数理解析研究所講究録
149巻 1972年 111-129

ある非線形自励振動の周期の計算

九大理　占部 実

§1. 序

問題の自励振動はつぎの微分方程式によって表わされるものである：

$$(1.1)\quad nx(1-x^2)\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+(1-x^2)(nx^2-1)=0.$$

ただしここで，nは2より小さくない整数である．

上の微分方程式は東工大の大槻教授が微分幾何学の研究中に得られたもので［2］，大槻教授の問題は上の微分方程式の周期解の周期の評価である．同氏から研究協力を依頼され，数値的にその周期を調べたので，その方法，結果をここに報告する．

微分方程式（1.1）は

$$(1.2)\quad \begin{cases} dx/dt=y, \\ dy/dt=\dfrac{1}{nx(x^2-1)}\left[y^2-n(x^2-1)\left(x^2-\dfrac{1}{n}\right)\right] \end{cases}$$

と書き直せるから，これから

$$(1\cdot3)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-n(x^2-1)(x^2-\frac{1}{n})}{nxy(x^2-1)}$$

を得る．便宜上 $\alpha=1/n\ (<1)$ とおいて，(1・3)を

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha y^2-(1-x^2)(\alpha-x^2)}{-x(1-x^2)}$$

と書き直すと，これは y^2 に関する線形微分方程式になって求積法で解かれ，

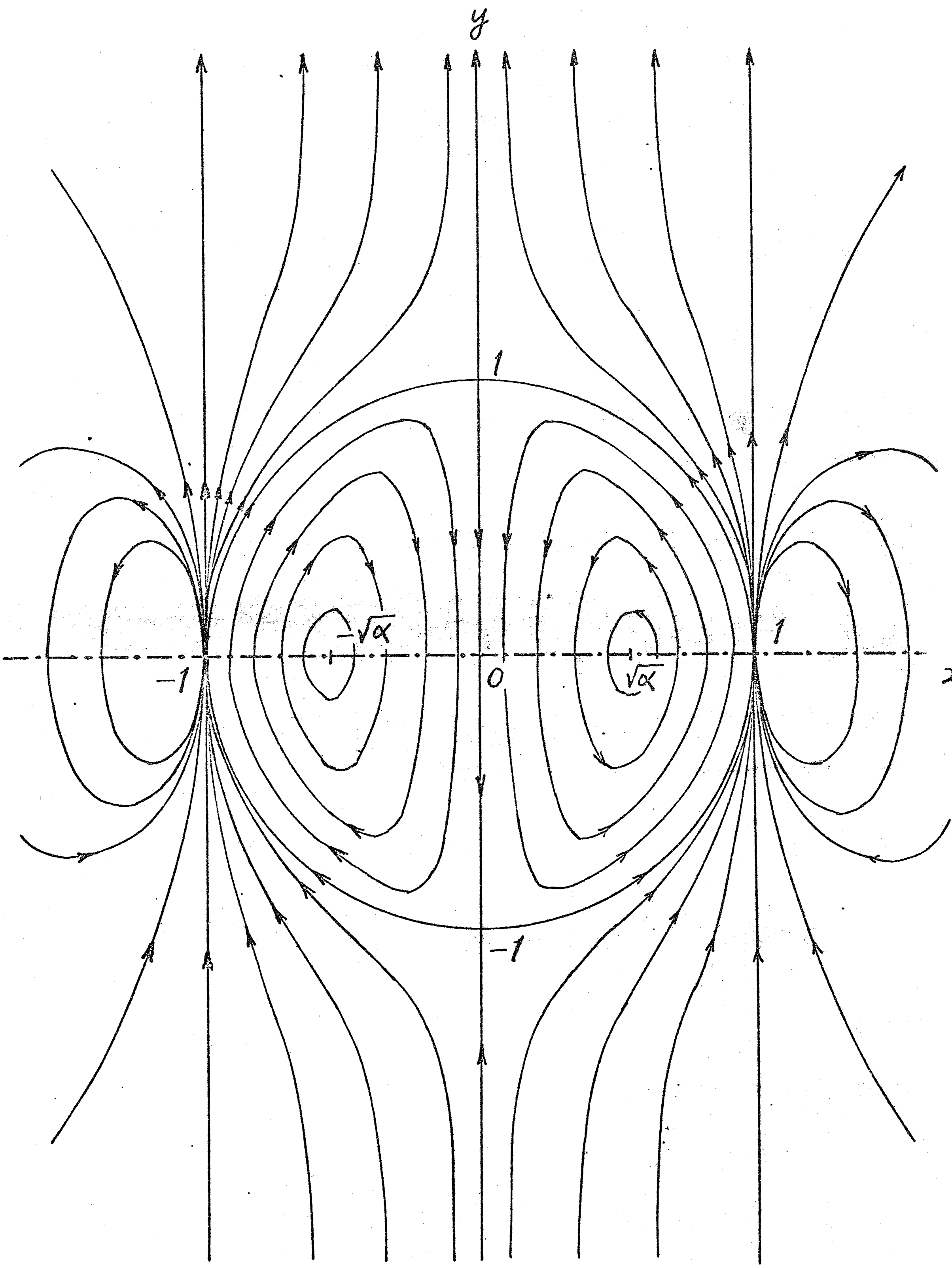
$$(1\cdot4)\quad y^2=(1-x^2)-c\left[\frac{|1-x^2|}{x^2}\right]^\alpha$$

を得る．ただし c は任意定数である．

さて(1・3)を

$$(1\cdot5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\sigma}=nxy(x^2-1), \\ \dfrac{dy}{d\sigma}=y^2-n(x^2-1)(x^2-\dfrac{1}{n}) \end{cases}$$

と書き直すと，これの相平面上における危点は $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$ および $(\pm n^{-1/2},0)=(\pm\sqrt{\alpha},0)$ で，$(0,\pm1)$ は鞍点で separatrix は $x=0$, $y=\pm1$ で



3

あり，$(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ はうずの中心である．前のページの図では実線で (1・5) の軌道の様子を示している．この図からわかるように，(1・4) で与えられる曲線は $c>0$, $0<x^2<1$ のとき，うずの中心 $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ のまわりをまわる閉軌道Cを表わしている．したがって，方程式

$$(1\cdot6)\quad (1-x^2)-c\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\alpha}=0$$

の根を $\pm x_1$, $\pm x_2$ $(0<x_1<x_2)$ とすれば，(1・2) の第1式から，閉軌道Cに対応する (1・1) の周期解の周期Tはつぎの式で求められる：

$$(1\cdot7)\quad T=2\int_{x_1}^{x_2}\left\{(1-x^2)-c\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\alpha}\right\}^{-1/2}dx.$$

上の式で T の値を計算することは，*improper integral* の数値計算を行うことになる．森はこの積分を変数変換を用いて直接計算したが [3]，が筆者は極座標を導入して上の積分を *proper integral* に直して計算を行った．この方法は，微分方程式が上の例のようには求積法で解けない場合にも応用ができるので，ここでその方法と結果とを報告することにしたわけである．

§2. 極座標による軌道の方程式と周期に対する式

(1・5) の軌道は x 軸，y 軸に関してそれぞれ対称であるから，第Ⅰ象限にある部分についてのみ考察する．

($\sqrt{\alpha}$, 0) を中心とする極座標を (r, θ) とすると，明らかに

(2・1) $\qquad x=\sqrt{\alpha}+r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$

となる．(1・5) でさらに

(2・2) $\qquad n\sigma=s$

とおくと，(1・5) からわれわれはつぎの方程式を得る：

(2・3) $$\begin{cases} \dfrac{dr}{ds}=\Xi\cos\theta+\Sigma\sin\theta, \\[2ex] \dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{r}\left(-\Xi\sin\theta+\Sigma\cos\theta\right). \end{cases}$$

ただし

(2・4) $$\begin{cases} \Xi=-xy\,(1-x^2), \\ \Sigma=\alpha y^2-(1-x^2)(\alpha-x^2). \end{cases}$$

ところが，閉軌道の第Ⅰ象限にある部分に対してはつねに

(2・5) $\qquad -\Xi\sin\theta+\Sigma\cos\theta>0$

となっていることが容易に確められる．すると，(2・3) から閉軌道の第I象限にある部分に対しては

$$(2\cdot 6)\qquad \frac{dr}{d\theta}=r\cdot\frac{\Xi\cos\theta+\Sigma\sin\theta}{-\Xi\sin\theta+\Sigma\cos\theta}$$

を得る．(2・4) の x, y のところに (2・1) を代入し，

$$(2\cdot 7)\qquad r=\sqrt{\alpha}\,\xi$$

とおくと，(2・6) はつぎのように書き直される：

$$(2\cdot 8)\qquad \frac{d\xi}{d\theta}=\xi\sin\theta\left[\cos\theta\left\{1-\alpha(1+\xi\cos\theta)^2\right\}+\alpha\xi\sin^2\theta\right]\times$$
$$\times\left[(1+\xi\cos\theta+\cos^2\theta)\left\{1-\alpha(1+\xi\cos\theta)^2\right\}+\alpha\xi\sin^2\theta\cos\theta\right]^{-1}.$$

$\xi=\varphi(\theta)$ を上の方程式の解で初期条件

$$(2\cdot 9)\qquad \varphi(0)=k$$

をみたすものとすると，容易にわかるように $\varphi(\theta)$ は θ に関して偶関数になる．したがって $\varphi(\theta)$ のフーリエ級数は

$$(2\cdot10)\quad \xi=\varphi(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{r=1}^{\infty}a_r\cos r\theta$$

の形になる．したがって

$$(2\cdot11)\qquad \tau=\cos\theta$$

とおくと，(2・10) から

$$(2\cdot12)\qquad \xi=\frac{1}{2}a_0+\sum_{r=1}^{\infty}a_rT_r(\tau)$$

を得る．ただし $T_r(\tau)$ はチエビシェフ多項式である．ξ を τ の関数と考え $\xi=\xi(\tau)$ で表わすと，それは (2・8), (2・11) によりつぎの微分方程式をみたすことになる：

$$(2\cdot13)\qquad \frac{d\xi}{d\tau}=-\frac{Q(\xi,\tau)}{P(\xi,\tau)}.$$

ただしここで

$$(2\cdot14)\quad \begin{cases} P(\xi,\tau)=(1-\alpha)(1+\tau^2)+\left[(1-2\alpha)\tau-3\alpha\tau^3\right]\xi \\ \qquad\qquad -\alpha(3\tau^2+\tau^4)\xi^2-\alpha\tau^3\xi^3, \\ Q(\xi,\tau)=\xi\left[(1-\alpha)\tau+\alpha(1-3\tau^2)\xi-\alpha\tau^3\xi^2\right]. \end{cases}$$

閉軌道の第I象限にある部分は，微分方程式 (2・13) を初

期条件 $\xi(1)=k \quad (0\leq k<\sqrt{n}-1)$ のもとで解いて得られる解で与えられることになる.

つぎに閉軌道に対応する(1・1)の周期解の周期に対する式を求めよう.

(2・1)を(1・2)の第1式に代入すると,

$$\frac{dr}{dt}\cos\theta-\frac{d\theta}{dt}r\sin\theta=r\sin\theta,$$

すなわち

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}=r\sin\theta$$

を得る. したがって(2・6), (2・7)よりつぎの式を得る:

$$(2.15)\qquad \frac{dt}{d\theta}=-1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\Xi\cos\theta+\Sigma\sin\theta}{-\Xi\sin\theta+\Sigma\cos\theta}$$

$$=-\frac{(1+\xi\cos\theta)[1-\alpha(1+\xi\cos\theta)^2]}{(1+\xi\cos\theta+\cos^2\theta)[1-\alpha(1+\xi\cos\theta)^2]+\alpha\xi\sin^2\theta\cos\theta}.$$

閉軌道 $\xi=\varphi(\theta)$ に対しては前に述べたように $\varphi(-\theta)=\varphi(\theta)$ であるから, 閉軌道に対応する(1・1)の周期解の周期 T に対してはつぎの式を得る:

$$(2\cdot16)\quad T=2\int_0^{\pi}\frac{(1+\xi\cos\theta)[1-\alpha(1+\xi\cos\theta)^2]}{(1+\xi\cos\theta+\cos^2\theta)[1-\alpha(1+\xi\cos\theta)^2]+\alpha\xi\sin^2\theta\cos\theta}d\theta.$$

この積分は明らかに *proper integral* である。(2.11) に対応して

$$\cos\theta=\tau$$

とおけば,

$$(2\cdot17)\quad T=2\int_0^{\pi}\Upsilon[\xi(\tau),\tau]d\theta$$

を得る。ただし

$$(2\cdot18)\quad \Upsilon(\xi,\tau)=R(\xi,\tau)/P(\xi,\tau)$$

で,

$$(2\cdot19)\quad R(\xi,\tau)=(1-\alpha)+(1-3\alpha)\tau\xi-3\alpha\tau^2\xi^2-\alpha\tau^3\xi^3$$

である。

われわれは (2.17) を

$$(2\cdot20)\quad T=2\pi T_0$$

と書いて,

$$(2\cdot21)\qquad T_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Upsilon[\xi(\tau),\tau]\,d\theta$$

を計算した。

［注意］ (2・8), (2・9) からわかるように，$k\to 0$ とすると $\xi\to 0$ となる。すなわち，点 $(\sqrt{\alpha},0)$ のまわりの閉軌道は $k\to 0$ とすると，点 $(\sqrt{\alpha},0)$ に収束する。このときは，(2・14), (2・19), (2・21) からわかるように，つぎの結果を得る：

$$(2\cdot22)\qquad \lim T_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq 0.70710\ 67812.$$

§3. T_0 の計算

(2・21) からわかるように，T_0 の数値計算はフーリエ係数の計算になるから，われわれはつぎのようにして T_0 を計算した：

$$(3\cdot1)\quad \left\{\begin{array}{l}\theta_i=\dfrac{i-0.5}{M}\pi,\ \tau_i=\cos\theta_i,\ \xi_i=\xi(\tau_i).\\ \qquad\qquad\qquad (i=1,2,\cdots,M),\end{array}\right.$$

$$\left\{ T_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y(\xi_i, \tau_i) \right.$$

M としては最初 64 をとり，そのあと必要に応じて

128, 256, 512

を用いた。

§4. ξ_i の計算

(A) n が大きくない場合

$\xi(\tau)$ は微分方程式 (2・13) の解であるから，(2・1), (2・7), (2・11) により

(4・1) $x = \sqrt{\alpha}\,(1+\tau\xi),\quad y = \sqrt{\alpha}\,\sqrt{1-\tau^2}\cdot\xi$

は方程式 (1・4) をみたしていなければならない。したがって (4・1) を (1・4) に代入して，$\xi=\xi(\tau)$ に関するつぎの方程式を得る：

(4・2) $$c\left[\frac{1-\alpha(1+\tau\xi)^2}{\alpha(1+\tau\xi)^2}\right]^{1/n} = 1-\alpha(1+\tau\xi)^2-\alpha(1-\tau^2)\xi^2,$$

すなわち，

$$(cn)^n \cdot \frac{n-(1+\tau\xi)^2}{(1+\tau\xi)^2} = \left[(n-1)-2\tau\xi-\xi^2\right]^n.$$

そこで

$$(4\cdot3)\quad F(\xi,\tau)=(1+\tau\xi)^2\left[(n-1)-2\tau\xi-\xi^2\right]^n - (cn)^n\left[n-(1+\tau\xi)^2\right]$$

とおき，$\xi=\xi(\tau)$ は方程式

$$(4\cdot4)\qquad F(\xi,\tau)=0$$

の根として計算する．

方程式 $(4\cdot4)$ には積分定数 c が含まれているので，これはつぎのようにして定める．すなわち，$\xi=\xi(\tau)$ に対する初期条件 $\xi(1)=k$ により，$(4\cdot4)$ において $\tau=1$, $\xi=k$ とおき，得られた方程式を c について解く．簡単な計算で

$$(4\cdot5)\qquad c=\frac{1}{n}\left[(1+k)^2\left\{n-(1+k)^2\right\}^{n-1}\right]^{1/n}$$

を得る．

$\tau=\tau_i$ に対応する $\xi_i=\xi(\tau_i)$ を計算するのには，

ニュートン法を用い，その出発値は微分方程式(2・13)をルンゲ・クッタ法によって解いて求めた。出発値とニュートン法で得られた値との差が一定値（われわれの計算では 0.05 をとった）より大きくなると，われわれは M を2倍して計算をやり直した。

なお，いまの場合には，T_0 の計算を行うときは，(2・18) の $\Upsilon(\xi, \tau)$ はつぎのように書き直して計算を行った：

$$(4\cdot6)\quad \Upsilon(\xi,\tau)=R_1(\xi,\tau)\Big/P_1(\xi,\tau).$$

ただし

$$(4\cdot7)\quad \begin{cases} R_1(\xi,\tau)=(n-1)+(n-3)\tau\xi-3\tau^2\xi^2-\tau^3\xi^3, \\ P_1(\xi,\tau)=(n-1)(1+\tau^2)+[(n-2)\tau-3\tau^3]\xi \\ \qquad\qquad -(3\tau^2+\tau^4)\xi^2-\tau^3\xi^3. \end{cases}$$

上の方法で，われわれは $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20$ に対して計算を行った。

（B） n が大きい場合

n が大きい場合には，(4・3) で与えられる関数の計算は必ずしも精密には行われない。したがって，n が大きい場合には，$\xi=\xi(\tau)$ を求めるのに，われわれは (4・2) か

ら導かれるつぎの方程式を利用した：

$$(4\cdot 8) \qquad F_0(\xi, \tau)=0.$$

ただし

$$(4\cdot 9) \qquad F_0(\xi,\tau)= c\left[1-\alpha(1+\tau\xi)^2\right]^{\alpha} - \alpha^{\alpha}(1+\tau\xi)^{2\alpha}\left[(1-\alpha)-2\alpha\tau\xi-\alpha\xi^2\right].$$

この場合には，T_0 を計算するときは，(2・18) で与えられる $Y(\xi, \tau)$ それ自身を用いた。

このような方法で，われわれは $n=20, 50, 100, 1000$ に対して計算を行った。

［注意］ 方程式 (1・1) の場合には，それの第一積分が (1・4) のようにあらわに求められるので，それの周期解の周期も，*improper integral* (1・7) を直接数値積分したり，あるいは上に述べたような方法を用いたりして，比較的容易に計算される．しかし，方程式 (1・1) が少し一般的になって，たとえば［5］で論じられている方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+g(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+f(x)=0$$

になると，もはや第一積分が一般にはあらわには求められな

い．しかし，このような場合でも極座標を導入して（2・13）の形の微分方程式が得られるならば，われわれは初期条件 $\xi(1)=k$ をみたす解に対して，筆者の方法［4］によってそれのチエビシェフ級数を計算することができる．$\xi(\tau)$ のチエビシェフ級数が得られるならば，$\xi_i=\xi(\tau_i)$ は容易に計算できるので，上に述べた方法によってわれわれは T_0 を計算することができる。筆者はこのような方法によって，方程式（1・1）の周期解の周期を $n=2, 3, 4, 10, 20$ の場合について計算してみた。計算時間は可成りかかったが，計算結果は（A），（B）で述べた方法によって得られたものと変りなかった．

§5．計算結果

計算で得られた結果は，まとめて図示すると，18，19ページの図のようになる．この図から，方程式（1・1）の周期解の周期は振幅の増大にともなって単調減少し，それは高々

$$2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,\pi$$

であるように思われる．（1・1）の周期解の周期が 2π を越えないことは，最近東大の古屋教授によって証明されたが［1］，周期が $\sqrt{2}\,\pi$ を越えない，ということは未だ証明

されていない。

文献

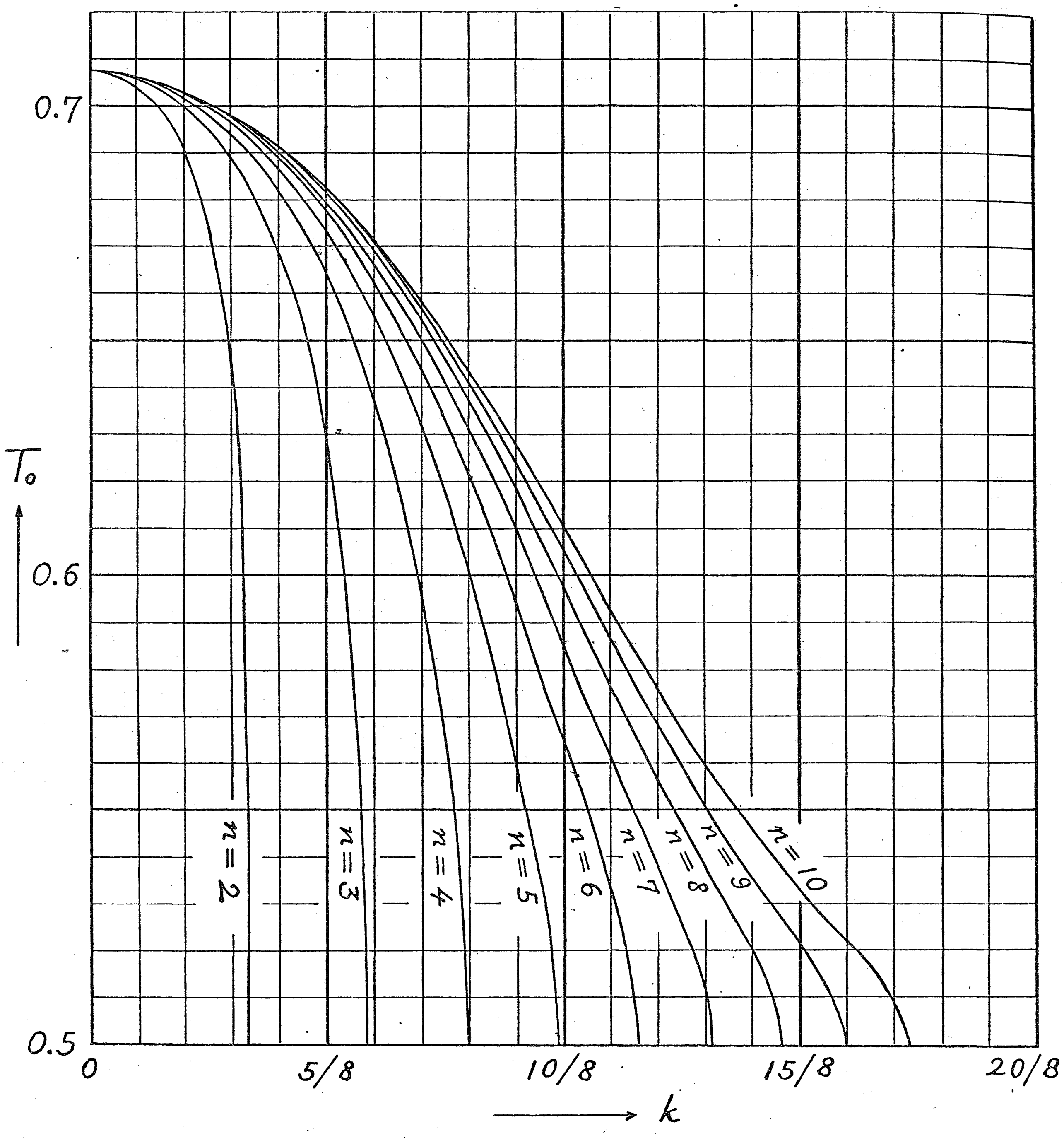
[1] Furuya, S. : On periods of periodic solutions of a certain nonlinear differential equation, to appear in Japan-US Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin,1972.

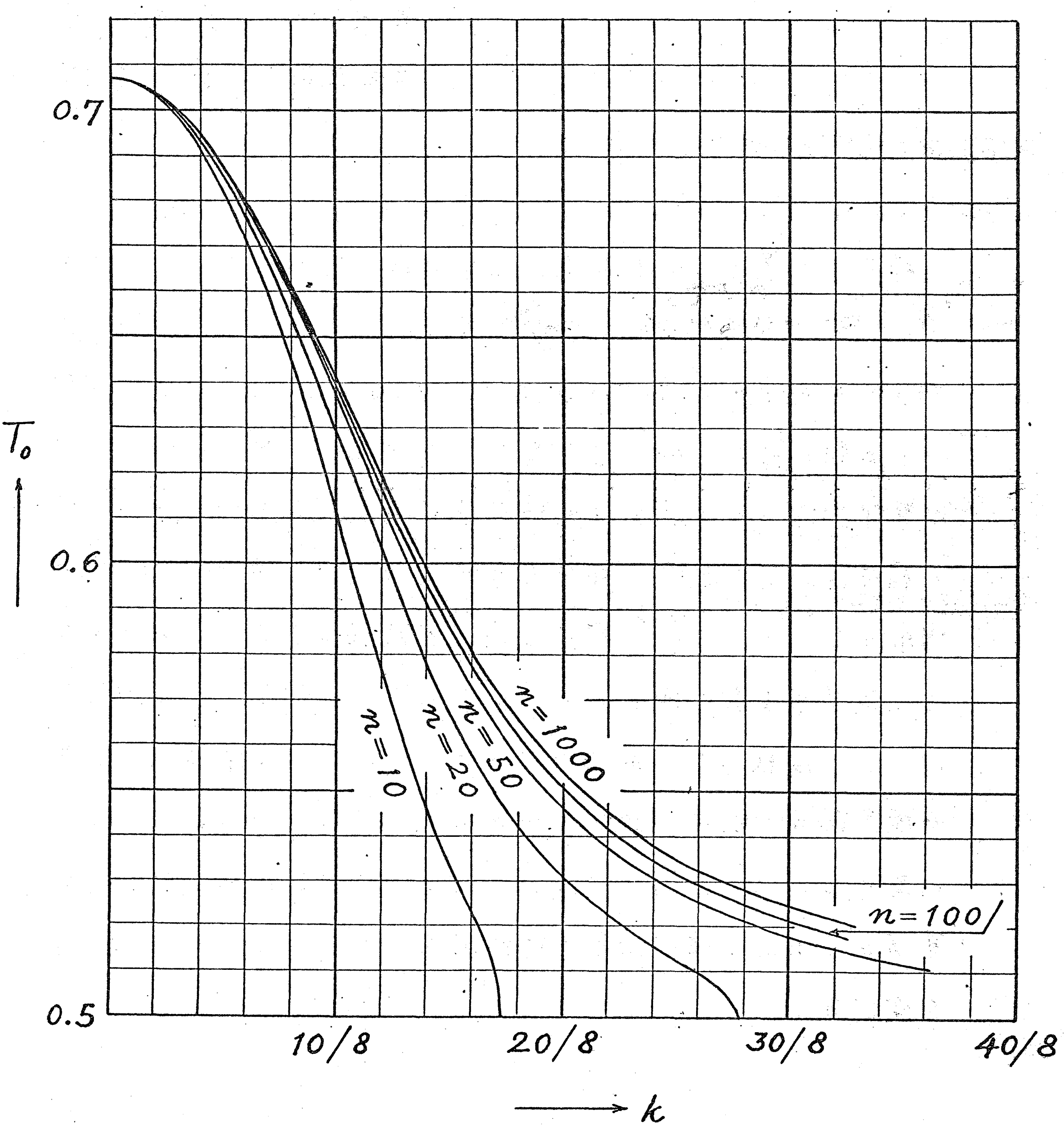
[2] Otsuki, T. : Minimal hypersurfaces in a Riemanian manifold of constant curvature, Amer. J. Math., 92(1970), 145-173.

[3] 高橋秀俊, 森正武：変数変換によって得られる積分公式, 京都大学数理解析研究所講究録 No. 149 , 1972.

[4] Urabe, M. : Numerical solution of boundary value problems in Chebyshev series- a method of computation and error estimation, Conference on the Numerical Solution of Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 109, Springer-Verlag, Berlin, 1969, p. 40-86.

[5] Utz, W. R. : Periodic solutions of a nonlinear second order differential equation, SIAM J. Appl. Math., 19(1970), 56-59.


0.7
0.6
0.5
T_0
0
5/8
10/8
15/8
20/8
k
$n=2$
$n=3$
$n=4$
$n=5$
$n=6$
$n=7$
$n=8$
$n=9$
$n=10$


0.7
0.6
0.5
T_0
10/8
20/8
30/8
40/8
k
n=10
n=20
n=50
n=1000
n=100