

2次元正規分布関数 $L(\mu, \sigma, \rho)$

の計算について (その1)

電研研 宇田英雄, 高山文雄

慶大工 竹内寿一郎

東大工 高沢嘉光

1. 問題

2次元の正規分布の pdf を $f(x, y; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ とする。

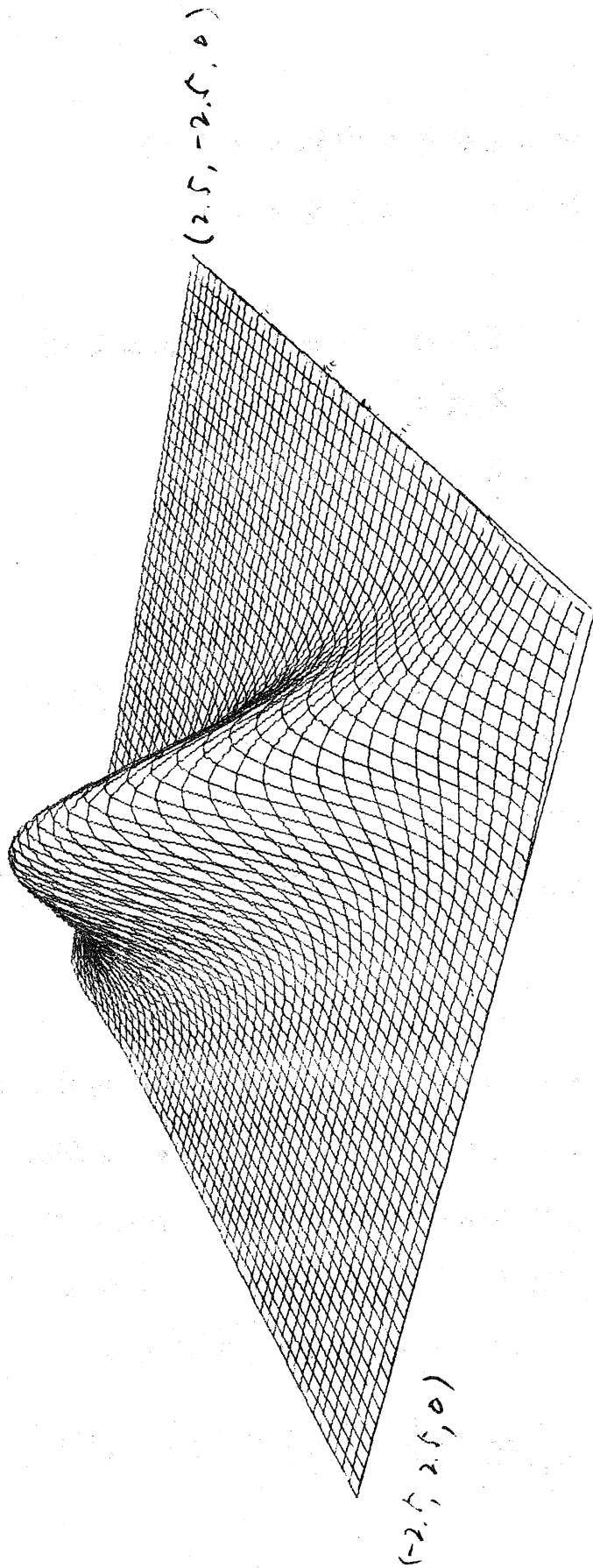
$$(1.1) \quad f(x, y; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) \\ = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right]$$

とかくと, この分布は $x=\mu_1, y=\mu_2$ を中心(平均値)として
密度関数の値が等しい處では楕円となる。 σ_1 は $\sqrt{V(x)}$, σ_2 は
 $\sqrt{V(y)}$ で ρ が相関係数を表す。 $\mu_1=\mu_2=0, \sigma_1=\sigma_2=1.0, \rho=0.9$

の $f(x, y)$ の図像 ^が 高沢により次のように示された。(図-1)

$\mu_1=\mu_2=0, \sigma_1=\sigma_2=1$ のときは, 次の $\sqrt{1-\rho^2}$ は

$$(1.2) \quad f(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \{ x^2 - 2\rho xy + y^2 \} \right]$$



$(-2.5, 2.5, 0)$

$(2.5, -2.5, 0)$

$\mu_1=0, \mu_2=0, \rho=0.9, \sigma_1=1.0, \sigma_2=1.0$

視景 $P(-10, -6, 5)$ $(\alpha=30^\circ, \beta=-18^\circ)$
 視角

$(-2.5, -1.5, 0)$ 高次氏描 <

圖-1 $f(x, y; \mu_1=0, \mu_2=0, \rho=1, \sigma_1=1, \sigma_2=1, \rho=0.9)$ の 視景

$$(1.3) \quad L(h, k; f) = \int_h^\infty \int_k^\infty f(x, y; f) dx dy$$

とかく。 $z = z'$,

(h, k, f) を与えて, $L(h, k; f)$ を求める計算法を向題とする。

たとえば,

$$(1.4) \quad L(0, 0; f = \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \sin^{-1}(0.5) / (2\pi) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{3}.$$

$L(h, k, f)$ の図を次に示す。(例) (圖-3で切り取られた部分)

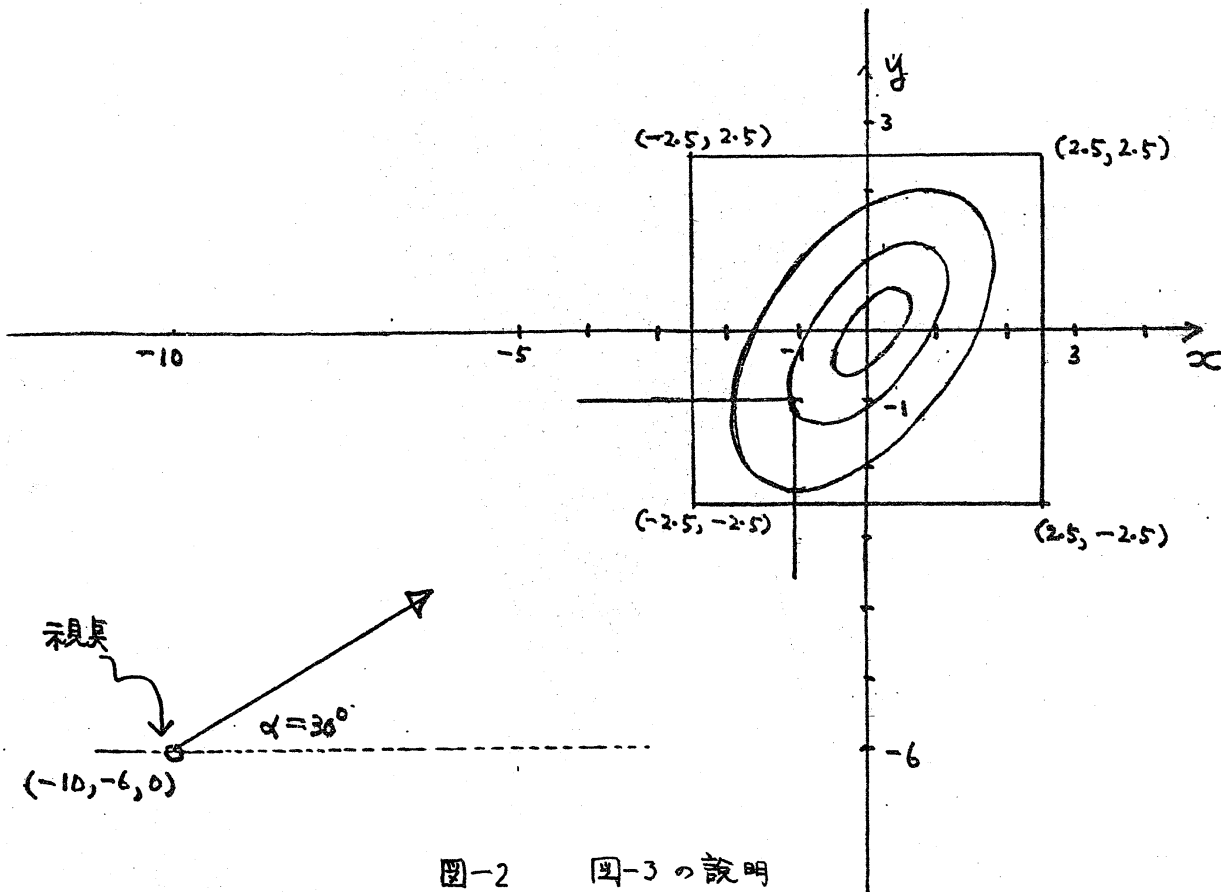
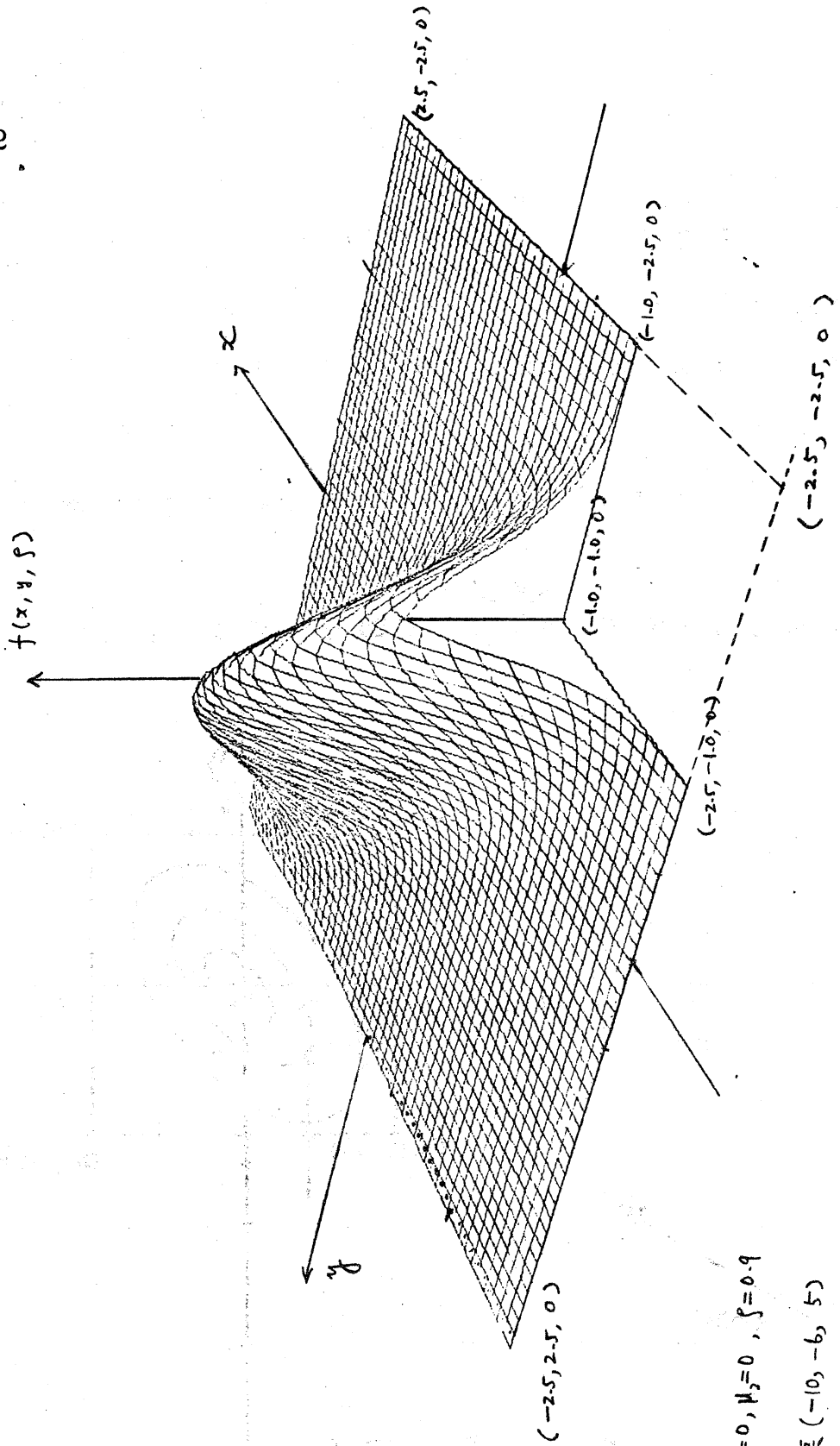


圖-2 圖-3の説明



$\mu_1=0, \mu_2=0, \xi=0.9$

视点 $(-1.0, -6, 5)$

视角 $\alpha=30^\circ, \beta=-18^\circ$

领域 $-2.5 \leq x, y \leq 2.5$

$MM=50$

图-3 L ($\mu_1=-2.5, \mu_2=-2.5$) 的透视图

高深反插 <

2. 2次元正規分布関数の計算のための記号

$$(2.1) \quad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-t^2/2)$$

$$(2.2) \quad Q(x) = \int_x^{\infty} \phi(t) dt$$

$$(2.3) \quad f(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}\right\}$$

$$(2.4) \quad V(h, k) = \int_0^h \phi(x) dx \int_0^{\frac{\rho}{h}x} \phi(y) dy$$

$$(2.5) \quad T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{\exp(-\frac{1}{2} h^2 (1+x^2))}{1+x^2} dx$$

$$(2.6) \quad L(h, k; \rho) = \int_h^{\infty} dx \int_k^{\infty} dy \cdot f(x, y; \rho)$$

3. $L(h, k; \rho)$ の計算法

$$(3.1) \quad L(h, k; \rho)$$

$$= \int_0^{\rho} \frac{dt}{2\pi\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{-\frac{h^2 - 2t \cdot hk + k^2}{2(1-t^2)}\right\} + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$= \int_0^{\sin^{-1} \rho} \frac{d\theta}{2\pi} \exp\left\{-\frac{h^2 - 2\sin\theta \cdot hk + k^2}{2\cos^2\theta}\right\} + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$(2.2) \quad L(h, k; f)$$

$$= V\left(h, \frac{k-fh}{\sqrt{1-f^2}}\right) + V\left(k, \frac{h-fk}{\sqrt{1-f^2}}\right) \\ + \frac{\sin^{-1} f}{2\pi} + \frac{1}{2} (Q(h) + Q(k)) - \frac{1}{4}$$

$$(3.3) \quad L(h, 0; f) \quad (\text{山内 = 部 講義 } 1 - \text{ト})$$

$$= Q(h) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \cos^{-1} f \cdot \phi(w) - \sum_{m=0}^h h^{2m+1} \frac{A_m}{m! 2^m (2m+1)} \right.$$

$$\left. z = z'', \quad w = \frac{h}{\sqrt{1-f^2}} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$$

$$A_0 = \Phi(-w)$$

$$A_1 = \phi(w)/w - A_0$$

$$A_2 = \phi(w)/w^3 - A_1$$

$$A_3 = 3\phi(w)/w^5 - A_2$$

...

$$A_m = (2m-3)(2m-5)\cdots 3 \cdot 1 \cdot \phi(w)/w^{2m-1} - A_{m-1}$$

4. 数値積分による結果

(3.1) をガウスの積分公式(28頁)で求めた。\$|f|\$ が 1 に近くなると精度が出にくい。数値例として \$f=0.99\$ の場合と \$f=0.9999\$ の場合を比較して附表-1に示す。

この表で、\$L_1, L_2, E_R\$ という記号は、次の値を示す。

$$g(h, k, \theta) \triangleq \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{h^2 - 2 \sin \theta \cdot h k + k^2}{2 \cos^2 \theta} \right\}$$

とおき、

$$L_1 \triangleq \left\{ \int_0^{\sin^{-1} 0.8} + \int_{\sin^{-1} 0.8}^{\sin^{-1} f} \right\} \cdot g(h, k, \theta) d\theta + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$L_2 \triangleq \left\{ \int_0^{\sin^{-1} 0.8} + \int_{\sin^{-1} 0.8}^{\sin^{-1} 0.9} + \int_{\sin^{-1} 0.9}^{\sin^{-1} f} \right\} \cdot g(h, k, \theta) d\theta + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$E_R \triangleq (L_1 - L_2) / L_2$$

である。ガウスの積分公式は \$L_1, L_2\$ の各積分の項ごとに用いた。

なお \$L(0, 0, f) = \frac{1}{4} + \frac{\sin^{-1} f}{2\pi}\$

で \$h=0, k=0\$ のときは check できる。

\$f\$ を固定して \$(h, k)\$ の各点で \$L(h, k; f)\$ の値の相対誤差 \$E_R\$ を図示したのが図-4 である。\$h=k, (f > 0)\$ での

精度がよいのは、

$$g(h, k, \theta) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{h^2}{1 + \sin \theta} \right\}$$

と変形したからである。

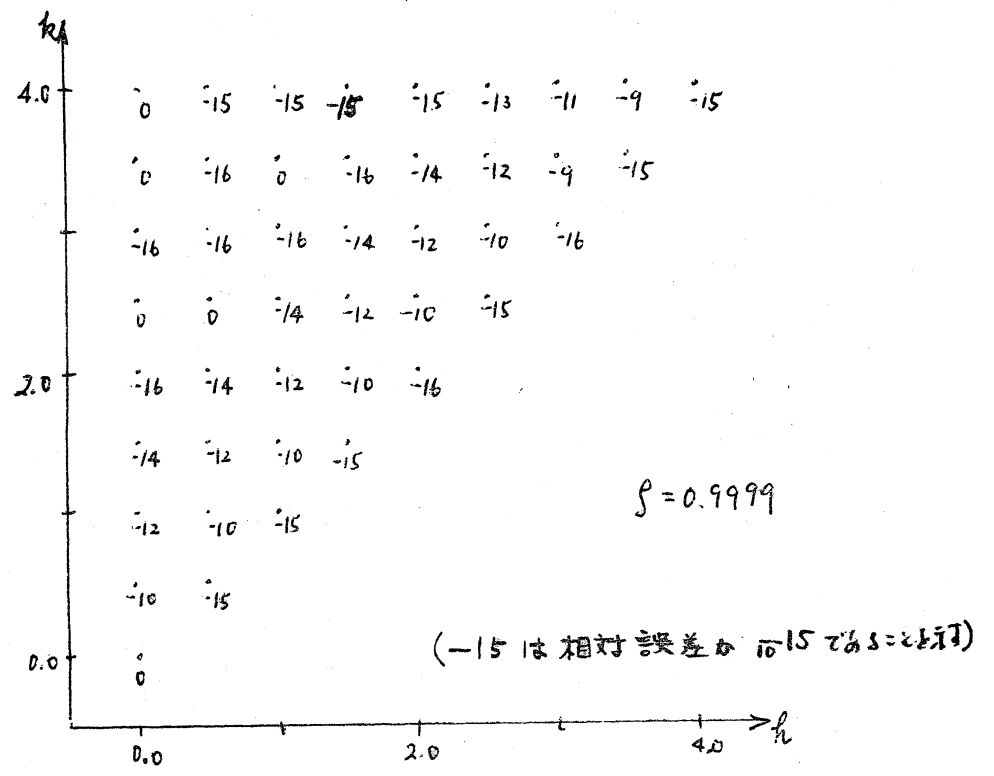
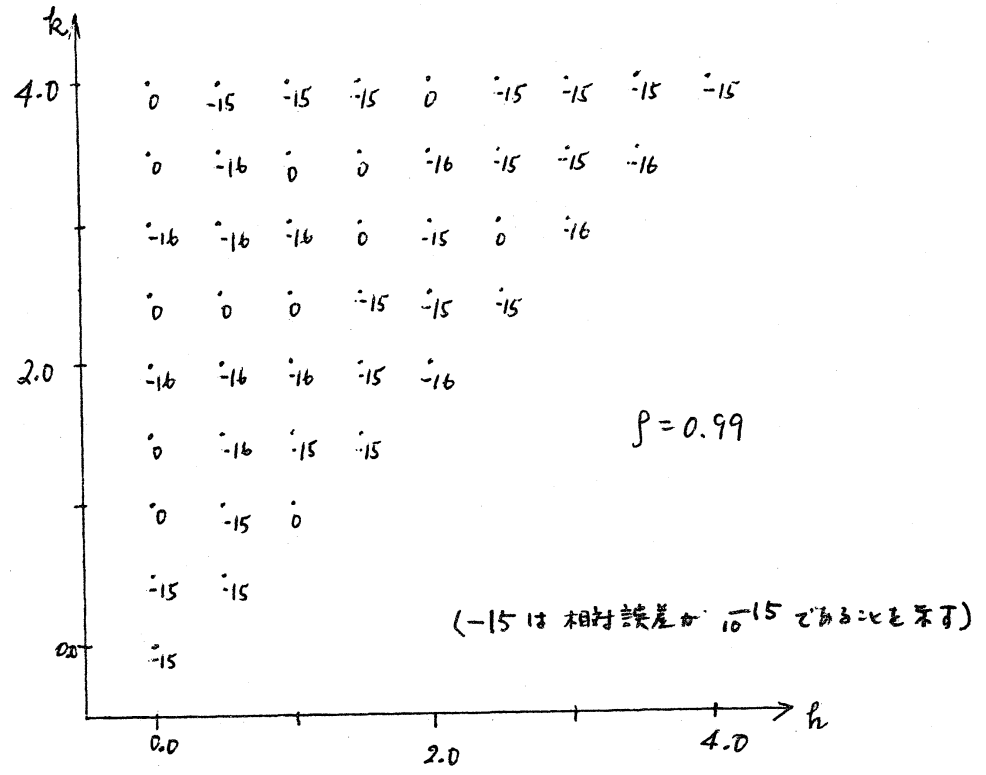


図-4 (3-1)式による相対誤差

*** RHO= 0.99000000 00 ***

#H	#K	L1	L2	EM	正峰値	EX
0.00000000 00	0.00000000 00	0.47747329317779340 00	0.47747329317779350 00	-0.183025280-15	0.47747329317779340	0.47747329317779340
0.00000000 00	0.10000000 01	0.15865525393145180 00	0.15865525393145180 00	0.00000000 00		
0.00000000 00	0.20000000 01	0.22750131948179060-01	0.22750131948179060-01	0.762511390-16		
0.00000000 00	0.30000000 01	0.13498980316286140-02	0.13498980316286140-02	0.803173390-16		
0.00000000 00	0.40000000 01	0.31671241833120380-04	0.31671241833120380-04	0.00000000 00		
0.10000000 01	0.10000000 01	0.14500353484799420 00	0.14500353484799420 00	0.00000000 00		
0.10000000 01	0.20000000 01	0.22750131948177340-02	0.22750131948177340-02	0.453150380-16		
0.10000000 01	0.30000000 01	0.13498980316296340-02	0.13498980316296340-02	0.477315270-16		
0.10000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120350-04	0.31671241833120350-04	0.127151420-15		
0.20000000 01	0.20000000 01	0.192711642648669050-01	0.192711642648669050-01	-0.903780750-16		
0.20000000 01	0.30000000 01	0.13498980316297840-02	0.13498980316297840-02	0.123280660-15		
0.20000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120340-04	0.31671241833120340-04	0.00000000 00		
0.30000000 01	0.30000000 01	0.11015199986206250-02	0.11015199986206250-02	0.985909220-16		
0.30000000 01	0.40000000 01	0.31671241833107630-04	0.31671241833107630-04	0.321368350-15		
0.40000000 01	0.40000000 01	0.24214295411909130-04	0.24214295411909140-04	-0.559714350-15		

*** RHO= 0.99990000 00 ***

#H	#K	L1	L2	EM	正峰値	EX
0.00000000 00	0.00000000 00	0.49774919045259450 00	0.49774919045259450 00	0.00000000 00	0.49774919045259450	0.49774919045259450
0.00000000 00	0.10000000 01	0.15865525393147140 00	0.15865525393145690 00	0.182290270-12		
0.00000000 00	0.20000000 01	0.22750131948179060-01	0.22750131948179060-01	0.762511390-16		
0.00000000 00	0.30000000 01	0.13498980316286140-02	0.13498980316286140-02	0.803173390-16		
0.00000000 00	0.40000000 01	0.31671241833120380-04	0.31671241833120380-04	0.00000000 00		
0.10000000 01	0.10000000 01	0.15729008030865540 00	0.15729008030865540 00	0.105040390-15		
0.10000000 01	0.20000000 01	0.22750131948184480-01	0.22750131948179230-01	0.274065350-12		
0.10000000 01	0.30000000 01	0.13498980316296340-02	0.13498980316296340-02	0.954630540-16		
0.10000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120350-04	0.31671241833120350-04	0.127151420-15		
0.20000000 01	0.20000000 01	0.22445528154435550-01	0.22445528154435550-01	-0.791101180-16		
0.20000000 01	0.30000000 01	0.13498980316307270-02	0.13498980316300370-02	0.523120930-12		
0.20000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120340-04	0.31671241833120340-04	0.218937210-15		
0.30000000 01	0.30000000 01	0.13248956714195730-02	0.13248956714195730-02	-0.409728660-16		
0.30000000 01	0.40000000 01	0.31671241833152930-04	0.31671241833120050-04	0.103962660-11		
0.40000000 01	0.40000000 01	0.30916280014048620-04	0.30916280014048620-04	-0.219188190-15		

附表一 (3-1) $L(k, k; \rho)$ 表

5. 附記

$L(h, k, f)$ を表わす (1.3) 式を極坐標で考えて見るようにとのコメントを高橋秀俊先生から頂いた。山内の近似式 (3.3) は極坐標による式の変形である。 $L(h, k; f)$ を (3.2) 式で計算する式で、 Γ 関数 (2.4) 式を極坐標で表わして級数展開して次の式を得た。

$$(5.1) \quad \Gamma(h, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^h dx \int_0^{\left(\frac{f}{h}\right)x} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy$$

$$\begin{aligned} (\tan \alpha &= \frac{f}{h} \text{ とおく}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha d\theta \int_0^{h/\cos\theta} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \alpha - \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{h^2 \tan^2 \theta}{2}\right) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \tan \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^i B_i}{(i+1)!} \end{aligned}$$

\dots

$$(5.2) \quad \begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= 1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \\ B_2 &= 1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha + \frac{1}{5} \tan^4 \alpha \\ B_3 &= 1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha + \frac{1}{5} \tan^4 \alpha - \frac{1}{7} \tan^6 \alpha \\ &\dots \end{aligned}$$

$$B_i = B_{i-1} + (-)^i \frac{1}{2^{i+1}} \tan^{2i} \alpha$$

...

$$B_\infty = \alpha / \tan \alpha \quad (|\tan \alpha| \leq 1 \text{ のとき})$$

(5.3) ∇ 関数の性質を示す式:

$$\nabla(-h, \delta) = \nabla(h, -\delta) = -\nabla(h, \delta)$$

$$\nabla(h, 0) = \nabla(0, \delta) = 0$$

$$\nabla(h, \delta) + \nabla(\delta, h) = \int_0^h \phi(x) dx + \int_0^\delta \phi(y) dy$$

と用いると (5.1) は $|\tan \alpha| = \left| \frac{\delta}{h} \right| \leq 1$

の範囲で成り立つ。特に $|\tan \alpha|$ が小さいときは,

$$(5.4) \quad \nabla(h, \delta) = \frac{1}{2\pi} \tan \alpha \cdot \left[\left(\frac{h^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^i B_{i+1}}{(i+1)!}\right) + B_{l+1} \cdot \left\{1 - \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^l \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^i}{i!}\right)\right\} \right]$$

ここで, l は $B_{l+1} \doteq B_{l+2} \doteq B_{l+3} \doteq \dots \doteq \frac{\alpha}{\tan \alpha}$

と有限桁数の演算で数値的に収束したと見なされる番号 l

を求める。

$\rho = 0.99$ と 0.9999 に對して, $h = 0(1)4$, $k = h(1)4$

を (5.4) と用いた数値例を附表-2 と 附表-3 に示す。

0.99000000 00

H K V1 V2 T1 T2 L (H,K,RO)

13H 20M 33S

		$V(k, \frac{k-fk}{\sqrt{1-fk}})$	$V(k, \frac{k-fk}{\sqrt{1-fk}})$	$\frac{\Delta u^{-1} f}{2\pi}$	$\frac{Q(k) + Q(k) - a_{15}}{2}$	
0.00000000 00	0.00000000 00	0.00000000 00	0.00000000 00	0.2274733D 00	0.25000000 00	0.4774732931777939D 00
0.00000000 00	0.10000000 01	0.00000000 00	-0.1481457D 00	0.2274733D 00	0.7932763D-01	0.1586552539314525D 00
0.00000000 00	0.20000000 01	0.00000000 00	-0.2160982D 00	0.2274733D 00	0.1137507D-01	0.2275013194817905D-01
0.00000000 00	0.30000000 01	0.00000000 00	-0.2267983D 00	0.2274733D 00	0.6749490D-03	0.1349898031615241D-02
0.00000000 00	0.40000000 01	0.00000000 00	-0.2274575D 00	0.2274733D 00	0.1583562D-04	0.3167124183320325D-04
0.10000000 01	0.10000000 01	0.4437494D-02	0.4437494D-02	0.2274733D 00	-0.9134475D-01	0.1450055348479947D 00
0.10000000 01	0.20000000 01	0.1485860D 00	-0.1940118D 00	0.2274733D 00	-0.1592973D 00	0.2275013194817714D-01
0.10000000 01	0.30000000 01	0.1595207D 00	-0.2156467D 00	0.2274733D 00	-0.1699974D 00	0.1349898031615565D-02
0.10000000 01	0.40000000 01	0.1632188D 00	-0.2200039D 00	0.2274733D 00	-0.1706565D 00	0.3167124183332812D-04
0.20000000 01	0.20000000 01	0.97444109D-02	0.97444109D-02	0.2274733D 00	-0.2272499D 00	0.1971164264866871D-01
0.20000000 01	0.30000000 01	0.1986761D 00	-0.1838495D 00	0.2274733D 00	-0.2379500D 00	0.1349898031614854D-02
0.20000000 01	0.40000000 01	0.2165385D 00	-0.2053711D 00	0.2274733D 00	-0.2386091D 00	0.3167124183303671D-04
0.30000000 01	0.30000000 01	0.1113916D-01	0.1113916D-01	0.2274733D 00	-0.2486501D 00	0.1101519998665721D-02
0.30000000 01	0.40000000 01	0.1872790D 00	-0.1654114D 00	0.2274733D 00	-0.2493092D 00	0.3167124183324468D-04
0.40000000 01	0.40000000 01	0.1125962D-01	0.1125962D-01	0.2274733D 00	-0.2499683D 00	0.2421429541191171D-04

13H 20M 38S

附表-2 (5.4) 1=13 L(k, k; f) 表

R0= 0,999900000D 00

H K V1 V2 T1 T2 L(H,K,R0)

12H 05M 43S

$$V\left(k, \frac{k-jk}{\sqrt{1-j^2}}\right) \quad V\left(k, \frac{k-jk}{\sqrt{1-j^2}}\right) \quad \frac{\Delta^{m-1} \int}{2\pi} \quad \frac{Q(k) + Q(k) - 0.5j}{2}$$

0.0000000D 00	0.0000000D 00	0.0000000D 00	0.0000000D 00	0.2477492D 00	0.2500000D 00	0.4977491904525991D 00
0.0000000D 00	0.1000000D 01	0.0000000D 00	-0.1664216D 00	0.2477492D 00	0.7932763D-01	0.1586552539314599D 00
0.0000000D 00	0.2000000D 01	0.0000000D 00	-0.2363741D 00	0.2477492D 00	0.1137507D-01	0.2225013194818125D-01
0.0000000D 00	0.3000000D 01	0.0000000D 00	-0.2470742D 00	0.2477492D 00	0.6749490D-03	0.1349898031617475D-02
0.0000000D 00	0.4000000D 01	0.0000000D 00	-0.2477534D 00	0.2477492D 00	0.1583562D-04	0.31671241835457D-04
0.1000000D 01	0.1000000D 01	0.4428180D-03	0.4428180D-03	0.2477492D 00	-0.9134475D-01	0.1572900803086569D 00
0.1000000D 01	0.2000000D 01	0.1684220D 00	-0.2341238D 00	0.2477492D 00	-0.1592973D 00	0.222501319481815D-01
0.1000000D 01	0.3000000D 01	0.1695471D 00	-0.2459489D 00	0.2477492D 00	-0.1699974D 00	0.1349898031617378D-02
0.1000000D 01	0.4000000D 01	0.1699222D 00	-0.2469831D 00	0.2477492D 00	-0.1706565D 00	0.3167124183534043D-04
0.2000000D 01	0.2000000D 01	0.9731029D-03	0.9731029D-03	0.2477492D 00	-0.2272499D 00	0.2244552815443497D-01
0.2000000D 01	0.3000000D 01	0.2341256D 00	-0.2425749D 00	0.2477492D 00	-0.2379500D 00	0.1349898031617368D-02
0.2000000D 01	0.4000000D 01	0.2363746D 00	-0.2454830D 00	0.2477492D 00	-0.2386091D 00	0.3167124183527104D-04
0.3000000D 01	0.3000000D 01	0.1112904D-02	0.1112904D-02	0.2477492D 00	-0.2486501D 00	0.1324895671403564D-02
0.3000000D 01	0.4000000D 01	0.24225789D 00	-0.2409872D 00	0.2477492D 00	-0.2493092D 00	0.3167124183525716D-04
0.4000000D 01	0.4000000D 01	0.1125027D-02	0.1125027D-02	0.2477492D 00	-0.2499683D 00	0.3091628001251901D-04

PT 表-3 (5.4) = f3 L(k, k; j) 表

附表-1 と比べて見ると、次のようになる。

$\rho = 0.99$	実行時間 (H-8400)	有効桁数
数値積分法	23 sec	15~16
▽関数法	5 sec	10~15

$\rho = 0.9999$	実行時間 (H-8400)	有効桁数
数値積分法	23 sec	12~16
▽関数法	4 sec	10~15

6. 参考文献

- 1) Tables of Bivariate Normal Distribution Function and Related Functions, N.B.S. applied Math. ser. 50 (1959)
- 2) 山内二郎編, 統計数値表 JSA, 日本規格協会 (1972)
(近刊)