$ を作用させると次式を得る。

$$(7.10)\quad \begin{cases} (\partial D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)}, \partial \varphi_p) + (D_t D_{\bar{t}} \bar{v}_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ -(\partial D_t D_{\bar{t}} \bar{v}_h^{(m)}, \partial \varphi_p) = -(D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) & p = 1 \sim n \end{cases}$$

ただし． $1 \leqq m \leqq M-1$ である。

(7.8) と (7.10) を比較すれば，Part (I) の結果が使えて．

(7.11) $$\| U^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)} \|_1 = O(h^\nu) \quad (1 \leqq m \leqq M-1)$$

(7.9) と (7.11) より (7.7) を得る。　（証終）

<u>定理 7.</u>　u, $v = \Delta u$ を十分滑かな真の解とする。安定条件の仮定のもとで $u_h^{(M)}$ は $u^{(M)}$ へ $h \to 0$ のとき収束し次の評価が成立する。

(7.12) $$\| u_h^{(M)} - u^{(M)} \|_1 , \ \| v_h^{(M)} - v^{(M)} \| = O(h^\nu)$$

<u>証明.</u>　(7.6) の定義より．$1 \leqq m \leqq M-1$ にたいし

(7.13) $$\begin{cases} (\partial \bar{u}_h^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 & (p = 1 \sim N) \\ (D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_h^{(m)}, \partial \varphi_p) = (D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) & (p = 1 \sim n) \end{cases}$$

ここで

(7.14) $$\| E^{(m)} \|_1 \equiv \| D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)} \|_1 = O(h^\nu)$$

である。いま $\alpha_h^{(m)}$, $\beta_h^{(m)}$ を次のように定める．

$$\alpha_h^{(m)} = \bar{u}_h^{(m)} - u_h^{(m)} , \quad \beta_h^{(m)} = \bar{v}_h^{(m)} - v_h^{(m)}$$

(5.5) 及び (7.13) より．$1 \leqq m \leqq M-1$ にたいし

(7.15) $$\begin{cases} (\partial \alpha_h^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\beta_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t D_{\bar{t}} \alpha_h^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \beta_h^{(m)}, \partial \varphi_p) = (E^{(m)}, \varphi_p) & p = 1 \sim n \end{cases}$$

(i)　$\| \beta_h^{(0)} \|$ の評価．

(7.6) にたいする "original problem" の真の解はあきらかに $u^{(m)}$, $v^{(m)}$ である。　Part (I) の結果を特に $m = 0$ の場合に適用

すれば

(7.16) $$\| v^{(0)} - \bar{v}_h^{(0)} \| = O(h^\nu).$$

一方 $u_h^{(0)}$ として $u^{(0)}$ の補間関数をとる事にすれば，補題5．および補題7により．

(7.17) $$\| v^{(0)} - v_h^{(0)} \| = O(h^\nu)$$

したがって

(7.18) $$\| \beta_h^{(0)} \| = \| \bar{v}_h^{(0)} - v_h^{(0)} \| = O(h^\nu)$$

(ii) $\| D_t \alpha_h^{(0)} \|$ の評価．

(5.6) により $D_t u_h^{(0)} = P_h \partial_t u^{(0)}$ であるから P_h を Part (I) の補間作用素とすれば補題8により

(7.19) $$\| D_t u_h^{(0)} - \partial_t u^{(0)} \| = o(h^\nu)$$

ところで．方程式

(7.20) $$\begin{cases} (\partial D_t \bar{u}_h^{(0)}, \partial \varphi_p) + (D_t \bar{v}_h^{(0)}, \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t \partial_{tt} u^{(0)}, \partial \varphi_p) - (D_t \partial \bar{v}_0^{(0)}, \partial \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim n \end{cases}$$

の "original problem" の真の解はあきらかに $D_t u^{(0)}$; $D_t v^{(0)}$ であるが．(7.20) の解は $D_t \bar{u}_h^{(0)}$, $D_t \bar{v}_h^{(0)}$ であるから．Part (I) より

(7.21) $$\| D_t u^{(0)} - D_t \bar{u}_h^{(0)} \| = O(h^\nu)$$

この式と．(7.19) 式及び安定条件より

(7.22) $$\| D_t \alpha_h^{(0)} \| = \| D_t (\bar{u}_h^{(0)} - u_h^{(0)}) \| = O(h^\nu)$$

以上 (7.14), (7.15), (7.18), (7.22) 及び定理6により，安定条件の仮定のもとでは $\alpha_h^{(M)}$, $\beta_h^{(M)}$ は次の不等式をみたすという事

がわかった。

(7.23) $$\|D_\tau \alpha_h^{(M)}\|^2 + \|\beta_h^{(M)}\|^2 \leqq \mathrm{const}(T)\, h^{2\nu}$$

これより容易に次の評価を得る。

(7.24) $$\|\bar{u}_h^{(M)} - u_h^{(M)}\|,\quad \|\bar{v}_h^{(M)} - v_h^{(M)}\| = O(h^\nu)$$

次に (7.6) で $m = M$ として Part(I) の結果を適用すれば

(7.25) $$\|\bar{u}_h^{(M)} - u^{(M)}\|_1,\quad \|\bar{v}_h^{(M)} - v^{(M)}\| = O(h^\nu)$$

したがってまず次の評価を得る。

(7.26) $$\|u_h^{(M)} - u^{(M)}\|;\quad \|v_h^{(M)} - v^{(M)}\| = O(h^\nu).$$

最後に $\|u_h^{(M)} - u^{(M)}\|_1 = O(h^\nu)$ を示す。まず次の等式が成立する事はあきらかである。

$$(\partial(u_h^{(M)} - u^{(M)}), \partial\varphi_p) + (v_h^{(M)} - v^{(M)}, \varphi_p) = 0 \qquad p = 1 \sim N$$

したがって，$\dot{u}_h^{(M)}$ を $u^{(M)}$ の補間関数とすれば，$u^{(M)} - \dot{u}_h^{(M)} = \varepsilon_h$ として

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial[u_h^{(M)} - u^{(M)}], \partial[u_h^{(M)} - \dot{u}_h^{(M)}]) + (v_h^{(M)} - v^{(M)}, u_h^{(M)} - \dot{u}_h^{(M)}) \\ &= (\partial[u_h^{(M)} - u^{(M)}], \partial[u_h^{(M)} - u^{(M)}]) + (\partial[u_h^{(M)} - u^{(M)}], \partial\varepsilon_h) \\ &\quad + (v_h^{(M)} - v^{(M)}, u_h^{(M)} - u^{(M)}) + (v_h^{(M)} - v^{(M)}, \varepsilon_h) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \|u_h^{(M)} - u^{(M)}\|_1^2 &\leqq \|u_h^{(M)} - u^{(M)}\|_1 \cdot \varepsilon + \|v_h^{(M)} - v^{(M)}\| \cdot \|u_h^{(M)} - u^{(M)}\| \\ &\quad + \|v_h^{(M)} - v^{(M)}\| \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

(7.22)

$$\begin{aligned} &\leqq [\varepsilon + \mathrm{const.}\|v_h^{(M)} - v^{(M)}\|] \cdot \|u_h^{(M)} - u^{(M)}\|_1 \\ &\quad + \|v_h^{(M)} - v^{(M)}\| \end{aligned}$$

(7.26) を考慮してこの不等式を解けば

$$\| u_h^{(M)} - u^{(M)} \|_1 = O(h^\nu)$$

を得る。　(証終)

注意：補題6の定数 C' について。α を3角形 Δ の3つの垂線の最小の長さとすれば、区分的に1次の basis を使ったとき次の評価ができる [3]。

$$\frac{C'}{h} \leqq \frac{\sqrt{48}}{\alpha} \tag{7.28}$$

注意：本稿では常に consistent mass タイプの近似を考えたが、lumped mass タイプの近似に関してもほとんど同様の議論ができる。詳しくは [8] を参照されたい。

文　献

1. Ritz, W., J. für Math., Bd. 135
2. Miyoshi, T., Kumamoto J. of Sci. Vol. 9 (1972)
3. Fujii, H., Tech. Rep., Univ. of Texas, CNA-34 (1971)
4. Ukai, S., C & A summer seminar report, Aug. (1971).
5. Zlámal, M., Numer. Math., 15 (1968)
6. Friedrichs, K.O. & Keller, H.B., Proceedings edited by Bramble (1966).
7. Smith, J., SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968)
8. Miyoshi, T., C & A, Vol. 4 No. 1 & 2 (1972).