

4次元ユークリッド空間内の特殊な  
ホモロジー3-球面についての考察

東大 理 永瀬輝男

§ 0. 序

我々は、次の様な、 $R^4$ に PL-embed された closed oriented 3-manifold  $M$  を考える:

- i)  $M^3 \subset R^3 \times [0, 3]$
- ii)  $M^3$  は surgeries の trace
- iii) index  $i$  の critical handles は  $i$ -level 上にある。

上の様な  $M^3$  が、 $R^4$ 内の homology 3-sphere である為の必要条件を調べたい。さらに、ある特別な、 $R^4$ 内の 3-sphere が 4-ball を bound することを示す。

この論文を書くにあたって、本間龍雄教授、田村一郎教授、加藤十吉教授のいろいろな御指導を感謝します。

## §1. 定義と記号

我々は P.L. category を用いる。特に断らない限り, manifold  $M$  によって,  $R^4$  内の closed oriented connected triangulated 3-manifold を表わす。また一般に, その triangulation をも  $M$  が表わす。

$R^n$  は,  $n$  次元ユークリッド空間で,  $R^n = R^{n-1} \times R$  と見て, 最後の座標を  $R^n$  の level と呼ぶことにする。

$$[a, b] = \{ x \in R^1 \mid a \leq x \leq b \}$$

$$(a, b) = \{ x \in R^1 \mid a < x < b \}$$

その他,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  等も一般の通りとする。

$(\dots)$  の closure, interior, boundary を,  $\bar{(\dots)}$ ,  $^\circ(\dots)$ ,  $\partial(\dots)$  で表わすことにする。また, closure 作用は, 常に最大の空間で作用するものとする。

manifold  $M$  に対して,

$$M(a) = M \cap R^3 \times a$$

$$M[a, b] = M \cap R^3 \times [a, b]$$

その他,  $M(a, b)$ ,  $M(a, b]$ ,  $M[a, b)$  等も同様とする。

$I$  によって, unit interval を表わす。また,  $I^n = I^{n-1} \times I$  と見る。

$c = 0, 1, 2, 3$  に対して,  $H(c) = I^{3-c} \times I^c$ ,  $D_1 H(c) = \partial I^{3-c} \times I^c$ ,  $D_2 H(c) = I^{3-c} \times \partial I^c$  とする。

$M$  を次の様な manifold とする:

0)  $M \subset \mathbb{R}^3 \times [0, 3]$

1) 点列  $-1 = a_{-1} < 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 3 < a_{k+1} = 4$   
 が存在して,  $[0, 3] - a_0 - a_1 - \dots - a_k$  内の任意の点,  
 $t$  に対して,  $M(t)$  は, 2-manifold である。

2)  $i = 0, 1, \dots, k-1$  に対して,

$$\neg M(a_i, a_{i+1}) \stackrel{\cong}{=} M\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \times [a_i, a_{i+1}]$$

但し  $\cong$  は, level preserving homeomorphic を表わす。

3) 次の様な map  $f_i: \bigcup_{j=1}^{n_i} H(C_{ij}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times a_i$  が存在  
 する:

★  $f_i$  は embedding

$$\star f_i\left(\bigcup_j H(C_{ij})\right) \cap \neg M(a_{i-1}, a_i) = f_i\left(\bigcup_j D_2 H(C_{ij})\right)$$

但し  $i = 0, 1, \dots, k$

4)  $\neg M(a_i, a_{i+1}) \cap \mathbb{R}^3 \times a_i$

$$\cong \left\{ \neg M(a_{i-1}, a_i) \cap \mathbb{R}^3 \times a_i - f_i\left(\bigcup_j H(C_{ij})\right) \right\}$$

$$\cup f_i\left(\bigcup_j D_1 H(C_{ij})\right)$$

但し,  $\cong$  は homeomorphic を表わす。

また, 本間龍雄教授の lecture note によって,  $\mathbb{R}^4$  内の closed  
 3-manifold は全て, 上の条件 0) ~ 4) を満たすように  $\mathbb{R}^4$  の ambient  
 isotopy で動かせることが知られているので, 特別な条件では

ない。このとき、 $M$  を surgeries  $\{H(C_{ij})\}_{i,j}$  の trace と呼ぶことにする。このとき、 $f_i(H(C_{ij}))$  を  $a_i$  level 上の index  $C_{ij}$  の critical handle といい、また  $H(C_{ij})$  で表わすことにする。特に、 $C_{ij} = (\mathbb{O} \times \mathbb{O})$  の時  $f_i(I \times \frac{1}{2})$  (or  $f_i(\frac{1}{2} \times I^2)$ ) を critical disk という。

また、 $\bar{M}(a_i, a_i) \cap R^3 \times a_i = F_i$  は  $R^3 \times a_i$  上の closed 2-manifold で、 $R^3 \times a_i - F_i$  はいくつかの domain に分かれるが、unbounded な domain を外部と名づけ、それをもとにして、隣りの domain を内部と呼び、さらに、その隣りの domain を外部と呼ぶようにして、各 domain を内部と外部に分ける。ここで、2つの領域が隣り合うとは、各 closure が交わることをとする。

もし  $H(C_{ij})$  が  $F_i$  の内部 (or 外部) の closure に含まれる時、 $H(C_{ij})$  を内部 (or 外部) の critical handle ということにする。 $N(M) = M$  の critical handles の数、とする。

注意) 2) に於て、 $\equiv$  は次のことを示す:

### Covering isotopy theorem

$F: M \times I \rightarrow Q \times I$  が "locally unknotted isotopy" で、 $\partial M$  を fix しているならば、 $F$  は  $\partial Q$  を fix した ambient isotopy で cover される。

一方、(3, 2)-Schoenflies theorem が正しいから、 $\bar{M}(a_i, a_{i+1})$  は  $\bar{M}(a_i, a_{i+1}) \cap R^3 \times a_i$  と  $\bar{M}(a_i, a_{i+1}) \cap R^3 \times a_{i+1}$  との間

locally unknotted isotopy と見なせる。よって, covering isotopy theorem から次の様な map  $h: R^3 \times [a_i, a_{i+1}] \xrightarrow{\cong} R^3 \times [a_i, a_{i+1}]$  が存在する:

$$h: M\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \times [a_i, a_{i+1}] \cong M\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \times [a_i, a_{i+1}] \xrightarrow{\cong} -M(a_i, a_{i+1})$$

$M$  を上の様な manifold とし,  $H$  を critical handle とする。

次の様な level-preserving embedding  $h: I^3 \times [a, b] \rightarrow R^4$  が存在するとある:

$$\star h(I^3 \times a) = H \quad (\text{or } h(I^3 \times b) = H)$$

$$\star h(I^3 \times [a, b]) \cap M = H \cup h(h^{-1}(D_1 H) \times [a, b])$$

$$(\text{or } h(I^3 \times [a, b]) \cap M = H \cup h(h^{-1}(D_2 H) \times [a, b]))$$

このとき  $M$  は  $-(M - h(I^3 \times [a, b])) \cup (h(\partial(I^3 \times [a, b]))) - M$   $= M'$  として "ambient isotopic" である。この manifold  $M'$  を map  $h$  のもとで,  $H$  の level を  $a$  から  $b$  (or  $b$  から  $a$ ) に change する = によって  $M$  から得られたという。また簡単に  $H$  の level を  $a$  から  $b$  (or  $b$  から  $a$ ) に change するという。このとき単に change される position (上の場合は  $h(I^3 \times b)$ ) を示すときは, change の代わりに "move" という言葉を用いる = である。即ち move は仮想的な change である。

$M$  を上の様な manifold とし,  $H(c)$  を critical handle とする。  $c = 1$  (or  $2$ ) のとき,  $h$  を  $I^{3-1} \times 0$  (or  $0 \times I^2$ ) 内の

proper simple arc  $\gamma$  について、次の様な level-preserving embedding

$h: I^3 \times [a, b] \rightarrow R^4$  が存在するとする。

$$1) \quad h(I^3 \times a) \cap M = (a \text{ regular neighbourhood } D \text{ of } \gamma \text{ in } I^{3-1} \times 0) \times I$$

$$( \text{or } h(I^3 \times a) \cap M = (a \text{ regular neighbourhood } D \text{ of } \gamma \text{ in } 0 \times I^2) \times I$$

$$2) \quad h(I^3 \times (a, b]) \cap M \cong (D \cap \partial I^{3-1}) \times I \times (a, b]$$

$$( \text{or } h(I^3 \times [a, b]) \cap M \cong I \times (D \cap \partial I^2) \times [a, b) )$$

$$\text{このとき, } M \text{ は } (M - h(I^3 \times [a, b])) \cup h(\partial(I^3 \times [a, b]))$$

$-M) = M'$  は  $R^4$  で ambient isotopic である。この manifold

$M'$  を  $R^4$  によって  $H(C)$  を up (or down)-splitting をして得ら

れた manifold という。また簡単に  $R^4$  によって  $H(C)$  を

up (or down)-splitting するという。(see Fig-1)

§ 2. いくつかの命題と定義

命題 1.  $M$  を次の様な manifold とする。

$$1) \quad M \subset R^3 \times [0, 3]$$

2)  $M$  は surgeries の trace

3) index  $c$  の critical handles は  $c$ -level 上にある。

このとき、次の様な manifold  $M'$  が存在する。

a)  $M'$  は 1) 2) 3) を満たす。

- b)  $M'$  は  $M$  に  $\mathbb{R}^4$  で ambient isotopic
- c) index 1 と 2 の同じ側の critical disks を 1.5-level に move したとき, 各 critical disks は互いに高々一点でしか交わらず, 他の critical disks とは高々 3 つとしか交わらない。

(証明)

我々は, inside の critical handle の場合のみを証明する。outside の場合もまったく同様である。

初めに, index 1 と 2 の critical disks の任意の move をとる。このとき, index 1 の critical disks の move をうまくとれば, 同じ側の critical disks 同士は intersection は points にできる。また, 異なる側同士は proper simple arcs で交わるようにできる。ここで, proper とは, 各 critical disks に対しての意味である。

次に, 内部の index 2 の critical handle を次の様に split する (see Fig-2):  $D$  をその critical handle の critical disk とする。  $p_1, p_2, \dots, p_n$  を  $D$  と inside の index 1 の critical disks との intersection とする。  $K$  を  $D$  と outside critical disks との intersection とする。(実は,  $K$  は  $D$  と outside の index 1 の critical disks との intersection である。) ここで,  $D$  の proper arc の

set  $\{k_i\}$  を次の様にとる:

- 1)  $k_i \cap k_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ )
- 2)  $k_i \cap K = \emptyset$
- 3)  $k_i \cap \{p_j\} = \emptyset$
- 4)  $D - \bigcup k_i$  の *connected component* は高々 1 つの  $\{p_j\}$  の点を含む。
- 5)  $D - \bigcup k_i$  の *connected component* の *closure* は  $\{k_i\} \cup \{p_j\}$  の *elements* を高々 3 つしか含まない。

そこで,  $D$  を  $\bigcup k_i$  によって *down-split* する。これを各 *index 2* の *critical handle* にほどこすと, 各 *critical disks* は互いに高々一点でしか交わらず, *index 2* の *critical disk* は, 高々 3 つの *index 1* の *critical disk* としか交わらない。しかし *index 1* の *critical disks* に関しては, この限りではない。しかし, *index 1* に対しても, 同じように *up-split* をほどこせばよい。

(証終)

上の様な性質をもつ *manifold*  $M$  を, *property E* をもつ, という。

命題 2.  $M$  を *critical handles* が 2 つの *manifold* とする。すると,  $M$  は 4-ball を bound する。



(証明)

定義から明らかである。

命題3.  $M$ が property  $E$ を持てば, property  $E$ を保存しつつ, index 0 と 3 の critical handles は各々1つにできる。

(証明)

$M_0$ はいくつかの 3-balls から成り,  $M_1$ は 2-spheres とそれらをつなぐ 3-balls (すなわち outside の index 1 の critical handles) とから成る。そこで, 異なる spheres にまたがる critical handle を1つとってその level を 0 に change すれば,  $M_0$ は1つ減いた 3-balls からなる。一方 index 2 の critical handles は  $-M_{[0,2]}$  の connected components をつなぎ得ないから, 上の操作は,  $M_0$ がただ1つの 3-ball になるまで続けることができる。index 3 についても同様に見える。(証明終)

命題4. manifold  $M$ の index 1 と 2 の critical handles が同じ側にあるならば,  $M$ は 4-ball を bound する。

(証明)

outside の場合を考えれば十分である。初めに, index 1 の critical handles を 0-level に change する。すると,  $M_0$ は solid torus である。

次に index 2 の critical handles を 0-level に change する。すると,  $M_0$  は genus 0 の 3-manifold である。但し,  $\partial M_0$  は  $R^3 \times 0$  内の closed 2-manifold であるので, genus は  $\partial M_0$  の genus で定まる。

すると, (3,2)-Schönflies theorem から,  $M_0$  は 3-ball である。したがって命題 2 から証明される。

(証明終)

### §3. Cancellation Theorem

定理 1.  $M$  を property E をもつ manifold で,  $H(1)$  と  $H(2)$  を同じ側の critical handle とする。もしこの 2 つの critical handles の 1.5-level への move で, 2 つの critical disks が一点のみで交わるようなものがあるならば, 次の様な manifold  $M'$  が存在する:

- 1)  $M'$  は  $M \in R^4$  で ambient isotopic
- 2)  $N(M) - N(M') = 2$

(証明)

outside の場合のみ証明すれば十分である。

さて, 仮定から, 次の様な  $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$  と level-preserving embeddings  $h_1': I^2 \times I \times [1, 1+2\varepsilon] \rightarrow R^4$  及び

$h_2': I \times I^2 \times [1+\varepsilon, 2] \rightarrow R^4$  が存在する:

- i)  $h_1'(I^{3-\varepsilon} \times I^\varepsilon \times \varepsilon) = H(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & h'_1(I^2 \times I \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cap h'_2(I \times I^2 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \\
 &= h'_i(h'_i^{-1}(h'_i(I^{3-i} \times I^i \times (1+\varepsilon)) \cap h'_j(I^{3-j} \times I^j \\
 &\quad \times (1+\varepsilon))) \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) = \tau'', \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

次に  $H(2)$  を  $1+\varepsilon$ -level に change する。  $M_1$  を change により得られた manifold とする。すると、次の様な level preserving embedding  $h: I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^4$  が存在する。

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & h(I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cap M_1 \\
 &= h(I^2 \times I \times (1+\varepsilon) \cup (I \times I \times 0 \cup \partial I \times I \times I) \\
 &\quad \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & h(I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cap \bar{M}_1 [0, 1+\varepsilon) \\
 &= h((I \times I \times 1 \cup I \times \partial I \times I) \times (1+\varepsilon))。
 \end{aligned}$$

$\tau = \tau''$ ,  $c$  を  $I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]$  の内点とする。  $D_1 = I \times I \times 0 \cup \partial I \times I \times I$ ,  $D_2 = I \times I \times 1 \cup I \times \partial I \times I$  とする。  
 $M' = (M_1 - h(I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cup h(c \circ K))$  とすればよい。  
 $\tau = \tau'$ ,  $K = D_1 \times (1+\varepsilon) \cup \partial D_1 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon] \cup D_2 \times (1+2\varepsilon)$ 。

(see Fig-3)

(証明終)

上の定理の manifold  $M'$  を  $H(1)$  と  $H(2)$  を cancel して得られた manifold という。また単に、  $H(1)$  と  $H(2)$  を cancel するという。

注意) 上の  $M'$  は、一般には、property E を持たない。  $\vee$

かし, §0 で言っている i) ii) iii) は果たしている。

#### §4. 定義

$M$  を property E を持つ manifold とする。このとき *inside* (or *outside*) の *critical handles* を 1.5-level に *change* する  
ことが出来る。  $T$  を次の様な *inside* (or *outside*) の *critical handles* の union  $\cup$  の *strong deformation* とする。(see Fig-4)

初めに, *index 2* の *critical handles* を *critical disks* に *strong deformation* する。  $\cup'$  をその結果とする。  $\{D_i\}$  を *index 1* の *critical disks* とする。各  $i$  に対して  $\{P_{i1} \dots P_{im_i}\}$  を  $D_i$  と *index 2* の *critical handles* との *intersection* とする。  $P_i$  を *critical disk*  $D_i$  の中心とする。(ここでは, 各 *critical handle* の *product* 性, 即ち  $I^3$  を用いている。) すると, *critical disks* と *critical handle* との *intersection* は,  $\{P_{i1} \times I, \dots, P_{im_i} \times I\}$  となる。そこで各 *index 1* の *critical handles* を  $(P_i \circ \{P_{i1} \dots P_{im_i}\}) \times I$  に *strong deformation* する。(ここでは,  $\circ$  は, *join* を示している。)  $T$  を上の結果とする。我々は, この  $T$  を *inside* (or *outside*) *ribbon* とよぶ。また各 *index 2* の *critical disks*  $D$  に対して,  $C(D)$  を  $D$  と, *index 1* の *critical disks* との交点の数とし,

$$C(T) = \sum_D \max(0, C(D) - 2) \quad \text{とする。この } C(T) \text{ を}$$

$\mathcal{A}$  の complexity と呼ぶ。

§5. いくつかの命題

命題5.  $L$  と  $J$  を compact connected 2-complexes とする。  
 $X$  を  $J$  の connected でない subcomplex とする。  $f: X \rightarrow L$   
を embedding とする。このとき、  $K = L \cup_f J$  とおくと、  
map  $f_*: H_1(L) \rightarrow H_1(K)$  は surjection ではない。こ  
で、  $f_*$  は、 inclusion map が induce した、 homology  
間の map である。

(証明)

背理法を用いる。

$f_*$  が surjective とする。すると、 Mayer-Vietoris の  
exact sequence を考える:

$$H_1(J) + H_1(L) \xrightarrow{f_*} H_1(K) \xrightarrow{\partial} H_0(X) \xrightarrow{i} H_0(J) + H_0(L)$$

さて、  $f_*$  が surjective より、  $\partial$  は 0-map である。した  
がって、  $i$  は injective である。一方、  $J$  と  $L$  は connected  
で、  $X$  は、 connected でないから、  $i$  は injective では  
ない。これは矛盾。(証明終)

命題6.  $L$  を complex とし、  $\{D\}$  を finite disks の disjoint  
union とする。  $g: \{\partial D\} \rightarrow L$  を embedding とする。この  
とき、  $K = L \cup_g \{D\}$  とおくと、  $\ker \{f_*: H_1(L) \rightarrow H_1(K)\}$   
は、  $\{[\partial D]\}$  によって generate される subgroup である。

ここで,  $j_*$  は, inclusion map が induce する homology 間の map で,  $[\partial D]$  は,  $\partial D$  によって represent される,  $H_1(L)$  の element である。

(証明) Mayer-Vietoris の exact sequence より 証明される。

### §6. 定理とその系

定理2.  $M$  を property E を持つ homology 3-sphere とする。  $T$  を inside (or outside) ribbon とする。

$\partial T = T \cap -M' [0, 1.5]$  とする。ここで,  $M'$  は inside (or outside) の critical handles を 1.5-level に change してできた manifold である。このとき,

1)  $T' \cap \partial T$  は connected である。ここで,  $T'$  は  $T$  の任意の connected component である。

2)  $H_1(T, \partial T) = 0$

(証明)

背理法を用いる。1) または 2) が成立たないとする。

まず,  $M' [0, 1.5]$  は,  $-M' [0, 1.5] \cup T$  に deform する。

1) が成立たなければ,  $\partial T$  の定義から, 命題5を用いると,  $H_1(M' [0, 1.5], -M' [0, 1.5]) \neq 0$  が示せる。また, 2) が成立たなければ,  $H_1(M' [0, 1.5], -M' [0, 1.5]) \cong H_1(-M' [0, 1.5] \cup T, -M' [0, 1.5]) \cong H_1(T, \partial T)$ 。よって, いずれにせよ,  $H_1(M' [0, 1.5], -M' [0, 1.5]) \neq 0$  が示される。

$D$  を index 2 の outside (or inside) の critical disk とする。 $-M'(1.5, 2.0)$  の product 性を用いて,  $\partial D$  を 1.5-level に change する。すると,  $\partial D$  と index 1 の inside critical disks との intersection number は 0 であるから (何故なら, index 2 の outside の critical disk と, index 1 の inside critical disk と 1.5-level に move すると, proper arc で交わる)  $[\partial D]$  は,  $H_1(M'[0, 1.5], -M'[0, 1.5])$  内で "homologue 0" である。よって命題 6 から,

$$\begin{aligned} H_1(M'[0, 1.5], -M'[0, 1.5]) &\cong H_1(M'[0, 2.0], -M'[0, 1.5]) \\ &\cong H_1(M', -M'[0, 1.5]) \end{aligned}$$

一方,  $-M'[0, 1.5]$  は connected であるから, 次の exact 列を考える:

$$H_1(M') \xrightarrow{i} H_1(M', -M'[0, 1.5]) \xrightarrow{\partial} H_0(-M'[0, 1.5]) \xrightarrow{j} H_0(M)$$

ここで,  $H_1(M') = 0$  かつ,  $j$  は isomorphism であるから  $\partial$  は 0-map, よって,  $H_1(M', -M'[0, 1.5]) = 0$  である。矛盾がある。(証終)

系 1.  $M$  を property E を満たす homology 3-sphere で, ある side の ribbon に対して,  $C(\mathbb{P}) = 0$  であるならば,  $M$  は 4-ball を bound する。

(証明)

ribbon  $T$  は、高々 2ヶ所の "のりしろ" を持った矩形を張り合わせるることによつて、できているとしてよい。何故ならば、 $C(M) = 0$  より、3ヶ所の "のりしろ" を持った矩形は存在しない。

初めに、1つの "のりしろ" を持った矩形をとる。次に、それと、それに接する *critical handle* を *cancel* する。

(see Fig-5)

この操作を、続けられる限り続ける。もはやできなくなつてもまだ *ribbon* が存在したら、次の様にして矛盾を出す:

(see Fig-6) 3つ以上の矩形が、1ヶ所に集つている所を、*singular line* とよぶことにする。(see Fig-7)

$T$  を各 *singular line* で *cut* する。すると、2つの "のりしろ" を持った矩形に分解する。

次のことは明らかである。

$\partial T = \{x \in T \mid x \text{ は、分解した矩形の } boundary \text{ の点で、"のりしろ" の上にはない} \}$

*singular line* の数の *induction* によつて次の補題を証明できる:

補題 次の様な *ribbon*  $R$  が存在する:

- ①  $R$  は丁度 2つの "のりしろ" を持った矩形によつて、はりあわされてできる。



- ② *singular line* は唯一つである。
- ③  $\partial R$  は上の  $\partial T$  と同じように定義するとき、  
 $H_1(T, \partial T) \cong H_1(R, \partial R)$  となる。

( 補題の証明 )

矩形は  $I \times I$  の構造を持ち、 $I \times \partial I$  が " のりしろ " であるとして一般性を失わない。

次の操作  $\rho$  は、用いられるだろう：

$I_1 \times I_1$ ,  $I_2 \times I_2$ ,  $I_3 \times I_3$  を矩形とする 3 つの矩形が、 $I_1 \times 1$ ,  $I_2 \times 1$ ,  $I_3 \times 0$  で、" のりづけ " されているとき、 $I_1 \times 1$  を  $I_3 \times 0$  に " のりづけ " し、 $I_2 \times 1$  を  $I_3 \times 1$  に " のりづけ " する。(Fig-8)

*induction* の仮定の中に、操作  $\rho$  を用いることを入れて証明する。

まず、1 つの矩形を  $T$  からはずす。その結果を  $T'$  とすると、 $T'$  はまた、丁度 2 つの " のりしろ " を持った矩形によって構成されている *ribbon* である。(see Fig-9)

[Case A]  $T'$  の *connected component* が 1 つのとき：

$T'$  は *induction* の仮定から 1 つの *singular line* をもつ *ribbon*  $R'$  に操作  $\rho$  によって変形できる。そこで取り去った矩形を初めについていた部分にはりつける。各 " のりしろ " 部分を、操作  $\rho$  を用いて  $R'$  の *singular line* の所に *slide* すればよい。それを  $R$  とする。

[Case B]  $T$  の *connected component* が2つのとき:

各々を  $T_1'$  と  $T_2'$  とする。すると *induction* の仮定から、各 *component* に対して  $R_1'$  と  $R_2'$  が存在する。そこで、取り去った矩形を最初についていた部分にはりつける。次に各“のりしろ”をまた操作  $\rho$  を用いて  $R_1'$  と  $R_2'$  の *singular line* に *slide* する。(see Fig-10) 次に取り去った矩形を用いて、 $R_1'$  の *singular line* に集まる“のりしろ”を  $R_2'$  の *singular line* に *slide* する。それを  $R$  とする。(補題の証終)  
(系1の証明の続き)

さて、定理2から、 $\partial R$  は *connected* でなくてはならない(実際 *connected* でなければ、 $H_1(R, \partial R) \neq 0$ )。

したがって、 $R$  はいくつかの輸管と  $\partial$  ではない、いくつかの  $\times$ -ボウスの帯の名母線を1つにはりあわせたものになる。(see Fig-11) したがって、 $H_1(R, \partial R) \neq 0$  したがって定理2に矛盾する。したがって、 $T$  を構成していた側の *index* 1 と 2 の *critical handles* は *cancel* されるから命題4により証明される。

系2.  $M$  を *property E* を持つ *manifold* とする。すると、同じ *side* の *index* 1 の *critical handles* の数と *index* 2 の *critical handles* の数は等しい。

(証明) outside の index 1 の critical handles を, 1.2-level に change し, outside の index 2 の critical handles を 1.8-level に change し  $T$ -manifold を  $M'$  とする。

$$T_0^2 = M' [0, 1]$$

$$T^1 = M' [0, 1.2]$$

$$T_0^2 = M' [0, 1.8]$$

$$T^2 = M' [0, 2.0] \text{ とする。}$$

次の exact sequence を考える:

$$H_3(K) + H_3(T_0^2) \rightarrow H_3(M') \xrightarrow{\partial} H_2(K \cap T_0^2) \rightarrow$$

$$H_2(K) + H_2(T_0^2) \rightarrow H_2(M') = 0$$

$$= \partial'', K = -(M' - T_0^2)。$$

上の sequence で  $H_3(K) = H_2(K) = H_3(T_0^2) = 0$  であって,  $\partial$  は isomorphism であるから,  $H_2(T_0^2) = 0$  である。

よって, また次の exact sequence を考える:

$$H_2(T_0^2) \rightarrow H_1(T_0^2, T_0^1) \rightarrow H_1(T_0^1) \xrightarrow{\partial} H_1(T_0^2)$$

定理 2 の後半と同様にして,  $j$  の injection が示せるから,  $H_2(T_0^2) = 0$  より,  $H_1(T_0^2, T_0^1) = 0$  となる。

さらに次の exact sequence を考える:

$$H_2(T_0^2, T_0^1) \rightarrow H_2(T_0^2, T^1) \rightarrow H_1(T^1, T_0^1) \rightarrow H_1(T_0^2, T_0^1)$$

すると, 定理 2.1 によって  $H_1(T_0^2, T_0^1) = 0$  であるから,

$H_2(T_0^2, T_i') = 0$ より  $H_2(T_0^2, T') \cong H_1(T', T_i')$ 。

また,  $H_2(T_0^2, T')$  は, *outside* の *index 2* の *critical handles* の数を示し,  $H_1(T', T_i')$  は *outside* の *index 1* の *critical handles* の数を示している。

同様にして, *inside* にも示せる。(証終)

Fig-1

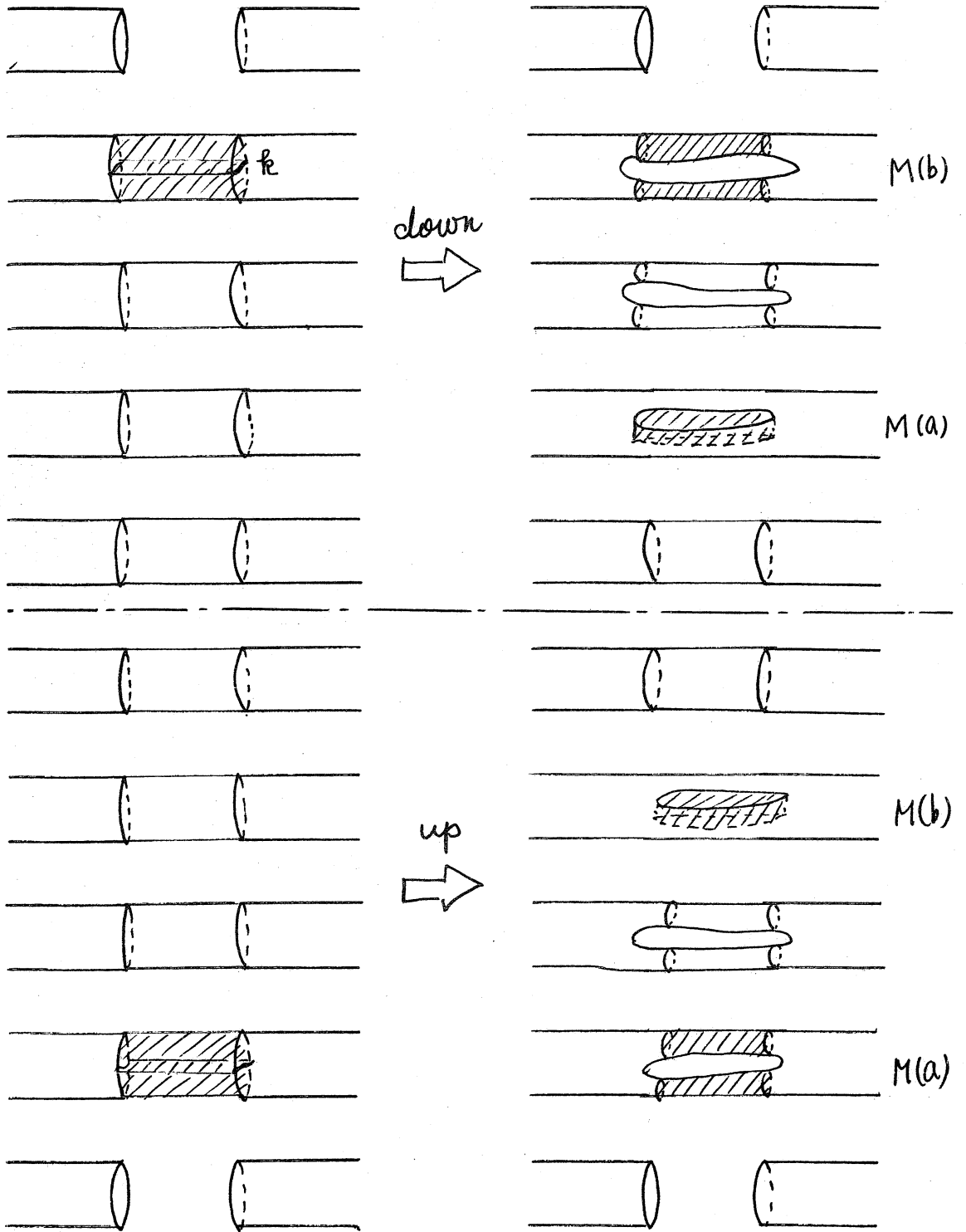


Fig-2

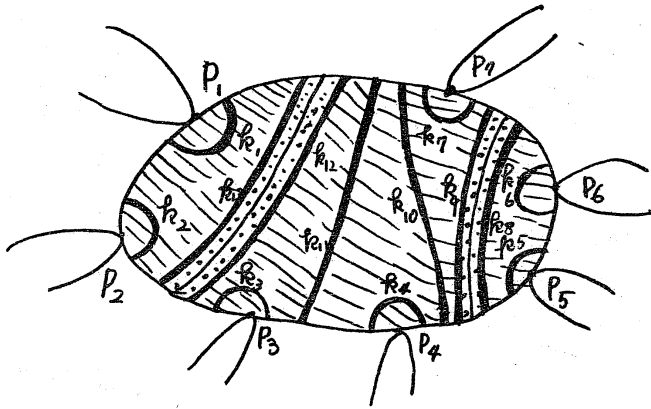


Fig-3

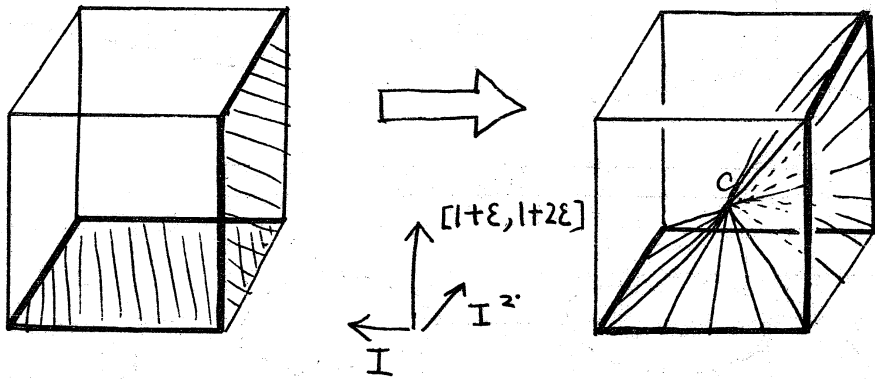


Fig-4

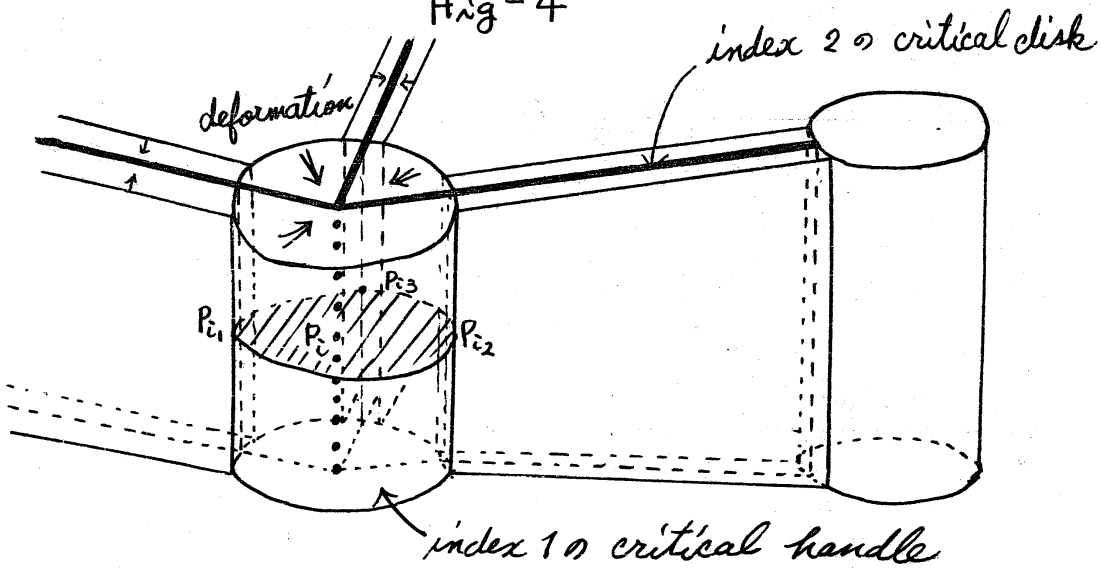


Fig - 5

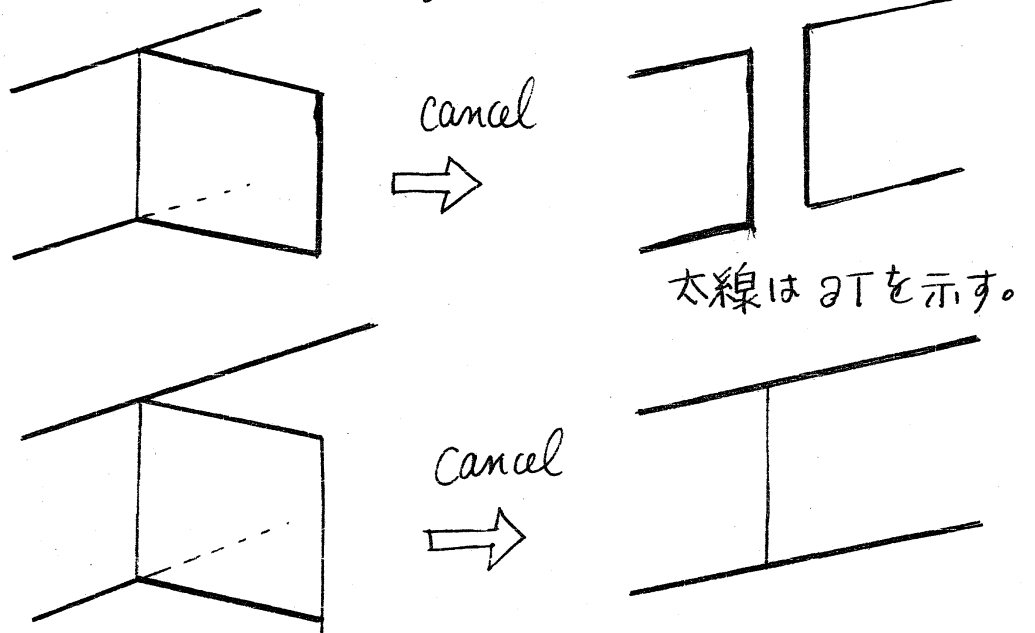


Fig - 6

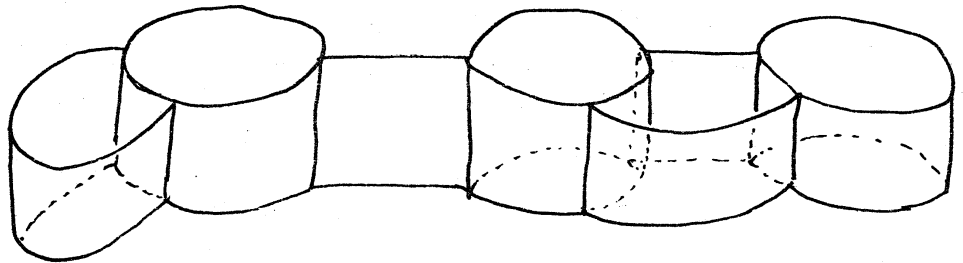


Fig - 7

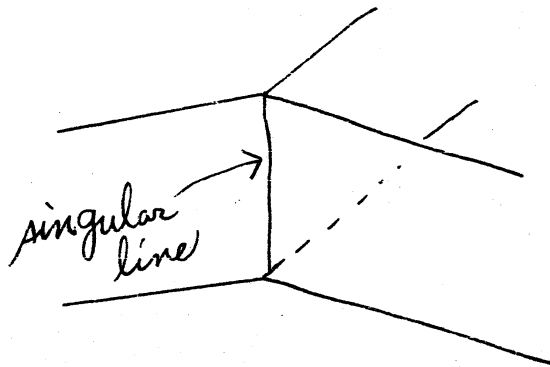


Fig - 8

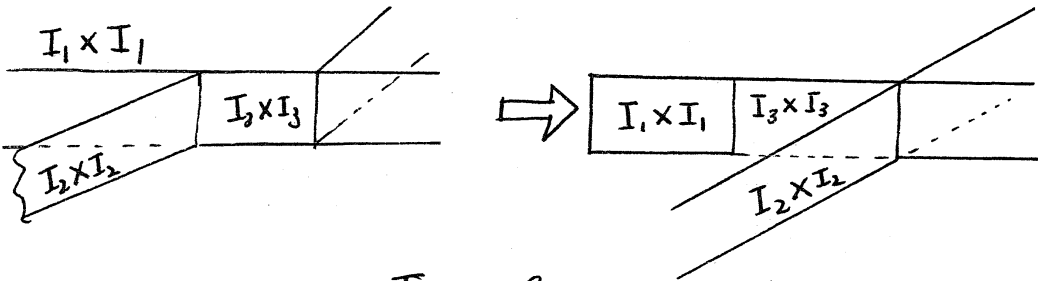


Fig - 9

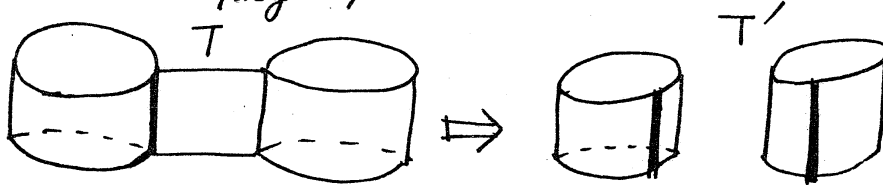


Fig - 10

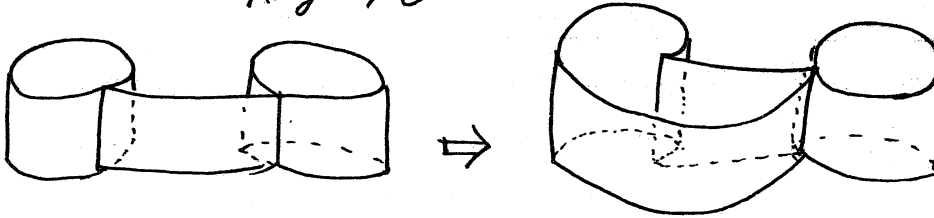
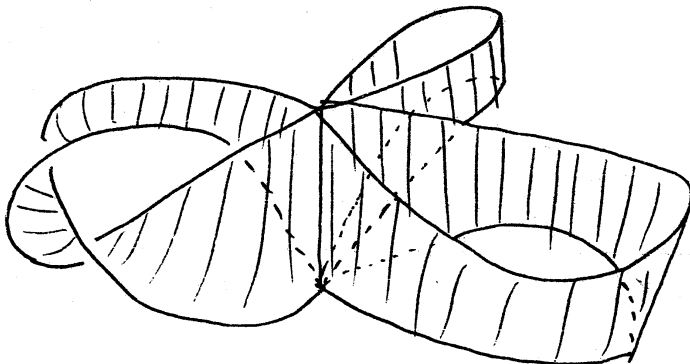


Fig - 11





An Example of Homology 3-sphere in  $R^4$ 

by

Teruo Nagase

We shall consider of the following conjecture:

Given a homology 3-sphere  $M$  in  $R^4$  whose all critical points of index  $i$  with respect to a level line in the space lie on level  $i$ , does it bound a 4-ball in  $R^4$  ?

In this note, we shall obtain a negative answer for this conjecture. Full details will be published later.

I wish to thank Professor T. Homma, Professor M. Kato, Professor S. Maseki, and Y. Tsukui for their encouragement in preparation of this paper.

Theorem. There exists a homology 3-sphere in  $R^4$  which does not bound a 4-ball in  $R^4$ , although its critical points of index  $i$  with respect to a level line in  $R^4$  (we take a level line of  $R^4 = R^3 \times R$  the last axis) lie on level  $i$ .

Proof.

I Construction of a homology sphere  $M$  (see Fig-1)

(Fig. 1)

First, we take a 3-ball  $D^3$  in  $R^3 \times 0$  and an annulus  $(\partial D^3 =) S^2 \times [0,1] \subset R^3 \times R$ . Then in  $R^3 \times 1$ , attach to  $S^2 \times 1 \subset (R^3 \times 1)$  two handles of index 1 from the outside of  $S^2 \times 1$  and a handle of index 1 from the inside of  $S^2 \times 1$ , disjointly. (inside means the bounded closed domain in  $R^3 \times 1$  bounded by  $S^2 \times 1$  and outside means the complimentary closed domain of inside).

This gives a surgery of  $S^2$  and the result which is a surface of genus 3 will be denoted by  $T$ . We represent element of generator of  $\pi_1(T)$  as Fig-2.  
(Fig. 2)

Taking  $T \times [1,2]$ , we then attach three handles of index 2 in the following way :

We choose mutually disjoint simple closed curves  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  on  $T$  such that ;

- (1)  $\epsilon_1 = byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}yb^{-1}a^{-1}$
- (2)  $\epsilon_2 = byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}ycz$
- (3)  $\epsilon_3 = byb^{-1}x^{-1}abyb^{-1}a^{-1}z^{-1}c^{-1}y^{-1}cz$  (see Fig-3)  
(Fig. 3)

Substituting  $a=b=c=1$  to formula (1) and (2) we get  $\epsilon_1=1, \epsilon_2=1$ . Substituting  $x=y=z=1$  to the formula (3) we get  $\epsilon_3=1$ . Then it follows from Dehn's lemma and the irreducibility of the solid torus that there exists mutually disjoint two 2-disks in the outside of  $T \times 2 \subset R^3 \times 2$  bounding  $\epsilon_1, \epsilon_2$  and a 2-disk in the inside of  $T \times 2 \subset R^3 \times 2$  bounding  $\epsilon_3$ .

Thickening these three disks, we have the required handles of index 2. This gives a surgery of  $T \times 2$ . And the result of this surgery on  $T$  is a 2-sphere  $S^2$  and we may take  $S^2 \times [2,3] \cup D^3 \times 3$  where  $\partial D^3 = S^2$ .

## II Computation of $\pi_1(M)$

Then

$$\begin{aligned}
 G &= (a,b,c,x,y,z : b=x=z=1, \\
 &\quad byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}yb^{-1}a^{-1}=1 \\
 &\quad byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}ycz=1 \\
 &\quad byb^{-1}x^{-1}abyb^{-1}a^{-1}z^{-1}c^{-1}y^{-1}cz=1 \\
 &= (a,c,y : ya^{-1}y^{-1}c^{-1}y^{-1}cyay^{-1}c^{-1}ya^{-1}=1 \\
 &\quad ya^{-1}y^{-1}c^{-1}c^{-1}y^{-1}cyay^{-1}c^{-1}yc=1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{yaya}^{-1} \underline{\text{c}^{-1} \text{y}^{-1} \text{c}} = 1) \\
= & (a, c, y : \text{ya}^{-1} \text{y}^{-1} \text{ay}^{-1} \text{y}^{-1} \text{c}^{-1} \text{ya}^{-1} = 1 \\
& \text{ya}^{-1} \text{y}^{-1} \text{c}^{-1} \text{ay}^{-1} \underline{\text{y}^{-1} \text{c}^{-1} \text{yc}} = 1 \\
& \text{yaya}^{-1} \underline{\text{c}^{-1} \text{y}^{-1} \text{c}} = 1) \\
= & (a, c, y : \text{ya}^{-1} \text{y}^{-1} \text{ay}^{-1} \text{y}^{-1} \text{c}^{-1} \text{ya}^{-1} = 1 \\
& \text{ya}^{-1} \text{y}^{-1} \text{c}^{-1} \text{ay}^{-1} \text{aya}^{-1} = 1 \\
& \text{yaya}^{-1} \text{c}^{-1} \text{y}^{-1} \text{c} = 1) \\
= & (a, y : \text{ya}^{-1} \text{ya}^{-1} \text{yay}^{-1} \text{ay}^{-1} \text{ay}^{-1} \text{aya}^{-1} = 1 \\
& \text{aya}^{-1} \text{yaya}^{-1} \text{yay}^{-1} \text{ay}^{-1} \text{a}^{-1} \text{ya}^{-1} \text{y}^{-1} \text{ay}^{-1} = 1) \\
= & (v = \text{ay}^{-1}, y : \underline{\text{v}^{-1} \text{v}^{-1} \text{yvvvvyv}^{-1}} = 1 \\
& \text{vyv}^{-1} \text{yv}^{-1} \underline{\text{yvvvy}^{-1} \text{v}^{-1} \text{v}^{-1} \text{y}^{-1} \text{v}} = 1) \\
= & (v, y : \text{v}^{-1} \text{v}^{-1} \text{yvvvvyv}^{-1} = 1 \\
& \text{vyv}^{-1} \text{yv}^{-1} \text{yv}^{-1} \text{yvvvy}^{-1} \text{v} = 1) \\
= & (v, w = \text{yv}^{-1} : \text{v}^{-1} \text{v}^{-1} \text{wvvvvvw} = 1, \text{vwvvvvw}^{-1} \text{v} = 1) \\
= & (v, w : \text{v}^{-2} \text{wv}^5 \text{w} = 1, \text{w}^5 \text{v}^7 = 1)
\end{aligned}$$

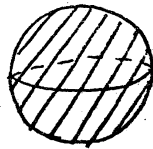
Let  $S_7$  be the symmetric group of degree 7.

We define a homomorphism  $f: G \rightarrow S_7$  as follows :

$$f(v) = (1526374), \quad f(w) = (34672).$$

Then  $f(G)$  is not a trivial subgroup of  $S_7$ , so  $G$  is a non-trivial group. Then  $M$  is not a homotopy 3-sphere. And it is easy to see that  $M$  is a homology 3-sphere.

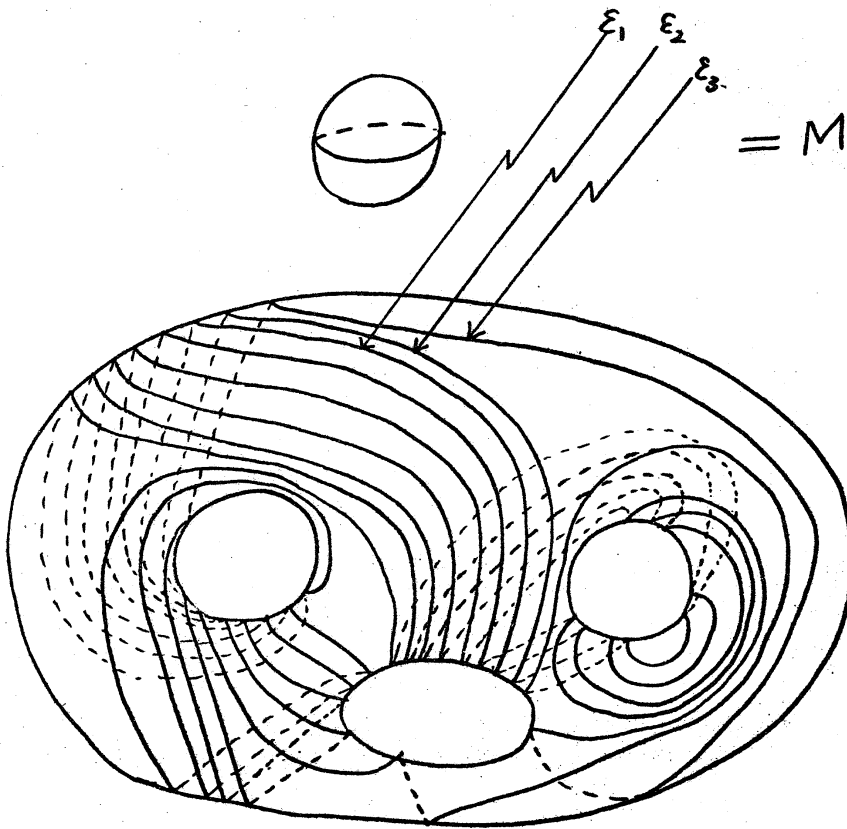
Remark.  $\pi_1(M)$  equal to the Mazur's group [1]  
 $(x, y : x^7 = y^5, y^4 = xyx).$



$= M \cap R^3 \times 3.0$



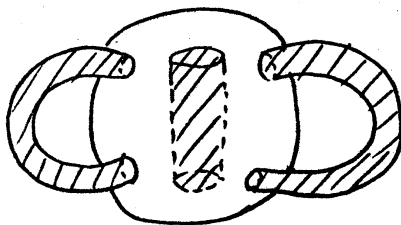
$= M \cap R^3 \times 2.5$



$= M \cap R^3 \times 2.0$



$= M \cap R^3 \times 1.5$



$= M \cap R^3 \times 1.0$



$= M \cap R^3 \times 0.5$

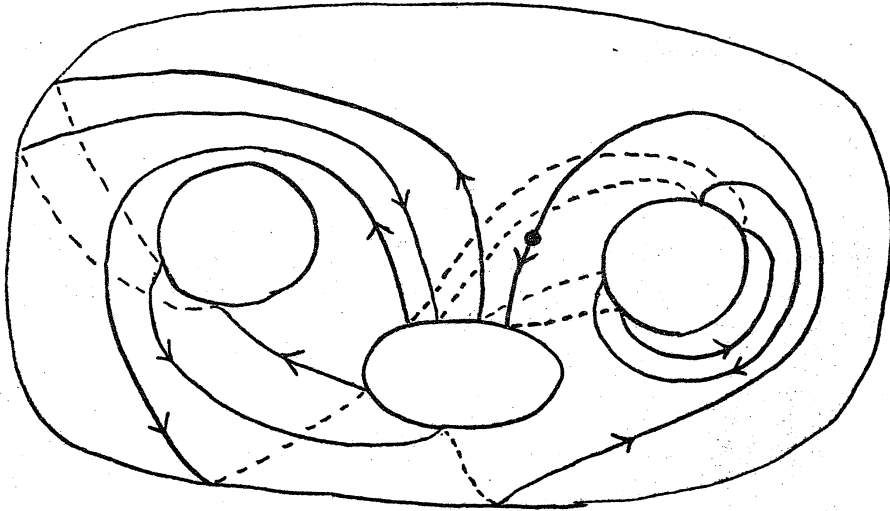


$= M \cap R^3 \times 0.0$

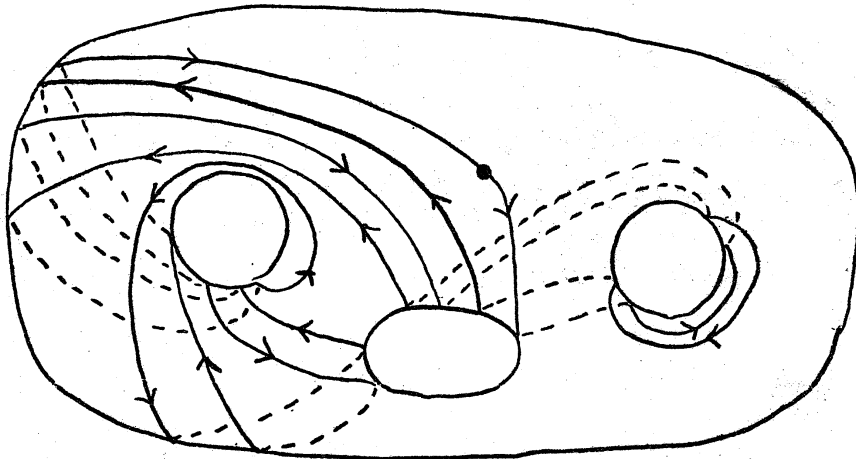


Fig. 3.

$\epsilon_1 =$



$\epsilon_2 =$



$\epsilon_3 =$

