数理解析研究所講究録
152巻 1972年 160-168

On the group of pseudo-isotopies

都立大 理　郡山 彬

§0. 序

M を compact, C^∞-manifold, $\partial M = \phi$ とする。

$\mathrm{Diff}(M\times I) = \{\varphi \mid \varphi : M\times I \to M\times I \ C^\infty\text{-diffeo.}\}$ とする。

group of pseudo-isotopies of M とは、$\mathrm{Diff}(M\times I)$ の subgroup

$$\mathcal{P}(M) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M\times I) \mid \varphi \text{ keeps } M\times\{0\} \text{ pointwise fixed.}\}$$

である。$\mathcal{P}(M)$ は $(\varphi\cdot f)(x) = \varphi(f(x), 1)$ ($f \in \mathrm{Diff}(M)$, $x \in M$) によって、$\mathrm{Diff}(M)$ に自然に作用する。

2つの diffeomorphisms $f, g \in \mathrm{Diff}(M)$ は、この作用で equivalent の時 pseudo-isotopic と呼ぶ。$\mathcal{P}(M)$ が connected ならば pseudo-isotopic と isotopic は一致する。

このノートで $\mathcal{P}(M)$ が C^∞-manifold になることを示す。

§1. Manifold の定義

この節の詳しいことは Lang [4] を参照されたい。

Def. 1.1. X を linear space とする。

$\mathbb{E}=(X,\|\ \|)$ が次の(i)〜(iii)を満すとき normed space と呼ぶ.

(i) $0\leq\|x\|<\infty$, $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$

(ii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

(iii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

Def. 1.2. complete normed space $\mathbb{E}$ を Banach space, 内積の定義された Banach space $\mathbb{E}$ を Hilbert space と呼ぶ.

Def. 1.3. $\mathbb{E},\mathbb{F}$: topological vector spaces

$U\subset\mathbb{E}$: open subset , $f:U\longrightarrow\mathbb{F}$: conti. map とする.

f が diff'ble at $x_0\in U$ とは,

$\exists$ conti. linear map $Df(x_0):\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$

s.t. $$\lim_{\|y\|\to 0}\frac{\|f(x_0+y)-f(x_0)-Df(x_0)y\|}{\|y\|}=0$$

特に U の各点で diff'ble のとき, f は diff'ble on U と呼ぶ.

この時各 $Df(x)$ は f の derivative $Df:U\longrightarrow L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ を導く.

ここに $L(\mathbb{E},\mathbb{F})=\{\varphi\mid\varphi:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$: conti. linear $\}$.

Def. 1.4. $f:U\longrightarrow\mathbb{F}$ が diff'ble map of class C^1 とは, f は diff'ble on U かつ, derivative $Df:U\to L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ が continuous. また, C^1-map $f:U\to\mathbb{F}$ が diff'ble map of class C^2 とは, $Df:U\longrightarrow L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ が U で diff'ble かつ, derivative $D^2f=D(Df):U\longrightarrow L(\mathbb{E},L(\mathbb{E},\mathbb{F}))$ が conti.

以下帰納的に定義する.

(Remark： $L(\mathbb{E}, L(\mathbb{E}, \cdots, L(\mathbb{E},\mathbb{F}))\cdots)$ は canonical に
$L(\mathbb{E}, \cdots, \mathbb{E}; \mathbb{F})$ と identify される．)

Def. 1.5.　$\mathbb{E}$: fixed Banach (Hilbert) space

$X=(X, (U_i, \varphi_i))$ が次の (0)〜(3) の条件を満すとき X を Banach (Hilbert) manifold modeled on $\mathbb{E}$ of class C^r と呼ぶ．

(0)　X : set

(1)　$U_i \subset X$: subset s.t.　$X = \bigcup U_i$

(2)　$\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i U_i \underset{open}{\subset} \mathbb{E}$: bijection (of sets)

かつ、任意の i, j に対して

$\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{E}$: open subset

(3)　map $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ は C^r-isomorphism for each pair of indices i, j.

(Note：　X には各 U_i が open set になる topology が unique に入る)

§2.　Banach manifold $\mathfrak{M}_k(N, M)$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$

この節でよく知られた manifold $\mathfrak{M}_k(N,M)$ について概略を述べる．証明は全て省略する．詳しいことは Omori [2] を参照されたい．

N : compact, C^∞-Riemann manifold, $\dim N = n < \infty$

M : complete, C^∞-Riemann manifold, $\partial M = \phi$, $\dim M = m < \infty$

夫々の tangent bundle を $T(N)$, $T(M)$ と記す．

$$T^k(N) \equiv \begin{array}{c} T(N)\times\cdots\times T(N) \\ \downarrow \\ N \end{array} \quad : k\text{個の直積}$$

また $T(N)$ に於る unit sphere bundle $S(N)$ に対して

$$S^k(N) \equiv \begin{array}{c} S(N)\times\cdots\times S(N) \\ \downarrow \\ N \end{array} \quad : k\text{個の直積}$$

とする。$S^k(N)$ は compact manifold である。

C^k-map $\varphi : N \to M$ に対して $\tilde{d}^k\varphi : T^k(N) \to T(M)$ を次のように定義する。点 $x \in N$, $\varphi(x) \in M$ に於る local coordinate を夫々 $(x^1, \cdots, x^n)$, $(y^1, \cdots, y^m)$ とする。この時

$$(\tilde{d}^k\varphi)(x) \equiv \sum_{\substack{|a|=k \\ A=1,\cdots,m}} \frac{\partial^k \varphi^A}{\partial(x^1)^{a_1}\cdots\partial(x^n)^{a_n}}(0)\,(dx^1)^{a_1}\otimes\cdots\otimes(dx^n)^{a_n}\otimes\frac{\partial}{\partial y^A}$$

ここに $|a| = a_1 + \cdots + a_n$; $(dx^i)^{a_i} = \underbrace{dx^i\otimes\cdots\otimes dx^i}_{a_i\text{個}}$

今後 $\tilde{d}^k\varphi$ を $S^k(N) \to T(M)$ なる map と考える。

一般に compact manifold N', Riemann manifold M' に対して 2つの maps $\varphi, \psi : N' \to M'$ の距離を

$$\tilde{\rho}(\varphi, \psi) = \max\{\rho(\varphi(x), \psi(x)) ; x \in N'\}$$

と定義する。ここに ρ は M' に於る距離である。

そこで set $\mathfrak{M}_k(N, M) \equiv \{\varphi \mid \varphi : N \to M \text{ は } C^k\text{-map}\}$ の metric ρ_k を次のように定義する。

任意の $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}_k(N, M)$ に対して

$$\rho_k(\varphi, \psi) \equiv \max\{\tilde{\rho}(\tilde{d}^i\varphi, \tilde{d}^i\psi) ; i=0, 1, \cdots, k\}$$

(Note: M の Riemann metric g に対して $y \in M$ に於る tangent vector v の長さ $\|v\|$ を $\|v\|^2 = g_y(v, v)$ によって定義すると $T(M)$ に自然に距離が入る。上の定義式に於る $\tilde{\rho}(\tilde{d}^i\varphi, \tilde{d}^i\psi)$ はその意味である。)

Prop. 2.1. $\mathfrak{M}_k(N, M) \equiv \{\mathfrak{M}_k(N, M), \rho_k\}$ は complete metric space である。

Prop. 2.2. $\pi : T(M) \longrightarrow M$: tangent bundle とする。
任意の1点 $\varphi \in \mathfrak{M}_k(N, M)$ を fix する。
$\mathcal{T}_\varphi \equiv \{u \in \mathfrak{M}_k(N, T(M)) \mid \pi \circ u = \varphi\}$ は linear space である。

さて、M を $T(M)$ の zero-section と同一視すると $\varphi : N \longrightarrow M$ は $\varphi : N \longrightarrow T(M)$ と考えられ、linear space $\mathcal{T}_\varphi$ の 0 元となる。

Prop. 2.3. $\mathcal{T}_\varphi$ の元 u に対して norm を $\|u\|_k \equiv \rho_k(\varphi, u)$ と定義すると $\mathcal{T}_\varphi$ は Banach space となる。

今、$\mathcal{T}_\varphi$ を点 φ に於る set $\mathfrak{M}_k(N, M)$ の tangent space と考えて、exponential map $\widehat{Exp}_\varphi : \mathcal{T}_\varphi \longrightarrow \mathfrak{M}_k(N, M)$ を次のように定義する。

$$(\widehat{Exp}_\varphi u)(x) \equiv Exp_{\varphi(x)} u(x) \quad (x \in N, \ u \in \mathcal{T}_\varphi)$$

Prop. 2.4. $\widehat{Exp}_\varphi$ は continuous map, local に1対1 onto となる。

Prop. 2.5. N: compact より、各 $\varphi \in \mathcal{M}_k(N, M)$ に対して $\exists r = r(\varphi) > 0$ s.t.

$D_\varphi(r) \equiv \{ u \in \mathcal{T}_\varphi \mid \|u\|_k < r \}$ に対して

$\widetilde{Exp}_\varphi | D_\varphi(r) : D_\varphi(r) \longrightarrow {}^\exists U(\varphi)$: homeomorphism

以上の事から次の定理が成り立つ。

Theorem 2.1. $\mathcal{M}_k(N, M)$ は Banach manifold modeled on $\mathcal{T}_\varphi$ となる. 実際には Exp の smoothness から座標変換の smoothness が示され $\mathcal{M}_k(N, M)$ は C^∞-manifold となる.

§3. Hilbert manifold $H^s(N, M)$

N, M は §2 と同じとする.

$s > \frac{n}{2}$ とし

$H^s(N, M) \equiv \{ \varphi : N \to M \mid \varphi$ は s 階迄の微分が全て二乗可積分$\}$

とする. 任意の $\varphi \in H^s(N, M)$ に対して

$T_\varphi H^s(N, M) \equiv \{ f \in H^s(N, TM) \mid \pi \circ f = \varphi \}$ とおくと

$T_\varphi H^s(N, M)$ は Hilbert space となる。さらに Theorem 2.1. と同様の議論により

Theorem 3.1. $H^s(N, M)$ は Hilbert manifold である.

§4. closed manifold 上の C^∞-diffeomorphisms の作る manifold.

M : compact, C^∞-Riemann manifold, $\partial M = \phi$

$C^1\mathcal{D} \equiv \{ \varphi \mid \varphi : M \to M : C^1\text{-diffeomorphism} \}$

Prop. 4.1. $C^1\mathcal{D}$ は topological group, $C^1(M, M)$ の open subset. 故に Banach manifold となる.

今 $s > \frac{m}{2}+1$ に対して $\mathcal{D}^s \equiv H^s(M,M) \cap C^1\mathcal{D}$ とする.

Prop. 4.2. $\mathcal{D}^s \subset H^s(M,M)$ は open subset. 故に Hilbert manifold. かつ $\mathcal{D}^s$ は topological group.

実際 $\mathcal{D}^s = \{\varphi \in H^s(M,M) \mid \varphi$ は bijective かつ $\varphi^{-1} \in H^s(M,M)\}$ となっている。

(Note: 単位元 $e \in \mathcal{D}^s$ に対して $T_e\mathcal{D}^s = H^s(M,TM)$ となる)

Theorem 4.1. (Omori [3])

$\mathcal{D} \equiv \{\varphi \mid \varphi : M \to M : C^\infty\text{-diffeomorphism}\}$ とすると $\mathcal{D}$ は I.L.H. manifold i.e. $\mathcal{D} = \varprojlim \mathcal{D}^s$ となる.

§5. Pseudo isotopies の作る manifold $\mathcal{P}(M)$

M: compact, C^∞-manifold without boundary

$N = M \times I$, $I = [0, 1]$

$\mathcal{D} \equiv \{\varphi \mid \varphi : N \to N : C^\infty\text{-diffeomorphism}\}$

$\mathcal{P}(M) \equiv \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \varphi(x) = x \text{ for all } x \in M \times \{0\}\}$

Theorem 5.1. (Ebin and Marsden [1])

$\mathcal{D}$ は I.L.H. manifold

proof. $s > \frac{n}{2}+1$ $(n = \dim N)$

$\mathcal{D}^s \equiv \{\eta \mid \eta : N \to N : \text{bijective } H^s\text{-map}, \eta^{-1} \text{ も } H^s\text{-map}\}$

$\tilde{N}$ を N の double とし, N を $\tilde{N}$ に canonical に embed する.

この時 $\mathcal{D}^s(N)$ が $H^s(N,\tilde{N})$ の submanifold になることを示せばよい。まず $H^s(N,\tilde{N})$ は Theorem 3.1. から Hilbert manifold である。 ∂N が totally geodesic submanifold になるように $\tilde{N}$ に Riemann metric を入れる。

$\forall \eta \in \mathcal{D}^s(N) \subset H^s(N,\tilde{N})$: fix

点 η のまわりの exponential chart を

$$exp : U \subset T_\eta H^s(N,\tilde{N}) \longrightarrow H^s(N,\tilde{N})$$

とする。

$\mathcal{X}^s_\eta(N) \equiv \{X \in H^s(N,T\tilde{N}) \mid \tilde{\pi}\circ X = \eta \text{ and } X(x)\in T_x\partial N \text{ for all } x\in\partial N\}$

$(\tilde{\pi} : T\tilde{N} \longrightarrow \tilde{N}$: projection $)$

$\mathcal{X}^s_\eta(N)$ は tangent bundle $H^s(N,T\tilde{N}) = TH^s(N,\tilde{N})$ の closed subspace、また fibre $T_\eta H^s(N,\tilde{N})$ も $H^s(N,T\tilde{N})$ の closed subspace だから $\mathcal{X}^s_\eta(N)$ は closed linear subspace of $H^s(N,T\tilde{N})$ となる。

$U_1 \equiv U \cap \mathcal{X}^s_\eta(N)$ とし、$\mathcal{X}^s_\eta(N)$ の orthogonal complement に於る η の neighborhood を U_2 とすると、U_1, U_2 を適当に小さくとれば $U = U_1 \times U_2$ と仮定してよい。

∂N が totally geodesic ということから

$$exp(U_1) = exp(U) \cap \mathcal{D}^s(N)$$

故に $\mathcal{D}^s(N)$ は submanifold, $\mathcal{D} = \varprojlim \mathcal{D}^s(N)$ より $\mathcal{D}$ は I.L.H. manifold の構造をもつ。

Theorem 5.2. $\rho(M)$ は $\mathcal{D}$ の submanifold である.

proof. $Z^s_\eta(N) \equiv \{X \in \mathfrak{X}^s_\eta(N) \mid X(x)=0 \text{ for all } x \in M\times\{0\}\}$

とする。$Z^s_\eta(N)$ は $\mathfrak{X}^s_\eta(N)$ の closed linear subspace.

Theorem 5.1. と同様にして

$$\mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{U}_1 \cap Z^s_\eta(N), \quad \mathbb{U}_1 = \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$$

$$\exp(\mathbb{V}_1) = \exp(\mathbb{U}_1) \cap \rho(M)$$

となり $\rho(M)$ は $\mathcal{D}$ の submanifold となる。

References

[1] Ebin and Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. Ann. of Math., 92 (1970)

[2] Omori : 無限次元多様体と変分問題 ,都立大学セミナー報告,(1967).

[3] Omori : On the group of diffeomorphisms on a compact manifold. Proc. Sym. Pure Math. Amer. Math. Soc., 15 (1970)

[4] Lang : Introduction to Differentiable Manifolds